ПРО ЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ ІЗОМОРФІЗМУ ГРАФІВ ТА УПОРЯДКУВАННЯ ЇХ ВЕРШИН

Караваєв К. Д., Турчина В.А.
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ON THE RELATION BETWEEN GRAPH ISOMORPHISM AND PARALLEL SEQUENCING PROBLEMS

Abstract. The paper investigates the possibility of constructing a complete graph invariant based on lengths of optimal sequencings obtained for different values of the sequencing width. It is shown that such an invariant will have a number of impractical limitations. Nonetheless, they may give rise to a new direction of research considering finding the length of an optimal sequencing.

Одним з відомих прикладів задач теорії розкладів є задача оптимального упорядкування вершин орієнтовних графів. Широке дослідження цієї задачі почалося у середині минулого століття і було пов'язане з удосконаленням конвеєрів автомобільного виробництва шляхом оптимізації порядку виконання робіт на них. Інтуїтивний поліноміальний розв'язок формалізованої задачі виявився оптимальним, що дало підстави сподіватися, що й у загальному випадку задача є розв'язною за поліноміальний час.

Подальші зусилля дослідників були спрямовані на розробку точних методів, заснованих на схемах направленого перебору, та пошук

підкласів задач, для яких існують поліноміальні алгоритми знаходження точних розв'язків. Такі алгоритми знаходять своє застосування в різноманітних сферах: у процесорах та програмному забезпеченні обчислювальних систем, виробничій та споживчій сферах, приладобудуванні, тощо.

Розглянемо класичну постановку задачі оптимального упорядкування. Нехай маємо n завдань, порядок виконання яких має підпорядковуватись деяким наявним виробничим залежностям. Математичну модель такої задачі природно подавати у вигляді орієнтовного графу $G(V, U)$, у якому вершини відповідають завданням, а дуги – виробничим залежностям. В класичній постановці вважається, що всі виконавці універсальні та витрати часу на виконання кожного завдання однакові.

Означення 1. Паралельним упорядкуванням вершин орієнтовного графу $G = (V, U)$ називається таке упорядкування його вершин по місцях, розташованих у лінію, при якому з того, що пара $(i, j) \in U$ випливає, що вершина i розташовується в упорядкуванні S лівіше вершини j, тобто з того, що $(i, j) \in U \wedge (i \in S[p], j \in S[q])$ випливає, що $p < q$.

Означення 2. Довжиною l упорядкування S називається число непорожніх місць в ньому: $l(S) = \sum_{i=1}^{n} \text{sign}|S[i]|$, де $S[i]$ – множини елементів, що знаходяться в упорядкуванні S на місці i.

Означення 3. Шириною h упорядкування S називається величина, що дорівнює найбільшій кількості елементів, що розташовані на одному місці: $h(S) = \max_i |S[i]|$, де $i = 1, \dots, n$.

Задача 1 (класична). По заданим графу G і значенню ширини h побудувати паралельне упорядкування мінімальної довжини.

Задача 2 (узагальнена). По заданим графу G і вектору значень ширини $h_i, i = 1, \dots, n$ побудувати паралельне упорядкування мінімальної довжини, в якому на i-ому місці буде стояти не більше h_i вершин.

Виявилось, що у загальному випадку ця задача є NP-важкою. Точні алгоритми поліноміальної складності відомі лише для деяких спеціальних видів графу G та $h = 2$.

Однією з найважливіших задач теорії графів є перевірка пари графів на ізоморфність.

Означення 4. Два орієнтовні графи G та H є ізоморфними, якщо між множинами їх вершин існує взаємо однозначна відповідність, що зберігає суміжність вершин та орієнтацію дуг.

Означення 5. Інваріантом графу G називається деяка характеристика графу, найчастіше числова, пов'язана із графом G, яка

зберігається для будь-якого графу, що є ізоморфним G. Прикладами інваріантів є кількість вершин чи дуг у графі.

На разі невідомо чи належить ця задача до класу P або NP-повних, тому вона віднесена до окремого класу складності GI.

Розглянемо питання взаємозв'язку цих задач. Так у роботі [1] було досліджено вплив перевірки ізоморфізму графів на швидкість збіжності алгоритму методу гілок та меж для таких задач. Метою подальших досліджень став зворотній зв'язок.

Так, оскільки складність задачі перевірки графів на ізоморфність, взагалі кажучи не перевищує складності задачі оптимального упорядкування, то цікавою є принаймні теоретична можливість побудови повного інваріанту на основі розв'язання аналогічних задач упорядкування вершин для графів.

Можна одразу зробити ряд спостережень. По-перше, зрозуміло, що довжини упорядкувань для ізоморфних графів при розв'язанні як класичних, так і узагальнених задач, є інваріантами за будь-яких значень h та h_i. По-друге, якщо розглянемо тривіальну задачу з $h = 1$, то отримані довжини будуть дорівнювати кількості вершин у графах, тобто цей інваріант додатково перевіряти не потрібно. По-третє, відомо, що транзитивні дуги у графі не впливають на довжини отриманих упорядкувань, а отже не зможемо відрізнити графи, що відрізняються лише наявністю таких дуг. По-четверте, для класичної задачі зміна орієнтації всіх дуг на протилежні не призводить до зміни оптимальної довжини, тому для побудови інваріанту необхідно розглядати також узагальнені задачі.

Враховуючи попередні спостереження, дослідимо тепер можливість перевірки співпадіння кількості дуг у графах, якщо серед них немає транзитивних.

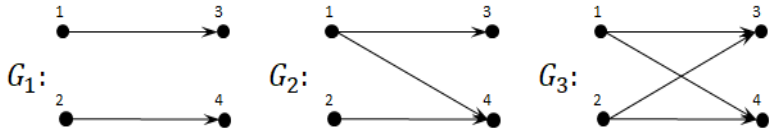


Рис.1. *Співпадіння графів з різною кількістю дуг*

Розглянемо графи з рис. 1. Графи G_1 та G_3 можна відрізнити, якщо побудуємо їх розв'язки для задачі з $h_i = \{1,2,1,1\}$. Легко побачити, що для графу G_1 довжина оптимального упорядкування складає 3, а для графу G_3 – 4. Якщо розглянемо тепер пару графів G_1 та G_2, то побачимо, що довжини їх оптимальних упорядкувань для такої задачі співпадають.

Більш того, вони співпадуть для будь-яких значень h_i. В цьому можна переконатися застосувавши наступні міркування. Нехай $h_1 = 2$, тоді можемо розмістити на перше місце лише вершини 1 та 2, після чого в обох випадках отримаємо ізоморфні графи, а отже вони будуть мати однакову довжину упорядкування згідно першого спостереження. Аналогічно, якщо $h_1 = 1$, тоді, розмістивши на цьому місці вершину 1, також отримаємо ізоморфні графи, а отже й однакові довжини оптимальних упорядкувань. Аналогічно можна переконатися, що не зможемо відрізнити ці графи при застосуванні будь-яких перетворень, що не впливають на ізоморфізм.

З попереднього прикладу випливає необхідність перевірки кількості дуг у графі окремо. Залишається перевірити можливість відрізнити графи, якщо вони мають однакову кількість дуг та не мають транзитивних дуг.

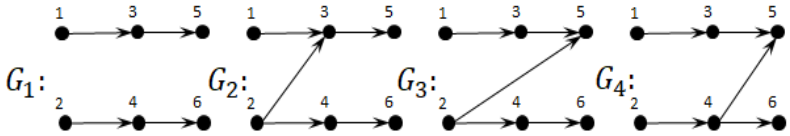


Рис.2. *Співпадіння графів з однаковою кількістю дуг*

Розглянувши графи G_2, G_3 та G_4 з рис. 2 та застосувавши до них попередні міркування, переконаємося, що вони також будуть всі мати однакові довжини оптимальних упорядкувань для довільних h_i. Більш цього, ці довжини співпадатимуть з оптимальними довжинами для графу G_1 для тих самих значень h_i.

З усього зазначеного можна зробити висновок, що побудувати повний інваріант на основі розв'язання задач оптимального упорядкування, якщо і можливо, то за великої кількості непрактичних обмежень на досліджувані графи.

З іншого боку, цікавим є подальше дослідження можливості виділення дуг, які не впливають на довжину упорядкування, для спрощення графів, що є суттєвим для задач великої розмірності.

Література

1. Караваєв К.Д., Турчина В.А. Аналіз впливу автоморфізму графу на схеми направленого перебору. – Питання прикладної математики і математичного моделювання. Дніпро, 2021 р. – С. 94-104.