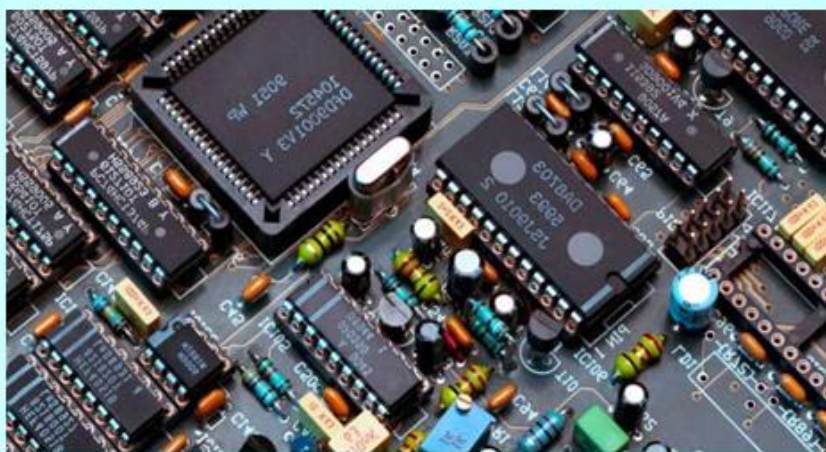


Л.М. Карпуков

**ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ,
СИГНАЛІВ ТА ПРОЦЕСІВ
В ЕЛЕКТРОНІЦІ**



Частина 1

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА»**

**ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ,
СИГНАЛІВ ТА ПРОЦЕСІВ
В ЕЛЕКТРОНІЦІ**

Частина 1

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів,
які навчаються за спеціальностями
«Кібербезпека» і «Телекомунікації та радіотехніка»

УДК 621.3.01
КХХ

*Рекомендовано до друку вченою радою
Національного університету «Запорізька політехніка»
(протокол № 11/21 від 31.05 2021 р.).*

Рецензенти:

Крижановський В.Г. – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри радіофізики та кібербезпеки Донецького національного університету імені Василя Стуса.

Паршина О.А. – кандидат технічних наук, доктор економічних наук, професор, професор кафедри кібербезпеки та інформаційних технологій Університету митної справи та фінансів, м. Дніпро.

КХХ Карпуков Л.М

Основи теорії кіл, сигналів та процесів в електроніці: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. Ч.1. / Л. М. Карпуков – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2021. – 163 с.

ISBN

В першій частині навчального посібника розглянуто основні поняття і закони теорії електричних кіл, математичні моделі електричних елементів і методи аналізу лінійних електричних кіл в частотній, часовій областях і по постійному струму. Наведено матрично-топологічні алгоритми складання рівнянь математичних моделей кіл, включаючи рівняння змінних стану. Представлено відомості з теорії чотириполосників. Детально описуються частотні і часові характеристики кіл першого і другого порядків. Розглянуто алгоритми чисельних розрахунків, що засновані на алгебраїзації диференціальних рівнянь кіл і рівнянь ємнісних та індуктивних елементів.

Для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за спеціальностями «Кібербезпека» і «Телекомунікації та радіотехніка».

УДК 621.3.01

ISBN

© Національний університет
«Запорізька політехніка», 2021
© Карпуков Л.М., 2021

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
Перелик скорочень	8
1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ЗАКОНИ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ	9
1.1 Електричне коло та електричний елемент.....	9
1.2 Основні електричні величини	11
1.2.1 Електричний струм.....	12
1.2.2 Напруга.....	12
1.2.3 Потужність і енергія електричного струму.....	13
1.3 Математичні моделі елементів кола.....	14
1.3.1 Опір.....	14
1.3.2 Ємність	15
1.3.4 Індуктивність	17
1.3.5 Ідеальне джерело напруги	19
1.3.6 Ідеальне джерело струму	20
1.3.7 Реальні джерела напруги і струму	21
1.4 Топологічні і компонентні рівняння	22
1.4.1 Закони Кірхгофа	22
1.4.2 Топологічні рівняння	25
1.5 Перетворення з'єднань елементів кола	27
1.5.1 Перетворення джерел.....	27
1.5.2 Перетворення послідовного з'єднання елементів.....	28
1.5.3 Перетворення паралельного з'єднання елементів	30
1.6 Основні завдання теорії кіл.....	33
Контрольні запитання.....	34
2 АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ РЕЗИСТИВНИХ КІЛ	36
2.1 Елементна база моделювання лінійних резистивних кіл	36
2.2 Аналіз найпростіших резистивних кіл.....	37
2.3 Матричні методи аналізу резистивних кіл	39
2.3.1 Метод контурних струмів.....	39
2.3.2 Метод вузлових потенціалів.....	43
2.3.3 Метод вузлових потенціалів на основі матриці з'єднань.....	47
Контрольні запитання.....	49
3 АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ КІЛ ВЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ	51
3.1 Гармонійний сигнал і його характеристики	51
3.2 Метод комплексних амплітуд.....	53
3.3 Елементна база частотного аналізу	57

3.4	Компонентні і топологічні рівняння	61
3.5	Характеристики електричного кола в частотній області	62
3.6	Частотні характеристики кіл першого порядку	64
3.6.1	Частотні характеристики послідовного з'єднання R і C – елементів	64
3.6.2	Частотні характеристики послідовного з'єднання R і L – елементів	69
3.6.4	Аналіз паралельного з'єднання R і C – елементів	71
3.7	Частотні характеристики кіл другого порядку	73
3.7.1	Послідовний коливальний контур	73
3.7.1.1	Резонансні властивості послідовного коливального контуру	74
3.7.1.2	Частотні характеристики послідовного коливального контуру	76
3.7.1.3	Частотні властивості послідовного коливального контуру	79
3.7.2	Паралельний коливальний контур	81
3.7.2.1	Резонансна частота паралельного коливального контуру	81
3.7.2.2	Резонансні властивості паралельного коливального контуру	82
3.7.2.3	Схема заміщення паралельного коливального контуру	84
3.7.2.4	Частотні характеристики паралельного коливального контуру	85
3.8	Матричні методи частотного аналізу кіл	87
3.9	Умова передавання максимальної потужності від джерела в навантаження	88
	Контрольні запитання	91
4	АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ КІЛ У ЧАСОВІЙ ОБЛАСТІ	94
4.1	Математична модель лінійного кола в часовій області	94
4.2	Тестові сигнали	96
4.2.1	Одинична ступінчаста функція	96
4.2.2	Одинична імпульсна функція	97
4.3	Перехідна і імпульсна характеристики кола	99
4.4	Інтеграли накладення. Знаходження реакції кола на довільний вплив	100
4.5	Часові характеристики кіл першого порядку	103
4.5.1	Реакція послідовного RC – кола на ступінчастий вплив	103
4.5.2	Реакція RC – кола на сигнал прямокутної форми	106

4.5.3	Перехідні та імпульсні характеристики RC – кола	108
4.5.4	Реакція RC - кола на гармонійний вплив	109
4.5.5	Диференціювальна і інтегрувальна RC - ланка	114
4.5.6	Реакція послідовного RL – кола на ступінчастий вплив	115
4.6	Часові характеристики кіл другого порядку	118
4.6.1	Часові характеристики послідовного RLC – кола	118
4.6.1.1	Реакція послідовної RLC – кола на ступінчастий вплив	119
4.6.1.2	Коливальний режим у послідовного RLC - кола	122
4.6.1.3	Аперіодичний режим у послідовного RLC - кола	125
4.6.1.4	Перехідна та імпульсна характеристики послідовного коливального контуру	126
4.6.1.5	Реакція послідовного коливального контуру на гармонійний вплив.....	127
4.6.2	Часові характеристики паралельного RLC – кола.....	130
4.7	Метод змінних стану	133
4.8	Методи чисельних розрахунків часових характеристик кіл.....	139
4.8.1	Алгебраїзація диференціальних рівнянь	139
4.8.2	Дискретні моделі реактивних елементів	142
	Контрольні запитання.....	145
5	ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЧОТИРИПОЛЮСНИКОВ.....	147
5.1	Основні рівняння чотиріполюсника.....	147
5.2	Фізичний зміст параметрів чотиріполюсника	148
5.3	Методи визначення параметрів чотиріполюсника	149
5.4	Залежні джерела напруги і струму	151
5.5	Схеми заміщення чотиріполюсника.....	153
5.6	Параметри навантаженого чотиріполюсника.....	156
5.7	Зв'язані котушки індуктивності	157
5.8	Трансформатор.....	160
	Контрольні запитання.....	160
	Бібліографічний список	162

ВСТУП

Метою викладання навчальної дисципліни «Основи теорії кіл, сигналів та процесів в електроніці» є опанування студентами здатності здійснювати моделювання електричних кіл та проводити аналіз явищ і процесів, що відбуваються в електронних пристроях систем обробки, передачі, прийому і захисту інформації. Вивчення дисципліни формує компетенції, необхідні для освоєння спеціальних курсів і подальшої професійної діяльності в галузі інформаційної безпеки, електроніці та телекомунікацій.

Перша частина навчального посібника складається з п'яти розділів, зміст яких відповідає навчальній програмі дисципліни. У розділах посібника розглядаються основні поняття і закони теорії електричних кіл, математичні моделі електричних елементів, компонентні і топологічні рівняння, графи електричних схем; наводяться методи перетворення з'єднань електричних елементів, матрично-топологічні алгоритми аналізу лінійних резистивних кіл; викладаються математичні основи методу комплексних амплітуд, математичні моделі електричних елементів і методи аналізу лінійних кіл в частотній області; описується класичний метод розв'язання звичайних диференціальних рівнянь і застосування інтегралів накладення при аналізі кіл на довільний вплив; досліджуються частотні характеристики кіл першого та другого порядку; детально аналізуються резонансні властивості послідовного і паралельного контурів і процеси, що протікають в них при ступінчастому і гармонійному впливах; наводиться топологічний алгоритм формування диференціальних рівнянь змінних стану і аналітичний метод їх вирішення з використанням матричної експоненти; розглядаються чисельні методи рішення диференціальних рівнянь кіл і вводяться дискретні моделі LC- елементів; викладаються елементи теорії чотириполосників.

Дисципліна за змістом є математичною, тому основна увага в посібнику приділена опису математичних моделей електричних елементів для різних видів аналізу, методам формування рівнянь математичних моделей кіл і формалізованим алгоритмам їх вирішення.

Для полегшення освоєння матеріалу навчального посібника його структура складена за принципом поступового ускладнення використовуваного математичного апарату - від опису кіл системами лінійних алгебраїчних рівнянь до представлення моделей кіл диференціальними рівняннями. Виклад матеріалу здійснюється в короткій конспективній формі з ілюстрацією на прикладах застосування найбільш важливих питань теорії з поясненням за результатами аналізу фізичної суті процесів, що протікають в електричних колах.

Розділи навчального посібника супроводжуються контрольними запитаннями, відповіді на які сприяють кращому засвоєнню матеріалу. Посібник може бути використаний як при традиційних, так і дистанційних технологіях навчання.

Призначено для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за спеціальностями «Кібербезпека», «Телекомунікації та радіотехніка».

ПЕРЕЛИК СКОРОЧЕНЬ

АЧХ	- амплітудно-частотна характеристика,
ВАХ	- вольт-амперна характеристика,
ЕРС	- електрорушійна сила,
ЗКН	- закон Кірхгофа для напруг,
ЗКС	- закон Кірхгофа для струмів,
КЗ	- коротке замикання,
ОП	- операційний підсилювач,
СМ	- смуговий фільтр,
ФВЧ	- фільтр верхніх частот,
ФНЧ	- фільтр нижніх частот,
ФЧХ	- фазочастотна характеристика,
ХХ	- холостий хід.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ЗАКОНИ ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

В загальному випадку процеси, що протікають в електронних обладнаннях, підкорюються законам електромагнетизму. В теорії електричних кіл замість визначення векторних величин теорії електромагнітного поля використовується спрощений опис процесів в електронних обладнаннях, заснований на введенні понять електричного струму і напруги.

1.1 ЕЛЕКТРИЧНЕ КОЛО ТА ЕЛЕКТРИЧНИЙ ЕЛЕМЕНТ

Під електричним колом в теорії електричних кіл розуміється система електричних елементів, призначених для проходження електричного струму. Проходження струму по електричному колу супроводжується формуванням, перетворенням і передаванням електричних сигналів.

Електричний сигнал – це зміни струму в часі, що несуть інформацію. Мінливий у часі змінний струм, протікаючи по провідниках, створює навколо них електромагнітне поле. Поле поширюється в просторі у вигляді електромагнітних хвиль. Хвилі являють собою гармонійні коливання, які характеризуються частотою коливань f . Частота вимірюється в герцах. Герц – це одне коливання в секунду. Величина $T = 1/f$ - тривалість одного коливання, називається періодом коливань і вимірюється в секундах. У вільному просторі електромагнітні хвилі поширюються зі швидкістю світла $c=3 \cdot 10^8$ м/с. Відстань, яку проходить хвиля за час, що дорівнює періоду, називається довжиною хвилі і визначається як

$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f}. \quad (1.1)$$

Електричний елемент – це пристрій, що виконує найпростішу функцію над електричним струмом. До таких функцій ставляться: генерування, споживання і накопичення електричної енергії. По числу зовнішніх вузлів (полюсів), за допомогою яких елементи

підключаються до кола, вони діляться на двополюсні, триполюсні, чотириполюсні і багатополюсні.

Генерування електричної енергії здійснюється джерелами струму або напруги. В цих елементах відбувається перетворення енергії неелектричної природи в електричну енергію. Прикладом може служити гальванічна батарея, акумулятор, термоелемент, сонячна батарея, електрогенератор.

Споживачі електричної енергії перетворюють електричну енергію в енергію неелектричної природи. Прикладом може служити резистор, у якому електрична енергія перетворюється в теплову, лампа розжарювання, що виділяє при споживанні струму тепло і світлову енергію.

Накопичувачами електричної енергії є конденсатори, що накопичують енергію електричного поля, і котушки індуктивності, що накопичують магнітну енергію.

При аналізі електричного кола він зображується у вигляді електричної схеми, складеної із з'єднання умовних позначок електричних елементів.

Для прикладу на рис. 1.1 наведено найпростіше електричне коло і його електрична схема, які складаються із гальванічної батареї – джерела електричної енергії (Б), лампи розжарювання – споживача електричної енергії (Л) і кнопки включення (Кн). Елементи кола з'єднані провідниками, на схемі вони показані відрізками прямих ліній.

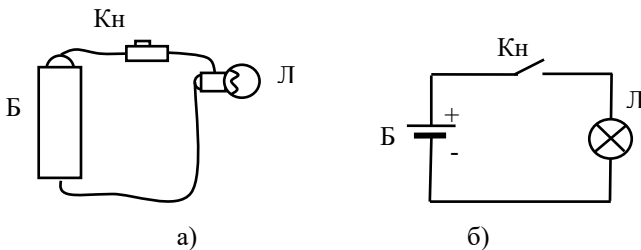


Рисунок 1.1

В теорії електричних кіл залежно від довжини хвилі коливань використовуються дві моделі електричних елементів: модель із зосередженими параметрами і модель із розподіленими параметрами.

При геометричних розмірах елемента набагато менших довжини хвилі використовується модель із зосередженими параметрами. У

цьому випадку запізнюванням струму при проходженні через елемент можна зневажити і уважати, що елемент зосереджений в області, що має нульові розміри.

Модель із розподіленими параметрами застосовується у випадку, коли хоча б один з розміром l_{\max} електричного елемента порівняємо або більше довжини хвилі λ електричних коливань, а інші розміри елемента набагато менші λ . Умовою, з якої елемент слід представляти моделлю з розподіленими параметрами, є $l_{\max} > 0,05 \dots 0,1 \lambda$. Струм, протікаючи через елемент уздовж напрямку l_{\max} , з'явиться на виході елемента не миттєво, а через якийсь час – час запізнювання. Тому розподіл струму і напруги в такому елементі буде залежати як від часу, так і від просторової координати. Наприклад, при складанні схеми електричного кола на рис. 1.1 передбачалося, що для її елементів використовувалась модель із зосередженими постійними. Однак, якщо побільшити довжину провідників, наприклад, застосувавши для з'єднання батареї з лампою двопровідну лінію, то струм у лампі з'явиться із запізнюванням, пропорційним довжині лінії. Тому для обліку запізнювання сигналу в лінії її необхідно розглядати як елемент із розподіленими параметрами. Електричне коло, що містить хоча б один елемент із розподіленими параметрами ставиться до класу кіл з розподіленими параметрами.

Залежно від функціональних співвідношень між струмом і напругою електричні елементи підрозділяються на лінійні і нелінійні.

У лінійних елементів струми і напруги зв'язані лінійними рівняннями. Коло, що складено з лінійних елементів, називається лінійним колом. Для лінійного кола виконується *принцип суперпозиції* – *реакція кола на суму вхідних впливів дорівнює сумі реакцій від кожного впливу окремо*.

Струми і напруги нелінійних елементів зв'язані нелінійними рівняннями. Коло, що містить хоча б один нелінійний елемент, ставиться до класу нелінійних кіл.

1.2 ОСНОВНІ ЕЛЕКТРИЧНІ ВЕЛИЧИНИ

Основними електричними величинами теорії електричних кіл є струм, напруга, потужність, енергія.

1.2.1 Електричний струм

Електричний струм у провідному середовищі – це впорядкований рух електричних зарядів. Електричний струм характеризується напрямком і силою струму.

За позитивний напрямок струму ухвалюється напрямок руху позитивних зарядів.

Сила струму - це кількість електричних зарядів, що пройшли через поперечний переріз провідника за одиницю часу:

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}, \quad (1.2)$$

де q – заряд, Кл (кулон);

t - час, с (секунда);

i - струм, А (ампер).

Електричний струм може бути постійним або змінним. Змінний струм є функцією часу $i(t)$ і характеризується миттєвим значенням у кожний момент часу t .

1.2.2 Напряга

Напряга u_{ab} між точками a і b – це різниця потенціалів ϕ_a і ϕ_b між цими точками. Напряга спрямована із точки з більшим потенціалом у точку з меншим потенціалом. Більший потенціал прийнято позначати знаком плюс, менший - знаком мінус.

Струм у коло протікає під дією напруги, тому його напрямок збігається з напрямком напруги. На рис. 1.2 показано напрямок напруги і струму на ділянці кола для випадку $\phi_a > \phi_b$.

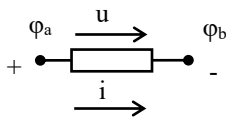


Рисунок 1.2

Потенціал точки чисельно дорівнює роботі, затрачуваній на перенос одиничного позитивного заряду з нескінченності в задану точку. Тому напруга між двома точками чисельно рівняється роботі, затраченій на перенос одиничного позитивного заряду з однієї

точки в іншу:

$$u = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta q} = \frac{dw}{dq}, \quad (1.3)$$

де w - енергія, Дж (джоуль);

q - заряд, Кл (кулон);

u - напруга, В (вольт).

Напруга, як і струм, може бути постійною або змінною. Змінна напруга є функцією часу і характеризується миттєвим значенням $u(t)$.

При аналізі кола напрямком струму на елементах кола задається довільно. Реальний напрямок буде відомий після розрахунків кола. Якщо в розрахунках величина струму отримує негативне значення, то реальний напрямок струму буде протилежним заданому напрямку.

1.2.3 Потужність і енергія електричного струму

На підставі (1.3) кількість енергії, затрачуваної на перенос одиничного позитивного заряду з однієї точки в іншу, становить:

$$dw = u dq. \quad (1.4)$$

Потужність електричного струму - це зміна енергії за одиницю часу:

$$p = \frac{dw}{dt} = u \frac{dq}{dt} = u i, \quad (1.5)$$

де w – енергія, Дж (джоуль),

t - час, с (секунда),

p – потужність, Вт (ват).

Кількість енергії, що надійшла в ділянку кола за проміжок часу від t_1 до t_2 , на підставі (1.5) рівняє:

$$W = w(t_2) - w(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} u(t) i(t) dt. \quad (1.6)$$

Миттєве значення потужності $p(t)$ на ділянці кола може бути як позитивним, так і негативним. Позитивному значенню потужності відповідає в момент часу t споживання енергії ділянкою кола. Негативному значенню відповідає віддача енергії ділянкою кола.

1.3 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЕЛЕМЕНТІВ КОЛА

Базовими елементами електричних кіл є опір, ємність, індуктивність, джерела струму і напруги. Опір, ємність, індуктивність є пасивними двополюсними елементами, що споживають електричну енергію. Базові пасивні елементи характеризуються лінійними алгебраїчними або лінійними диференціальними рівняннями і ставляться до класу лінійних елементів.

Джерела струму і напруги являють собою активні двополюсні елементи, що виробляють електричну енергію, під дією якої збуджуються струми і напруги в пасивних елементах електричного кола. Джерела постійної напруги або струму прийнято називати джерелами живлення кола. Джерела змінної напруги і струму, що міняються в часі за заданим законом, називаються джерелами сигналу.

1.3.1 Опір

Опір – це ідеальний пасивний елемент, у якому безповоротно відбувається поглинання електричної енергії. Опору відповідає реальний елемент електричного кола – резистор. Типова конструкція резистора являє собою циліндр із кераміки, на який нанесена тонка плівка з металевого сплаву з високим питомим опором. Кінці циліндра постачені напресованими металевими ковпачками із дротовими виводами для монтажу. На рис. 1.3 наведено зовнішній вигляд резистора і умовне графічне позначення опору, там же для опору показаний напрямок струму і напруги.



Рисунок 1.3

Рівняння для опору R визначається законом Ома:

$$u = R i. \quad (1.7)$$

Одиниця виміру опору - Ом.

Величина $G = 1/R$, зворотна опору, являє собою провідність, яка вимірюється в сименсах (См). Закон Ома для провідності записується у вигляді:

$$i = G u. \quad (1.8)$$

Потужність, виділювана на опорі у вигляді тепла, згідно (1.5):

$$p = u i = R i^2 = G u^2. \quad (1.9)$$

Внаслідок лінійності рівнянь (1.7), (1.8) змінні напруга $u(t)$ і струм $i(t)$ на опорі будуть збігатися за формою, а їх миттєві значення будуть пропорційні один одному в будь-який момент часу.

1.3.2 Ємність

Ємність – це ідеальний пасивний елемент, у якому накопичується енергія електричного поля. Ємності відповідає реальний елемент електричного кола – конденсатор. У найпростішому варіанті конструкція конденсатора являє собою дві металеві пластини (обкладки), які розділені тонким шаром діелектрика. На рис. 1.4 показано зовнішній вигляд конденсаторів, умовна позначка ємності, а також напрямок струмів i і напруга на ній.

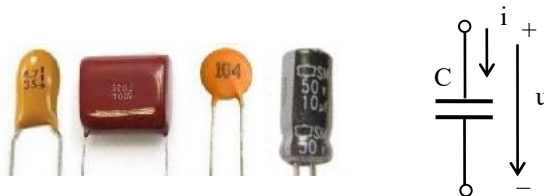


Рисунок 1.4

Якщо прикласти напругу до конденсатора, то на його обкладках з'являться заряди, рівні за величиною і протилежні за знаком. В результаті в діелектрику між обкладками виникне електричне поле.

Ємність – коефіцієнт пропорційності між величиною заряду, що накопичується ємнісним елементом, і прикладеною напругою:

$$q = C u, \quad (1.10)$$

де C – ємність, Φ (фарада).

Зміна заряду в часі утворює струм через ємнісний елемент:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}. \quad (1.11)$$

Величина струму пропорційна швидкості зміни напруги. Якщо до ємнісного елемента прикладена постійна напруга, то струм дорівнює нулю, тобто ємність для постійного струму являє розрив кола.

Диференціальне рівняння (1.11) є основною математичною моделлю ємнісного елемента. В якості його моделі може також використовуватися інтегральне співвідношення, що випливає з (1.11):

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt, \quad (1.12)$$

де $u(t_0)$ - напруга на ємності в момент часу t_0 .

Потужність ємнісного елемента

$$p = u i = C u \frac{du}{dt}. \quad (1.13)$$

Енергія, запасена в ємності,

$$w_C = \int_{-\infty}^t C u \frac{du}{dt} dt = \int_0^u C u du = \frac{C u^2}{2}. \quad (1.14)$$

Як слідує з (1.13), при $du/dt > 0$ потужність в ємності додатна. Це відповідає накопиченню в ємності енергії електричного поля. Якщо $du/dt < 0$, то потужність в ємності від'ємна, тобто ємність віддає енергію – розряджається.

З інтегрального співвідношення (1.12) випливає, що напруга в міру заряду ємності міняється плавно, струм же може змінюватися стрибкоподібно. На рис.1.5 для прикладу наведена часова залежність напруги на ємності і відповідна залежність для струму.

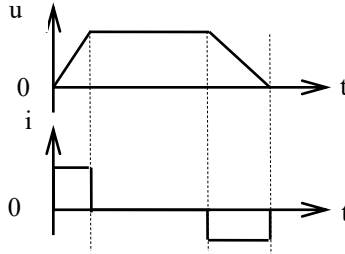


Рисунок 1.5

На рисунку графік залежності струму в ємності відповідає функції, пропорційній похідній від функції зміни в часі напруги на ємності.

1.3.4 Індуктивність

Індуктивність – це ідеальний пасивний елемент, в якому накопичується магнітна енергія. Індуктивності відповідає реальний елемент електричних кіл – котушка індуктивності. У найпростішому варіанті конструкція котушки являє собою циліндр із діелектрика, на який намотано мідний ізольований провід. На рис. 1.6 показано зовнішній вигляд котушки індуктивності, умовна позначка індуктивності, а також напрямки струмів і напруг на ній.



Рисунок 1.6

При протіканні струму по витках котушки, довкола нього утворюється магнітне поле. Інтенсивність поля характеризується магнітним потоком Φ , вимірюваним у веберах (Вб). Сума потоків від усіх витків котушки утворює потокозчеплення Ψ . Індуктивність – це коефіцієнт пропорційності між потокозчепленням і струмом:

$$\Psi = L i, \quad (1.15)$$

де L – індуктивність, G_n (Генрі).

Згідно із законом електромагнітної індукції зміна потокозчеплення в часі викликає появу напруги на індуктивності:

$$u = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt}. \quad (1.16)$$

Величина напруги пропорційна швидкості зміни струму в індуктивності. Якщо через індуктивність протікає постійний струм, то напруга дорівнює нулю, тобто індуктивність для постійного струму являє коротке замикання кола.

Диференціальне рівняння (1.16) є основною математичною моделлю індуктивності. У якості її моделі може також використовуватися інтегральне співвідношення, що випливає з (1.16):

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(t) dt, \quad (1.17)$$

де $i(t_0)$ - струм в індуктивності в момент часу t_0 .

Потужність індуктивного елемента

$$p = u i = L i \frac{di}{dt} \quad (1.18)$$

Енергія, запасена в індуктивності:

$$w_L = \int_{-\infty}^t L i \frac{di}{dt} dt = \int_0^i L i di = \frac{L i^2}{2}. \quad (1.19)$$

Як слідує з (1.18), при $di/dt > 0$ потужність в індуктивності додатна. Це відповідає накопиченню в індуктивності енергії магнітного поля. Якщо $di/dt < 0$, то потужність в індуктивності від'ємна, тобто індуктивність віддає енергію – розряджається.

З інтегрального співвідношення (1.17) випливає, що струм в індуктивності міняється плавно, напруга ж може змінюватися

стрибокподібно. На рис.1.7 для прикладу наведена часова залежність струму в індуктивності і відповідна залежність для напруги.

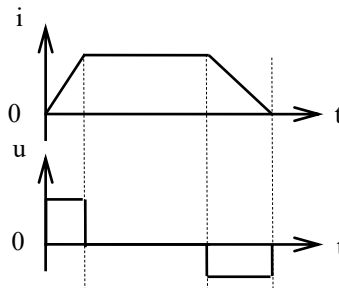


Рисунок 1.7

На рисунку графік залежності напруги на індуктивності відповідає функції, пропорційній похідній від функції зміни в часі струму в індуктивності.

1.3.5 Ідеальне джерело напруги

Ідеальне джерело напруги – це активний елемент, який виробляє напругу, що не залежить від величини струму, що віддається в зовнішнє коло. Напругу, яку виробляє джерело, прийнято називати електрорушійною силою (ЕРС). Під ЕРС розуміється кількість роботи, затрачуваної всередині джерела сторонніми силами, у тому числі неелектричної природи, на переміщення одиничного позитивного заряду від меншого потенціалу до більшого - від «мінуса» до «плюса». ЕРС джерел постійної напруги прийнято позначати символом E , змінного - символом $e(t)$.

Внутрішній опір ідеального джерела напруги дорівнює нулю, тому для струму, що протікає через нього, він являє собою коротке замикання (КЗ).

На рис. 1.8,а показана умовна позначка ідеального джерела напруги, на цьому ж рисунку (б) для ідеального джерела постійної напруги величиною E наведена залежність напруги від струму, яка називається *вольт-амперною характеристикою* (ВАХ).

В умовній позначці джерела напруги присутня стрілка, що вказує позитивний напрямок ЕРС – від негативного потенціалу (-) до

позитивного (+). Напряга $u(t)$ на джерелі рівно ЕРС $e(t)$ джерела і протилежно спрямоване.

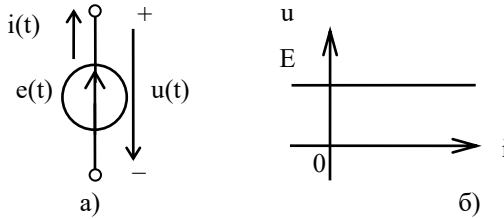


Рисунок 1.8

Відсутність розривів провідників у позначенні джерела вказує на відсутність опору при проходженні струму через джерело.

1.3.6 Ідеальне джерело струму

Ідеальне джерело струму – це активний елемент, який виробляє струм, що не залежить від величини напруги на його зовнішніх вузлах. Внутрішній опір ідеального джерела струму дорівнює нескінченності, а провідність дорівнює нулю. Тому струм із зовнішнього кола через ідеальне джерело струму не протікає, таке джерело представляє для зовнішнього струму розрив кола (холостий хід - ХХ).

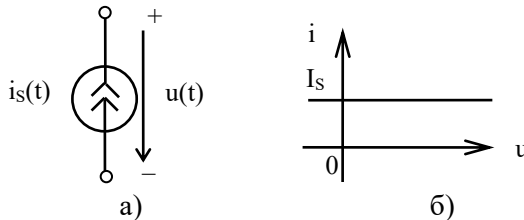


Рисунок 1.9

На рис. 1.9 показана умовна позначка ідеального джерела струму і наведена вольт-амперна характеристика для джерела постійного струму I_s . Стрілки на позначенні вказують позитивний напрямок струму джерела. В умовній позначці джерела струму присутній розрив провідників, що вказує на неможливість проходження через нього зовнішнього струму.

1.3.7 Реальні джерела напруги і струму

Еквівалентна схема реального джерела напруги представлена на рис. 1.10,а, вона складається з ідеального джерела $e(t)$ і внутрішнього опору R_i , за допомогою якого враховуються втрати електричної енергії всередині джерела.

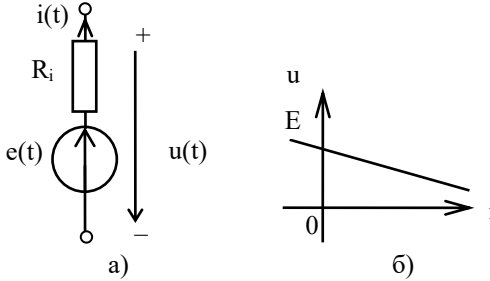


Рисунок 1.10

Напруга на зовнішніх вузлах реального джерела менше E_{PC} на величину спадання напруги на опорі:

$$u(t) = e(t) - R_i i(t).$$

Вольт–амперна характеристика реального джерела постійної напруги представлена на рис. 1.10,б, кут нахилу прямої на рисунку пропорційний опору R_i .

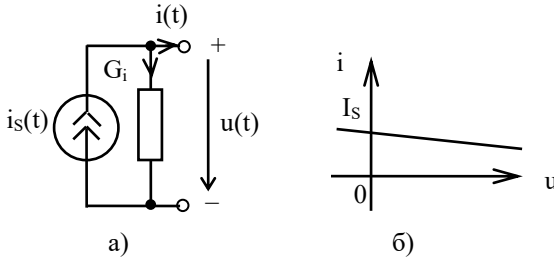


Рисунок 1.11

Еквівалентна схема реального джерела струму представлена на рис. 1.11,а, вона складається з ідеального джерела $i_s(t)$ і внутрішньої провідності G_i , за допомогою якої враховуються втрати електричної енергії всередині джерела.

За рахунок втрати електричної енергії в джерелі струм реального джерела менше струму $i_s(t)$ ідеального джерела на величину струму, що проходить через провідність:

$$i(t) = i_s(t) - G_1 u(t).$$

Вольт–амперна характеристика реального джерела постійного струму представлена на рис. 1.11,б, кут нахилу прямої на рисунку пропорційний провідності G_1 .

1.4 ТОПОЛОГІЧНІ І КОМПОНЕНТНІ РІВНЯННЯ

Математична модель кола складається на підставі топологічних і компонентних рівнянь. Топологічні рівняння описують зв'язки між елементами електричного кола і складаються на підставі законів Кірхгофа для напруг і струмів. У топологічних рівняннях відомі величини – це напруги і струми джерел, невідомі величини - напруги і струми пасивних елементів.

Компонентні рівняння – це рівняння електричних елементів, що становлять коло. Вид математичної моделі визначається видом компонентних рівнянь. Базовою математичною моделлю електричного кола є система рівнянь для миттєвих значень струмів і напруг в його елементах. У випадку використання для електричних елементів базових моделей з розділу 1.3, модель кола буде представлена спільною системою лінійних диференціальних і алгебраїчних рівнянь.

1.4.1 Закони Кірхгофа

Закони Кірхгофа формулюються щодо струмів у вузлах кола і для напруги в його контурах.

- *Вузол* – це точка з'єднання двох і більш елементів кола.

Для вузла виконується перший закон Кірхгофа (закон Кірхгофа для струмів - ЗКС) - *алгебраїчна сума миттєвих значень струмів у вузлі дорівнює нулю*:

$$\sum_k i_k = 0. \quad (1.20)$$

Підсумовування тут проводиться з урахуванням знака при струмі. Знак визначається напрямком струму. Звичайно струм, що втікає у вузол, вважається позитивним, що впливає – негативним.

На рис. 1.12 наведені схеми з'єднань у вузлі, позначеному цифрою 1.

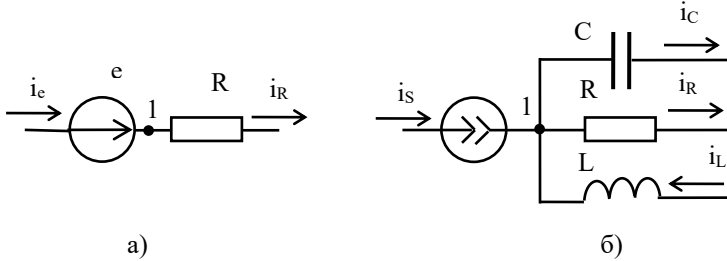


Рисунок 1.12

З урахуванням напрямків струмів для вузла на схемі 1.12,а співвідношення (1.20) запишеться як $i_e - i_R = 0$, а для вузла на рис 1.12,б - $i_S + i_L - i_C - i_R = 0$.

Можна використовувати для струмів у вузлі інше формулювання першого закону - *сума струмів, що втікають у вузол, дорівнює сумі струмів, що впливають із нього*. При такому формулюванні: $i_e = i_R$, $i_S + i_L = i_C + i_R$.

Перший закон Кірхгофа впливає із закону збереження заряду, тому що заряди у вузлі не зникають і не накопичуються.

• *Контур* – це замкнене безперервне з'єднання елементів без їхнього повторення.

Для контуру виконується другий закон Кірхгофа (закон Кірхгофа для напруг – ЗКН) - *алгебраїчна сума миттєвих значень напруг у контурі дорівнює нулю*:

$$\sum_k u_k = 0. \quad (1.21)$$

Підсумовування тут проводиться з урахуванням знака при напрузі. Знак визначається в результаті порівняння напрямку напруги на

елементі з обраним напрямком обходу контуру. При збігу напрямків напруги вважаються позитивним, при розбіжності – негативним.

Приклади контурів показані на рис. 1.13.

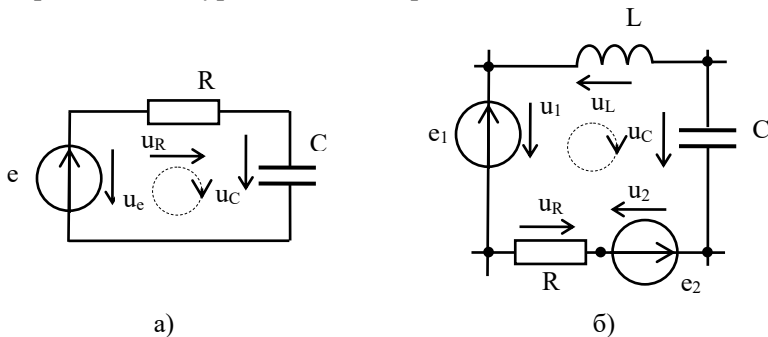


Рисунок 1.13

На рисунках напрямок обходу відзначений пунктирною лінією. З урахуванням обраного напрямку співвідношення (1.21) для схеми на рис. 1.13,а запишеться як $u_R + u_C - u_e = 0$, а для схеми на рис. 1.13,б - $u_C + u_2 - u_R - u_1 - u_L = 0$. Напруга і ЕРС джерела напруги рівні по величині, тому для розглянутих контурів, ввівши ЕРС, можна записати: $u_R + u_C - e = 0$, $u_C + e_2 - u_R - e_1 - u_L = 0$. Отже, другий закон можна сформулювати інакше – *алгебраїчна сума напруг на пасивних елементах контуру дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС у контурі*:

$$\sum_k u_k = \sum_i e_i. \quad (1.22)$$

Для схем на рис. 1.13 співвідношення (1.22) запишеться у вигляді: $u_R + u_C = e$, $u_C - u_R - u_L = e_1 - e_2$. Щодо струмів на елементах, за умови збігу напрямків струмів і напруг, ці рівняння з урахуванням співвідношень із розділу 1.3 приймуть вид:

$$R i_R + \frac{1}{C} \int i_C dt = e,$$

$$\frac{1}{C} \int i_C dt - R i_R - L \frac{di_L}{dt} = e_1 - e_2.$$

Другий закон Кірхгофа випливає із закону збереження енергії в контурі – величина енергії, що віддається джерелами ЕРС, дорівнює величині енергії, споживаної пасивними елементами.

1.4.2 Топологічні рівняння

При складанні топологічних рівнянь схема кола в загальному випадку представляється у вигляді орієнтованого графа.

Граф схеми – це топологічна модель схеми, що складається з гілок і вузлів.

Гілка – це топологічна модель елемента схеми, що представляє собою відрізок лінії довільної форми та характеризується напрямком і вагою. Напрямок гілок позначається стрілкою і збігається з напрямком струму в елементі. Вага гілок – це ознака, що служить для ідентифікації елемента, наприклад його порядковий номер у схемі або його умовна позначка.

Вузол – це точка з'єднання гілок. Вузли графа нумеруються, починаючи з нуля.

Шлях - це безперервна без повторення послідовність гілок.

Контур – це замкнений шлях.

Дерево графа –це сукупність гілок, що утворює шляхи між будь-якою парою вузлів графа і не утворююча контурів.

Ребра дерева – гілки, що ввійшли в дерево.

Хорди – гілки, що не ввійшли в дерево.

На рис. 1.14 наведена схема кола (а) і його орієнтований граф (б). Стрілками на схемі позначені напрямки струму і напруги на елементах.

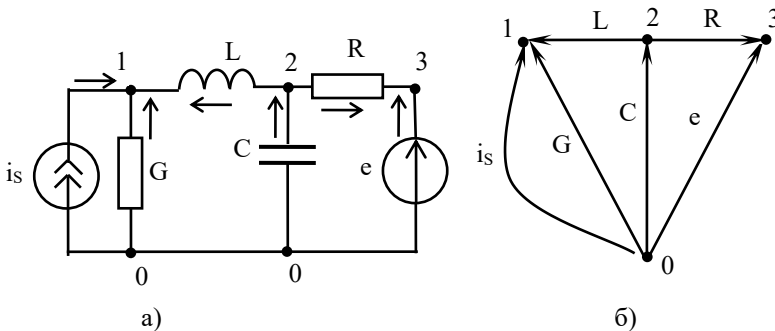


Рисунок 1.14

Рівняння схеми за першим законом Кірхгофа:

$$\text{для вузла 1} \quad i_S + i_G + i_L = 0;$$

$$\text{для вузла 2} \quad i_C - i_R - i_L = 0;$$

$$\text{для вузла 3} \quad i_e + i_R = 0;$$

$$\text{для вузла 0} \quad -i_S - i_G - i_C - i_e = 0.$$

Неважко переконатися, що рівняння в цій системі залежні, тобто кожне із цих рівнянь можна одержати шляхом комбінації інших рівнянь. Наприклад, якщо скласти 1, 2 і 3-є рівняння, то одержимо рівняння для нульового вузла. Таким чином, одне з рівнянь є надлишковим. Звичайно із системи рівнянь виключається рівняння для нульового вузла. Цей вузол називається базисним. Отже, математичну модель кола становлять рівняння для всіх вузлів, крім базисного нульового вузла. Тому, якщо позначити через N_B число вузлів схеми, то число $N_{ЗК}$ незалежних рівнянь за законом Кірхгофа для струмів становить

$$N_{ЗК} = N_B - 1. \quad (1.23)$$

При складанні топологічних рівнянь за другим законом Кірхгофа зі схеми виключаються джерела струму, тому що вони для зовнішнього струму представляють розрив кола. На рис. 1.15 представлено граф схеми без джерела струму (а) і два дерева цього графа (б, в).

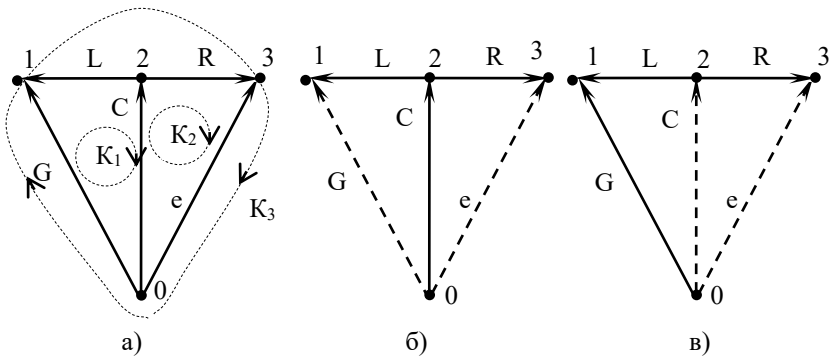


Рисунок 1.15

Граф має три контури. З урахуванням напрямку обходу контурів топологічні рівняння схеми здобувають наступний вид:

$$\text{для контуру 1 } u_G - u_L - u_C = 0;$$

$$\text{для контуру 2 } u_C + u_R = -e;$$

$$\text{для контуру 3 } u_G - u_L + u_R = -e.$$

Неважко переконатися, що рівняння в цій системі також залежні. Наприклад, склавши 1 і 2-е рівняння, одержимо третє рівняння. Для складання математичної моделі розглянутої схеми одне з рівнянь потрібно виключити. Отже, для розглянутої схеми число незалежних рівнянь рівно двом. У загальному випадку для схеми з N_G гілками і N_V вузлами, число $N_{ЗКН}$ незалежних рівнянь за законом Кірхгофа для напруг становить

$$N_{ЗКН} = N_G - (N_V - 1) = N_G - N_{ЗКС}. \quad (1.24)$$

Для складних схем процес складання системи незалежних рівнянь формалізується шляхом побудови дерева графа. Для схеми на рис. 1.14 граф має всього три дерева. Два з них показані на рис. 1.15,б,в. Ребра дерев відзначені суцільною лінією, хорди – пунктирної. Підключення хорд до дерева утворює контури, рівняння яких складуть систему незалежних рівнянь. Наприклад, при використанні дерева на рис. 1.15,б підключення хорд G і e сформує 1-й і 2-й незалежний контур.

1.5 ПЕРЕТВОРЕННЯ З'ЄДНАНЬ ЕЛЕМЕНТІВ КОЛА

Коло в результаті перетворення з'єднань елементів може бути спрощено і представлено еквівалентним елементом або більш простим еквівалентним колом.

1.5.1 Перетворення джерел

Реальні джерела напруги і струму на рис. 1.16 можуть бути перетворені з одного виду в інший.

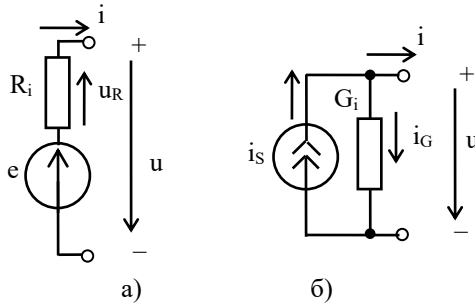


Рисунок 1.16

Для схеми на рис. 1.16,а за законом Кірхгофа для напруг і закону Ома можна записати

$$\begin{aligned} u_R + u &= e, \\ u &= e - u_R = e - R_i i, \end{aligned}$$

звідси

$$i = \frac{1}{R_i} e - \frac{1}{R_i} u. \quad (1.25)$$

За законом Кірхгофа для струмів і закону Ома для схеми на рис. 1.16,б:

$$i = i_S - i_G = i_S - G_i u. \quad (1.26)$$

Порівнюючи (1.25) і (1.26) одержимо зв'язок між параметрами елементів схем джерел:

$$\begin{cases} G_i = 1/R_i, & R_i = 1/G_i, \\ i_S = e/R_i, & e = i_S/G_i. \end{cases} \quad (1.27)$$

1.5.2 Перетворення послідовного з'єднання елементів

При послідовному з'єднанні n елементів струм i є загальним для всіх елементів, а напруга u на з'єднанні дорівнює сумі напруг, прикладених до елементів.

• *З'єднання опорів.* На рис.1.17 показано послідовне з'єднання опорів.

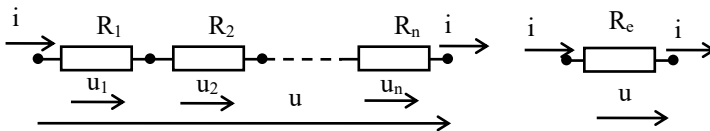


Рисунок 1.17

Для кола на рисунку по ЗКН за законом Ома можна записати:

$$u = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n R_k i = R_e i.$$

Таким чином, при послідовному з'єднанні еквівалентний опір дорівнює сумі опорів кола:

$$R_e = \sum_{k=1}^n R_k. \quad (1.28)$$

• *З'єднання індуктивностей.* На рис.1.18 показано послідовне з'єднання індуктивностей.

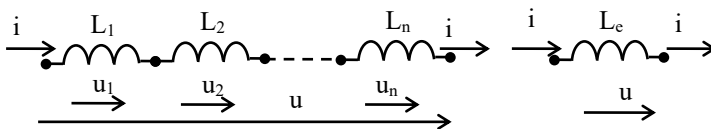


Рисунок 1.18

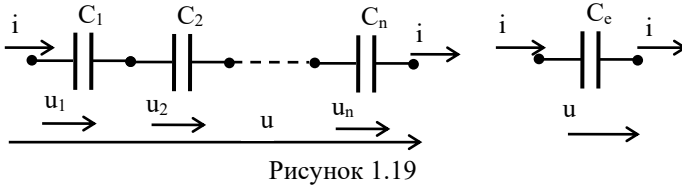
Для k-й індуктивності $u_k = L_k di/dt$, тому для кола на рисунку по ЗКН можна записати:

$$u = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n L_k \frac{di}{dt} = L_e \frac{di}{dt}.$$

Таким чином, при послідовному з'єднанні еквівалентна індуктивність дорівнює сумі індуктивностей кола:

$$L_e = \sum_{k=1}^n L_k . \quad (1.29)$$

• *З'єднання ємностей.* На рис.1.19 показано послідовне з'єднання ємностей.



Для k-й ємності $u_k = 1/C_k \int i dt$, тому для кола на рисунку за ЗКН можна записати:

$$u = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \int i dt = \frac{1}{C_e} \int i dt .$$

Еквівалентна ємність визначається за співвідношенням:

$$C_e = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}} . \quad (1.30)$$

Таким чином, при послідовному з'єднанні ємностей підсумуються величини, зворотні ємності елементів кола.

1.5.3 Перетворення паралельного з'єднання елементів

При паралельному з'єднанні напруга u на всіх елементах однакова, а струм i , що входить в коло, дорівнює току елементів.

• *З'єднання провідностей.* На рис. 1.20 показано паралельне з'єднання провідностей.

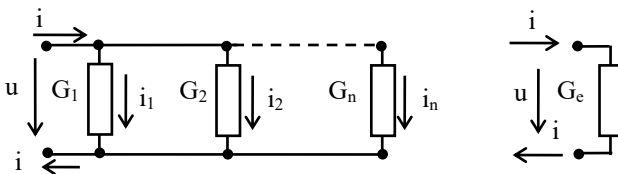


Рисунок 1.20

Для кола на рисунку по ЗКС та за законом Ома можна записати:

$$i = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n G_k u = G_e u .$$

Таким чином, при паралельному з'єднанні еквівалентна провідність дорівнює сумі провідностей кола:

$$G_e = \sum_{k=1}^n G_k . \quad (1.31)$$

Через опори ця формула запишеться як

$$R_e = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}} . \quad (1.32)$$

• *З'єднання індуктивностей.* На рис. 1.21 показано паралельне з'єднання індуктивностей.

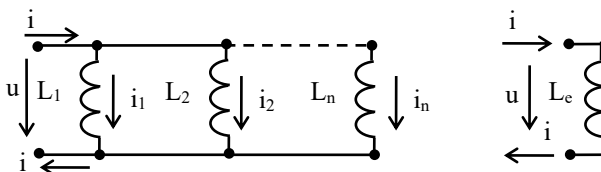


Рисунок 1.21

Для k -й індуктивності $i_k = 1/L_k \int u dt$, тому для кола на рисунку по ЗКС можна записати:

$$i = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \int u dt = \frac{1}{L_e} \int u dt .$$

Еквівалентна індуктивність визначається по співвідношенню:

$$L_e = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}} . \quad (1.33)$$

Таким чином, при паралельному з'єднанні індуктивностей підсумуються величини, зворотні індуктивності елементів кола.

• З'єднання ємностей. На рис. 1.22 показано паралельне з'єднання ємностей.

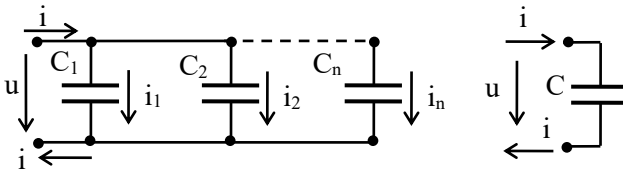


Рисунок 1.22

Для k -й ємності $i_k = C_k du/dt$, тому для кола на рисунку по ЗКС можна записати:

$$i = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n C_k \frac{du}{dt} = C_e \frac{du}{dt} .$$

Таким чином, при послідовному з'єднанні еквівалентна ємність дорівнює сумі ємностей кола:

$$C_e = \sum_{k=1}^n C_k . \quad (1.34)$$

Одержані формули з'єднань можуть застосовуватися при розрахунках послідовно–паралельного з'єднання однотипних елементів.

Приклад 1.1. Визначити еквівалентні параметри кіл на рис. 1.23.

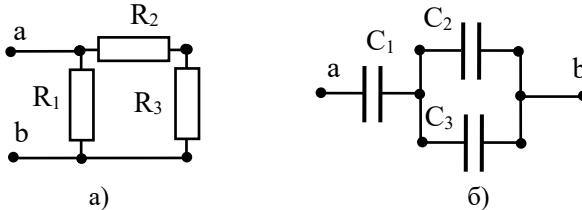


Рисунок 1.23

Для схеми на рис. 1.23,а: $R_{23} = R_2 + R_3$; $G_{123} = 1/R_1 + 1/R_{23}$. Звідси еквівалентний опір запишеться як

$$R_{ab} = 1/G_{123} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}}.$$

Для схеми на рис. 1.23,б: $C_{23} = C_2 + C_3$; $1/C_{123} = 1/C_1 + 1/C_{23}$. Звідси еквівалентна ємність запишеться як

$$C_{ab} = 1/C_{123} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3}}.$$

1.6 ОСНОВНІ ЗАВДАННЯ ТЕОРІЇ КІЛ

Основними завданнями є моделювання, аналіз і синтез електричного кола.

Моделювання полягає в побудові математичних моделей елементів і кіл.

Аналіз електричного кола полягає в знаходженні струмів і напруг у його пасивних елементах шляхом розв'язку рівнянь математичної моделі кола при заданих значеннях струму і напруги від активних елементів – джерел.

Синтез полягає у визначенні структури кола і значень параметрів його елементів, що задовольняють вимогам технічного завдання на проектування.

Розрізняють аналіз за *постійним струмом* і аналіз за *змінним струмом*.

Ціль аналізу за постійним струмом полягає в розрахунках значень струмів і напруг у колі, порушуваних джерелами постійного струму і напруги.

При аналізі за постійним струмом з кола слід вилучити ємності і індуктивності, тому що ємність для постійного струму являє собою розрив кола (холостий хід - ХХ), а індуктивність – коротке замикання (КЗ). В результаті коло буде перетворено у так зване *резистивне коло*, що складається з опорів і джерел струму та напруги.

Аналіз за змінним струмом містить у собі два різновиди:

- *часовий аналіз або аналіз у часовій області*, метою якого є розрахунки миттєвих значень струмів і напруг, порушуваних у колі джерелом сигналу, що змінюється в часі за заданим законом;

- *частотний аналіз або аналіз у частотній області*, метою якого є розрахунки гармонійних залежностей струмів і напруг, порушуваних у колі джерелом сигналу, що змінюється в часі за гармонійним законом.

Часовий аналіз характеризується двома режимами роботи електричного кола - *перехідним* і *стаціонарним*.

Перехідний режим виникає в колі при переході від одного стаціонарного стану до іншого і характеризується вільними коливаннями. Перехідні режими виникають, наприклад, при підключенні і відключенні джерел струму і напруги, при стрибкоподібній зміні рівня вхідного сигналу, при перемиканнях всередині кола. Після закінчення перехідного процесу в колі встановлюється стаціонарний режим, що характеризується періодичним повторенням миттєвих значень струмів і напруг на елементах кола.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дайте означення електричного кола, електричного елемента, електричної схеми.

2. Які моделі електричних елементів використовуються в теорії електричних кіл залежно від довжини хвилі коливань?
3. Сформулювати принцип суперпозиції. Для яких кіл він виконується?
4. Дайте означення електричного струму, електричної напруги, потужності та енергії і назвіть одиниці їх вимірювання.
5. Запишіть формули, що описують взаємозв'язок між миттєвими значеннями струмів і напруг для опору, ємності, індуктивності.
6. Запишіть формули для визначення миттєвої потужності і енергії для опору, ємності, індуктивності.
7. Зобразити вольт - ампері характеристики ідеальних і реальних джерел напруги і струму.
8. Сформулюйте і пояснить на прикладах закони Кірхгофа.
9. Дайте означення графа і його елементів: гілки, вузла, контуру.
10. Дайте означення дереву графа, ребру та хорді дерева.
11. Скільки незалежних рівнянь можна скласти за першим та другим законами Кірхгофа.
12. Поясніть еквівалентну заміну реального джерела ЕРС джерелом струму і навпаки.
13. Поясніть еквівалентне перетворення послідовного з'єднання опору, ємності і індуктивності.
14. Поясніть еквівалентне перетворення паралельного з'єднання опору, ємності і індуктивності
15. Сформулюйте основні завдання теорії кіл.

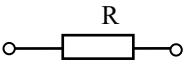
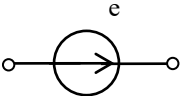
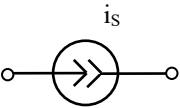
2 АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ РЕЗИСТИВНИХ КІЛ

Лінійні резистивні кола складаються з резистивних елементів джерел напруги і струму. Резистивні елементи представляються опором R або провідністю G . У загальному випадку ціль аналізу резистивних кіл полягає в розрахунках миттєвих значень струмів і напруг, створюваних на елементах кола джерелами струму і напруги змінних у часі. Якщо струм і напруга джерел не змінюються в часі, то виникає завдання аналізу електричного кола за постійним струмом. Для постійного струму ємність являє собою розрив кола, а індуктивність – коротке замикання. Тому в результаті виключення з електричного кола ємнісних і індуктивних елементів він перетвориться при аналізі за постійним струмом в резистивне коло.

2.1 ЕЛЕМЕНТНА БАЗА МОДЕЛЮВАННЯ ЛІНІЙНИХ РЕЗИСТИВНИХ КІЛ

Елементною базою лінійних резистивних кіл є опори і джерела струму та напруги. Елементна база і компонентні рівняння представлено в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1 – Елементна база лінійних резистивних кіл

Елемент	Умовна позначка	Компонентні рівняння
Опір		$u = R i,$ $i = G u.$
Джерело напруги		$e(t) - \text{var},$ $E - \text{const.}$
Джерело струму		$i_S(t) - \text{var},$ $I_S - \text{const.}$

Топологічні рівняння лінійних резистивних кіл складаються за законами Кірхгофа для струму і напруги. Внаслідок лінійності компонентних і топологічних рівнянь математичною моделлю лінійних резистивних кіл служать системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Для аналізу лінійних резистивних кіл у випадку простих кіл використовуються методи, що дозволяють одержати розв'язок у явному виді, у загальному випадку застосовуються матричні методи розрахунків, орієнтовані на чисельні методи із застосуванням комп'ютерів.

2.2 АНАЛІЗ НАЙПРОСТІШИХ РЕЗИСТИВНИХ КІЛ

До найпростіших кіл прийнято відносити кола, математична модель яких містить не більш двох рівнянь.

Приклад 2.1. Дільник напруги. На рис. 2.1 наведена схема резистивного дільника напруги. Дільник напруги – це коло, що дозволяє зменшити вхідну напругу від джерела в задане число раз. Дільник характеризується коефіцієнтом передавання по напрузі у вигляді відношення напруг на вході і виході:

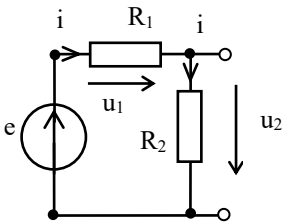


Рисунок 2.1

$$K = \frac{u_2}{e}.$$

Струм i в розглянутому колі загальний для всіх елементів. Тому рівняння кола за ЗКН і законом Ома запишеться у вигляді:

$$e = u_1 + u_2 = R_1 i + R_2 i.$$

Звідси для вихідної напруги одержимо:

$$u_2 = R_2 i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e. \quad (2.1)$$

Таким чином, коефіцієнт передавання по напрузі визначається у вигляді:

$$K = \frac{u_2}{e} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2.2)$$

З (2.2) випливає, якщо напруга джерела міняється в часі за законом $e(t)$, то точно по такому ж закону буде змінюватися зменшена в K раз вихідна напруга.

Приклад 2.2. Виконати аналіз схеми на рис. 2.2,а.

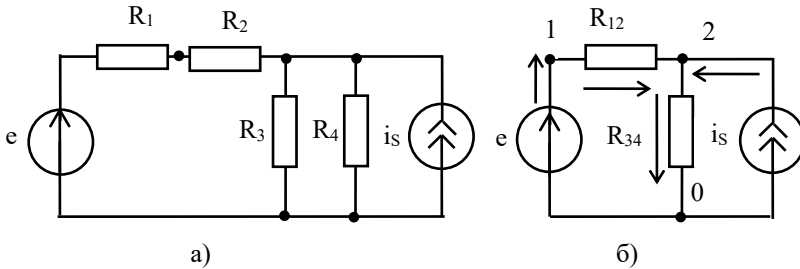


Рисунок 2.2

За формулами (1.28), (1.32) для з'єднань опорів спростимо схему і представимо її на рис. 2.2,б, де $R_{12} = R_1 + R_2$, $R_{34} = R_3 R_4 / (R_3 + R_4)$.

Запишемо рівняння за ЗКС для вузлів і за ЗКН для контуру схеми:

$$\begin{cases} i_e - i_{12} = 0, \\ i_{12} - i_{34} + i_s = 0; \\ u_{12} + u_{34} = e. \end{cases}$$

За законом Ома $u_{12} = R_{12}i_{12}$, $u_{34} = R_{34}i_{34}$. Врахуємо ці співвідношення і складемо систему рівнянь щодо струмів:

$$\begin{cases} i_{12} - i_{34} = -i_s, \\ R_{12}i_{12} + R_{34}i_{34} = e. \end{cases}$$

Запишемо цю систему рівнянь у матричному виді:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ R_{12} & R_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{12} \\ i_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_S \\ e \end{bmatrix}.$$

Розв'язок системи виконаємо за допомогою методу Крамера. Знайдемо визначник системи:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ R_{12} & R_{34} \end{vmatrix} = R_{34} + R_{12}.$$

Визначимо шукані струми:

$$i_{12} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} -i_S & -1 \\ e & R_{34} \end{vmatrix} = \frac{e - R_{34}i_S}{R_{34} + R_{12}},$$

$$i_{34} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & -i_S \\ R_{12} & e \end{vmatrix} = \frac{e + R_{12}i_S}{R_{34} + R_{12}}.$$

За законом Ома знайдемо струми і напруги на пасивних елементах кола:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_{12}, u_2 = R_2 i_{12}, \\ u_{34} &= R_{34} i_{34}, i_3 = u_{34}/R_3, i_4 = u_{34}/R_4. \end{aligned}$$

2.3 МАТРИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ РЕЗИСТИВНИХ КІЛ

Для аналізу складних розгалужених лінійних кіл застосовуються матричні методи, що дозволяють алгоритмізувати процес складання і розв'язку рівнянь математичної моделі досліджуваного кола. Основними матричними методами аналізу кіл є метод контурних струмів і метод вузлових потенціалів.

2.3.1 Метод контурних струмів

Метод контурних струмів заснований на використанні другого закону Кірхгофа (ЗКН). Число незалежних рівнянь $N_{МКС}$, що складаються за цим методом, відповідно до (1.24) рівно:

$$N_{МКС} = N_{\Gamma} - (N_B - 1),$$

де N_f – число гілок,

N_v - число вузлів графа схеми.

Припустимими елементами в методі контурних струмів є опори і джерела напруги. Тому для застосування цього методу джерела струму перетворюються в джерела напруги, а провідності представляються опорами.

Для складання системи рівнянь будується граф схеми і визначається дерево графа. При підключенні хорди до дерева утворюється незалежний контур, по якому за ЗКН складається відповідне до контуру незалежне рівняння.

Шуканими змінними є контурні струми – струми, що течуть уздовж контурів. Відомі величини – ЕРС джерел напруги.

Приклад 2.3. Скласти систему рівнянь за методом контурних струмів для схеми на рис. 2.3.

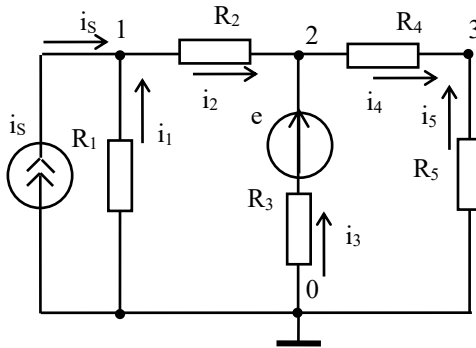


Рисунок 2.3

Для застосування метода контурних струмів перетворимо на підставі (1.27) джерело струму в джерело напруги з ЕРС, рівної $e_s = R_1 i_s$.

Перетворена схема наведена на рис. 2.4,а. На рис. 2.4,б побудований граф схеми, на графові товстими лініями відзначені гілки обраного дерева, тонкими лініями відзначено дві хорди. Кожній хорді відповідає незалежний контур, показаний на рисунку пунктирною лінією. Напрямок обходу контурів і напрямок контурних струмів I_1 і I_2 взятий за годинниковою стрілкою.

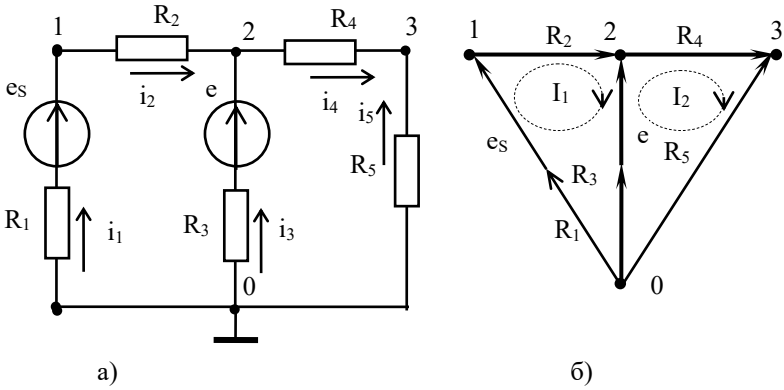


Рисунок 2.4

за ЗКН складемо рівняння для контурів:

$$\text{контур 1} \quad u_1 + u_2 - u_3 = e_S - e,$$

$$\text{контур 2} \quad u_3 + u_4 - u_5 = e.$$

За законом Ома виразимо напруги через струми гілок:

$$\begin{cases} R_1 i_1 + R_2 i_2 - R_3 i_3 = e_S - e, \\ R_3 i_3 + R_4 i_4 - R_5 i_5 = e. \end{cases} \quad (2.3)$$

За графом струми гілок запишемо через контурні струми:

$$i_1 = I_1, \quad i_2 = I_1, \quad i_3 = -I_1 + I_2, \quad i_4 = I_2, \quad i_5 = -I_2. \quad (2.4)$$

Підставимо (2.4) в (2.3) і згрупуємо коефіцієнти при однакових контурних струмах. В результаті одержимо систему рівнянь для контурних струмів:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3) I_1 - R_3 I_2 = e_S - e, \\ -R_3 I_1 + (R_3 + R_4 + R_5) I_2 = e. \end{cases}$$

В матричному виді система запишеться наступним чином:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_S - e \\ e \end{bmatrix}.$$

або

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}.$$

В загальному випадку для схеми з n незалежними контурами матричне рівняння в методі контурних струмів запишеться у вигляді:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \cdot \\ E_n \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Тут R_{kk} – власний опір k -го контуру, рівний сумі опорів, вхідних у цей контур;

$R_{ik} = R_{ki}$ – взаємний опір між i -м і k -м контурами, взятий зі знаком мінус, якщо контурні струми в загальній гілці протікають зустрічно, або зі знаком плюс у випадку однакового напрямку контурних струмів;

E_k – контурна ЕРС k -го контуру, рівна алгебраїчній сумі ЕРС джерел напруги цього контуру, ЕРС джерела береться зі знаком плюс при збігу напрямку гілки джерела з напрямком обходу контуру, при розбіжності – зі знаком мінус.

В короткій формі рівняння (2.5) можна представити у вигляді:

$$R \cdot I = E, \quad (2.6)$$

де R - матриця контурних опорів,

I – вектор контурних струмів,

E – вектор контурних ЕРС.

Розв'язок цього рівняння можна виразити через зворотну матрицю:

$$I = R^{-1}E.$$

● *Алгоритм методу контурних струмів.* Аналіз схеми методом контурних струмів містить у собі наступну послідовність операцій:

- перетворимо джерела струму в джерела напруги, заміняємо провідності опорами;

- будуємо граф схеми, за графом вибираємо дерево, до дерева підключаємо хорди, задаємося напрямком обходу в незалежних контурах, що утворювалися, напрямок контурних струмів беремо співпадаючим з напрямком обходу контурів;

- для системи незалежних контурів становимо матрицю контурних опорів, в клітки головної діагоналі матриці поміщаємо власні опори контурів, в клітки поза головною діагоналлю поміщаємо взаємні опори контурів;

- заповнюємо клітки вектора контурних ЕРС;

- вирішуємо отримане матричне рівняння;

- виражаємо струми гілок через контурні струми;

- по струмах гілок визначаємо за законом Ома діючу на них напругу.

Достоїнствами методу контурних струмів є невисока розмірність системи рівнянь математичної моделі кола і регулярна структура матриці контурних опорів. До недоліку методу слід віднести необхідність побудови дерева графа для визначення системи незалежних рівнянь.

2.3.2 Метод вузлових потенціалів

Метод вузлових потенціалів засновано на використанні першого закону Кірхгофа (ЗКС). Число незалежних рівнянь $N_{\text{МВП}}$, що складаються за цим методом, відповідно до (1.23) дорівнює числу вузлів $N_{\text{в}}$ без одиниці:

$$N_{\text{МВП}} = N_{\text{в}} - 1.$$

Припустимими елементами в методі вузлових потенціалів є провідності і джерела струму. Тому для застосування методу джерела напруги перетворюються в джерела струму, а опори представляються провідностями.

Для складання системи рівнянь будується граф схеми, нумеруються його вузли, починаючи з нуля. Нульовий номер присвоюється у вузол, до якого приєднано найбільше число гілок.

Шуканими змінними в методі є потенціали вузлів. Потенціал нульового вузла ухвалюється рівним нулю. Відомі змінні – струми джерел.

Приклад 2.4. Скласти систему рівнянь за методом вузлових потенціалів для схеми на рис. 2.3.

Для застосування методу вузлових потенціалів перетворимо на підставі (1.27) джерело напруги в джерело струму, по величині рівний $i_e = e/R_3$. Опори замінимо провідностями: $G_k = 1/R_k$. Перетворена схема і її граф представлені на рис. 2.5.

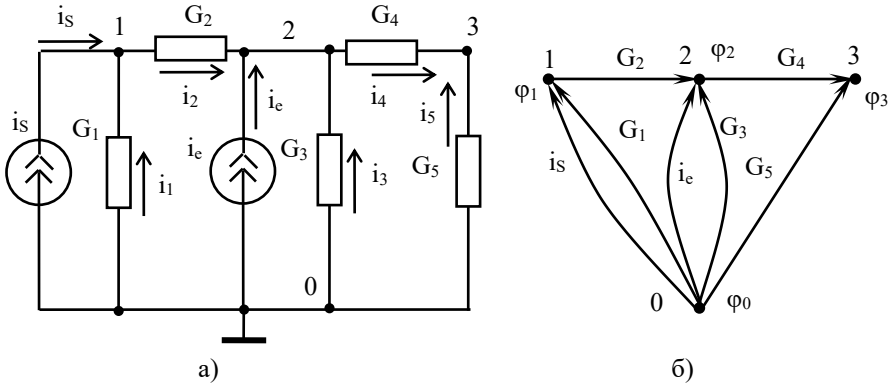


Рисунок 2.5

За графом складемо систему рівнянь по ЗКС:

$$\begin{cases} i_s + i_1 - i_2 = 0, \\ i_2 + i_e + i_3 - i_4 = 0, \\ i_4 + i_5 = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Виражаємо струми гілок через напруги, струми джерел переносимо в праву частину:

$$\begin{cases} G_1 u_1 - G_2 u_2 = -i_s, \\ G_2 u_2 + G_3 u_3 - G_4 u_4 = -i_e, \\ G_4 u_4 + G_5 u_5 = 0. \end{cases}$$

Від напруг на гілках графа переходимо до потенціалів:

$$\begin{cases} G_1(\varphi_0 - \varphi_1) - G_2(\varphi_1 - \varphi_2) = -i_s, \\ G_2(\varphi_1 - \varphi_2) + G_3(\varphi_0 - \varphi_2) - G_4(\varphi_2 - \varphi_3) = -i_e, \\ G_4(\varphi_2 - \varphi_3) + G_5(\varphi_0 - \varphi_3) = 0. \end{cases}$$

Групуємо коефіцієнти при однакових потенціалах і враховуємо, що $\varphi_0 = 0$. В результаті одержуємо систему вузлових рівнянь:

$$\begin{cases} (G_1 + G_2)\varphi_1 - G_2\varphi_2 = i_s, \\ -G_2\varphi_1 + (G_2 + G_3 + G_4)\varphi_2 - G_4\varphi_3 = i_e, \\ -G_4\varphi_2 + (G_4 + G_5)\varphi_3 = 0. \end{cases}$$

В матричній формі ця система рівнянь запишеться у вигляді:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 & -G_4 \\ 0 & -G_4 & G_4 + G_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_s \\ i_e \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

або

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & 0 \\ -G_{12} & G_{22} & -G_{23} \\ 0 & -G_{23} & G_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_s \\ i_e \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В загальному випадку для схеми з n незалежними вузлами матричне рівняння в методі вузлових потенціалів запишеться у вигляді:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & \dots & -G_{1n} \\ -G_{21} & G_{22} & \dots & -G_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -G_{n1} & -G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \cdot \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ I_n \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Тут G_{kk} – власна провідність k -го вузла, рівна сумі провідностей усіх гілок, приєднаних до цього вузла;

$G_{ik}=G_{ki}$ – взаємна провідність між i -м і k -м вузлами, рівна сумі провідностей гілок, що з'єднують ці вузли;

I_k – вузловий струм k -го вузла, дорівнює алгебраїчній сумі струмів джерел, приєднаних до цього вузла, струм джерела, що входить у вузол, береться зі знаком плюс, що виходить зі знаком мінус.

В короткій формі рівняння (2.9) можна представити у вигляді:

$$G \cdot \Phi = I. \quad (2.10)$$

G – матриця вузлових провідностей,

Φ – вектор вузлових потенціалів,

I – вектор вузлових струмів.

Розв'язок цього рівняння можна виразити через зворотну матрицю:

$$\Phi = G^{-1}I. \quad (2.11)$$

• *Алгоритм методу вузлових потенціалів.* Аналіз схеми методом вузлових потенціалів містить у собі наступну послідовність операцій:

- перетворимо джерела напруги в джерела струму, заміняємо опори провідностями;

- будуємо граф схеми, нумеруємо вузли графа, починаючи з нуля, одержуємо систему незалежних вузлів, що включає всі вузли графа крім нульового;

- для незалежних вузлів формуємо матрицю вузлових провідностей, в клітці головної діагоналі матриці поміщаємо власні провідності вузлів, в клітці поза головною діагоналлю поміщаємо взаємні провідності вузлів, взяті зі знаком мінус;

- заповнюємо клітку вектора вузлових провідностей;

- вирішуємо отримане матричне рівняння;

- виражаємо напруги гілок через вузлові потенціали;

- по напрузі гілок визначаємо за законом Ома струми, що протікають у них.

Достоїнствами методу вузлових потенціалів є мала розмірність системи рівнянь математичної моделі кола, регулярна структура матриці вузлових провідностей і відсутність, у порівнянні з методом

контурних струмів, операцій по побудові дерева графа для визначення системи незалежних рівнянь.

2.3.3 Метод вузлових потенціалів на основі матриці з'єднань

Процес складання рівнянь метода вузлових потенціалів може бути повністю формалізований за допомогою матриці з'єднань (матриці інцидентності), позначуваної символом A . Число рядків матриці A дорівнює числу незалежних вузлів, число стовпців – числу гілок графа. Рядки заповнюються плюс - мінус одиницями і нулями. Плюс одиниця записується, якщо гілка виходить із вузла. Якщо гілка входить у вузол, то ставиться мінус одиниця. Нуль записується при відсутності зв'язку гілки з вузлом.

При формуванні матриці A , вона представляється у вигляді двох підматриць A_B і A_S . Підматриця A_B складається щодо пасивних гілок, підматриця A_S – щодо гілок – джерел струму. У результаті матрична система рівнянь, що складається по ЗКС із використанням матриці з'єднань, запишеться у вигляді:

$$A \cdot I = \begin{bmatrix} A_B & A_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_B \\ I_S \end{bmatrix} = A_B I_B + A_S I_S = 0 \quad (2.12)$$

або

$$A_B I_B = -A_S I_S, \quad (2.13)$$

де I_B - вектор струмів пасивних гілок,

I_S - вектор струмів джерел.

Стовпці матриці A_B показують, між якими вузлами включені гілки, причому плюс одиниця відзначає вузол з більшим потенціалом (із цього вузла гілка виходить), а мінус одиниця – вузол з меншим потенціалом (в цей вузол гілка входить). Отже, транспонована матриця A_B буде визначати зв'язок напруг гілок з потенціалами вузлів:

$$U_B = A_B^T \Phi, \quad (2.14)$$

де T – знак транспонування матриці,

U_B – вектор напруг гілок,

Φ – вектор вузлових потенціалів.

Струми пасивних гілок пов'язані з напругами законом Ома:

$$I_B = G_B U_B, \quad (2.15)$$

де G_B – діагональна матриця, складена із провідностей гілок.

Підставляючи в (2.13) співвідношення (2.14), (2.15), одержимо матричне рівняння для метода вузлових потенціалів:

$$A_B G_B A_B^T \Phi = -A_S I_S. \quad (2.16)$$

Тут $A_B G_B A_B^T = G$ - матриця вузлових провідностей;

$-A_S I_S = I$ - вектор вузлових струмів.

Приклад 2.5. Скласти матричним методом систему вузлових рівнянь для схеми на рис. 2.5,а.

Для графа схеми на рис. 2.5,б матриця з'єднань буде мати такий вигляд:

$$A = [A_B | A_S] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & | & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & | & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

З урахуванням матриці з'єднань графа, рівняння схеми, що відповідають ЗКС, запишуться в такий спосіб:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & | & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & | & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ - \\ i_S \\ i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_1 + i_2 \\ -i_3 - i_4 + i_5 \\ -i_4 - i_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -i_S \\ -i_e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

На підставі (2.14) записується зв'язок між напругами гілок і вузловими потенціалами:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi_1 \\ \varphi_1 - \varphi_2 \\ -\varphi_2 \\ \varphi_2 - \varphi_3 \\ -\varphi_3 \end{bmatrix}.$$

Отримане співвідношення відповідає розподілу напруг і потенціалів на графові на рис. 2.5,б.

Діагональна матриця провідностей в (2.15) прийме наступний вид:

$$G_B = \text{diag}(G_1, G_2, G_3, G_4, G_5).$$

Підставляючи отримані співвідношення в (2.16), одержимо:

$$\begin{aligned} G = A_B G_B A_B^T &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \text{diag}(G_1, \dots, G_5) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_4 & -G_4 \\ 0 & -G_4 & G_4 + G_5 \end{bmatrix}, \\ I = -A_S I_S &= - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_S \\ i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_S \\ i_e \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Відзначимо, що отримані співвідношення повністю збігаються зі співвідношенням (2.8).

• Варто зазначити, що алгоритми на основі розглянутого методу формування вузлових рівнянь реалізовані в більшості систем автоматизованого проектування електронних схем.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Подання ємності та індуктивності для постійного струму.
2. Елементна база аналізу резистивних кіл.

3. Складіть формулу для розрахунку коефіцієнта передачі дільника напруги.
4. Поясніть метод Крамера рішення алгебраїчних рівнянь.
5. Число незалежних рівнянь в методі контурних струмів.
6. Допустимі і заборонені елементи в методі контурних струмів.
7. Структура матриці контурних струмів і вектора контурних ЕРС.
8. Поясніть алгоритм метода контурних струмів.
9. Число незалежних рівнянь в методі вузлових потенціалів.
10. Допустимі і заборонені елементи в методі вузлових потенціалів.
11. Структура матриці вузлових провідностей і вектора вузлових струмів.
12. Поясніть алгоритм метода вузлових потенціалів.
13. Пояснити правило складання матриці з'єднань і формування на її основі рівнянь за першим законом Кірхгофа.
14. Поясніть застосування матриці з'єднань при визначенні зв'язку між напругами і потенціалами на елементах кола.
15. Запишіть формулу для матричного рівняння, яке складається в методі вузлових потенціалів за допомогою матриці з'єднань.

3 АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ КІЛ ВЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ

Метою аналізу лінійних кіл у частотній області є розрахунки струмів і напруг на елементах кола в стаціонарному режимі при вхідному впливі у вигляді гармонійного сигналу певної частоти.

3.1 ГАРМОНІЙНИЙ СИГНАЛ І ЙОГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

Гармонійний сигнал – це коливання, яке змінюється в часі по функції косинуса або синуса:

$$\begin{cases} a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi), \\ a(t) = A_m \sin(\omega t + \varphi). \end{cases} \quad (3.1)$$

Графік гармонійного сигналу представлено на рис. 3.1.

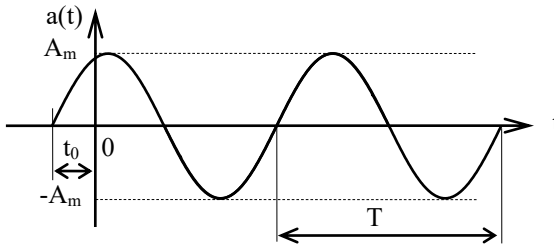


Рисунок 3.1

В формулах (3.1) і на рис. 3.1:

A_m - амплітуда коливання;

$\psi(t)=\omega t+\varphi$ – миттєве значення фази коливання, рад;

$\varphi=\omega t_0$ - початкова фаза коливання (фаза при $t=0$), рад;

$\omega=2\pi f$ - кутова частота, рад/с;

f – частота, Гц= $1/c$;

$T=1/f$ - період коливань, с.

Миттєві значення $a(t)$ гармонійного сигналу задовольняють умові періодичності: $a(t) = a(t + nT), n = 1, 2, 3, \dots$

При аналізі кіл гармонійний струм і напругу прийнято представляти функцією косинуса:

$$\begin{cases} i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i), \\ u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u). \end{cases} \quad (3.2)$$

• *Основні інтегральні характеристики гармонійних електричних коливань.*

- *Миттєва потужність* – це добуток миттєвих значень струму і напруги:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \cdot I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t)]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Миттєва потужність змінюється з подвоєною частотою з амплітудою $U_m I_m / 2$ навколо середнього значення $\cos(\varphi_u - \varphi_i)$.

- *Середня за період потужність* – це усереднена за період миттєва потужність:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t)i(t) dt = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i). \quad (3.4)$$

Тут $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ може мінятися в інтервалі від $-\pi/2$ до $\pi/2$.

- *Діючі значення.* Діюче значення струму визначається по формулі:

$$I_d = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (3.5)$$

Аналогічно визначається діюче значення для напруги:

$$U_d = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Добуток діючих значень струму і напруги дорівнює максимальному значенню $U_m I_m / 2$ середньої потужності за період.

3.2 МЕТОД КОМПЛЕКСНИХ АМПЛІТУД

Метод комплексних амплітуд призначений для аналізу стаціонарного режиму в лінійних колах при гармонійному вхідному впливі. Метод засновано на представленні гармонійних функцій (3.1) комплексною експонентною функцією і використанні алгебри комплексних чисел.

Комплексне число позначається зверху точкою і складається з реальної і уявної частин:

$$\dot{a} = a' + j a'' , \quad (3.6)$$

де $a' = \operatorname{Re}(\dot{a})$ - реальна частина,

$a'' = \operatorname{Im}(\dot{a})$ - уявна частина,

$j = \sqrt{-1}$ - уявна одиниця.

Формула (3.6) відповідає алгебраїчній формі запису комплексного числа.

На рис. 3.2 показано відображення комплексного числа у вигляді вектора, побудованого на комплексній площині, де дійсна вісь позначена +1, уявна +j.

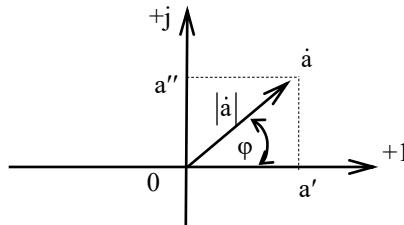


Рисунок 3.2

З рисунка випливає:

$a = |\dot{a}| = \sqrt{a'^2 + a''^2}$ - модуль комплексного числа;

$a' = \operatorname{Re}(\dot{a}) = a \cos(\varphi)$ - реальна частина комплексного числа;

$a'' = \operatorname{Im}(\dot{a}) = a \sin(\varphi)$ - уявна частина комплексного числа.

На основі цих співвідношень алгебраїчний запис (3.6) комплексного числа можна представити в тригонометричній формі:

$$\dot{a} = a \cos(\varphi) + j a \sin(\varphi). \quad (3.7)$$

Якщо застосувати формулу Ейлера:

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi), \quad (3.8)$$

то комплексне число можна записати в показовій формі:

$$\dot{a} = a \cdot e^{j\varphi}, \quad (3.9)$$

де $\varphi = \arctg(a''/a')$ - фаза (аргумент) комплексного числа.

Із (3.8) випливають співвідношення для кутів, що визначають напрямки координатних вісей на рис. 3.2:

$$e^{j0} = 1, e^{j\pi} = -1, e^{j\frac{\pi}{2}} = j, e^{j\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -j. \quad (3.10)$$

Комплексному числу (3.6) відповідає *сполучене комплексне число*, що відрізняється від нього знаком при уявній частині:

$$\dot{a}^* = a' - j a'' = a \cos(\varphi) - j a \sin(\varphi) = a e^{-j\varphi}, \quad (3.11)$$

де * - символ комплексного сполучення.

Комбінація комплексного і сполученого чисел дозволяє визначити реальну і уявну частини комплексного числа:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\dot{a}) = (\dot{a} + \dot{a}^*)/2, \\ \operatorname{Im}(\dot{a}) = (\dot{a} - \dot{a}^*)/2j. \end{cases} \quad (3.12)$$

Добуток комплексного числа на сполучене число дає квадрат модуля комплексного числа:

$$\dot{a} \cdot \dot{a}^* = a'^2 + a''^2 = a^2. \quad (3.13)$$

Гармонійні коливання (3.1) у комплексній формі представляються співвідношенням (3.9):

$$\dot{a} = A_m e^{j(\omega t + \varphi)} = A_m \cos(\omega t + \varphi) + j A_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.14)$$

Реальна і уявна частини в цій формулі відповідають гармонійним коливанням (3.1):

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\dot{a}) = A_m \cos(\omega t + \varphi), \\ \operatorname{Im}(\dot{a}) = A_m \sin(\omega t + \varphi). \end{cases} \quad (3.15)$$

При впливі на лінійне коло гармонійним коливанням (3.1) струм і напруга в колі будуть мінятися за аналогічним законом. Відбудеться зміна тільки амплітуд і початкових фаз, частота коливань не зміниться. Тому доцільно представити амплітуду A_m і початкову фазу φ гармонійного коливання одним комплексним числом:

$$\dot{A}_m = A_m e^{j\varphi}. \quad (3.16)$$

Це число називається *комплексною амплітудою гармонійного коливання*.

На комплексній площині комплексна амплітуда \dot{A}_m представляється вектором, аналогічно зображенню вектора \dot{a} на рис.

3.2. Множення комплексної амплітуди \dot{A}_m на множник $e^{j\omega t}$ на комплексній площині відображається при росту часу обертанням вектора \dot{A}_m проти годинникової стрілки зі швидкістю ω . Проекція обертового вектора на реальну вісь визначає гармонійне коливання, що міняються в часі за законом косинуса, а проекція на уявну вісь - за законом синуса.

У таблиці 1 наведені основні властивості комплексного перетворення.

Таблиця 3.1 – Властивості комплексного перетворення

Часова область $a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$	Частотна область $\dot{a} = \dot{A}_m e^{j\omega t} = (A_m e^{j\varphi}) e^{j\omega t}$
$k a(t)$	$k \dot{a}$
$k_1 a_1(t) \pm \dots \pm k_n a_n(t)$	$k_1 \dot{a}_1 \pm \dots \pm k_n \dot{a}_n$

$\frac{da(t)}{dt} = \omega A_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{d\dot{a}}{dt} = j\omega \dot{A}_m e^{j\omega t}$
$\int a(t) dt = \frac{A_m}{\omega} \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$	$\int \dot{a} dt = \frac{\dot{A}_m}{j\omega} e^{j\omega t}$

З таблиці випливає, що при диференціюванні амплітуда гармонійного коливання множиться на ω , а його фаза збільшується на $\pi/2$. Для комплексного коливання результат диференціювання представляється множителем $j\omega = e^{j\pi/2}\omega$. При інтегруванні амплітуда гармонійного коливання ділиться на ω , а його фаза зменшується на $\pi/2$. Для комплексного коливання результат інтегрування представляється множителем $1/j\omega = -j/\omega = e^{-j\pi/2}/\omega$.

Таким чином, позначивши символом \div знак взаємної відповідності операцій, можна записати:

$$\begin{cases} d/dt \div j\omega, \\ \int dt \div 1/j\omega. \end{cases} \quad (3.17)$$

Гармонійний сигнал від джерела напруги може бути представлений на підставі (3.12) у вигляді:

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_E) = \frac{1}{2} \left(\dot{E}_m e^{j\omega t} + \dot{E}_m^* e^{-j\omega t} \right), \quad (3.18)$$

де $\dot{E}_m = E_m e^{j\varphi_E}$ - комплексна амплітуда ЕДС джерела.

Реакція лінійного кола на суму двох коливань в (3.18) дорівнює сумі реакцій від кожного коливання окремо. Тому що сполучене коливання відрізняється від вихідного коливання тільки знаком при уявної одиниці, те досить провести однократний аналіз кола при вхідному сигналі з комплексною амплітудою \dot{E}_m .

Перехід від комплексних напруг $\dot{U}_m e^{j\omega t}$ і струмів $\dot{I}_m e^{j\omega t}$ в елементах кола, отриманих у результаті аналізу, до часових залежностей здійснюється узяттям реальної частини:

$$\begin{cases} u(t) = \operatorname{Re}\left(U_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t}\right) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u), \\ i(t) = \operatorname{Re}\left(I_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t}\right) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i). \end{cases} \quad (3.19)$$

Множник $e^{j\omega t}$ у вхідному впливі $\dot{E}_m e^{j\omega t}$ і реакціях $\dot{U}_m e^{j\omega t}$ і $\dot{I}_m e^{j\omega t}$ задає тільки обертання цих векторів із часом, при цьому довжина і взаємне положення векторів залишається незмінним і відповідним до фаз при $t=0$. *Отже, при частотному аналізі в якості змінних досить використовувати комплексні амплітуди гармонійних коливань струму і напруги.*

3.3 ЕЛЕМЕНТНА БАЗА ЧАСТОТНОГО АНАЛІЗУ

Моделі елементів для частотного аналізу наведено в таблиці 3.2. Таблиця містить моделі елементів для часової області і відповідні їм моделі для частотної області, що отримані в результаті застосування формул з таб. 3.1 і співвідношень (3.17). Рівняння моделей елементів для частотної області складені щодо комплексних амплітуд струму і напруги.

Як випливає із таблиці зв'язок між комплексними амплітудами струмів і напруг на елементах *лінійний, подібний закону Ома*.

• *Параметри реактивних елементів.* Параметрами в законі Ома для реактивних елементів C і L є *комплексні опори*:

$$\dot{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2}, \quad (3.20)$$

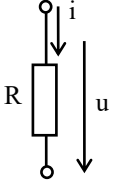
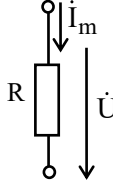
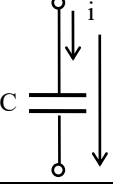
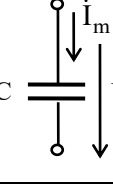
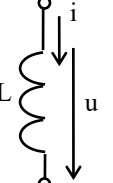
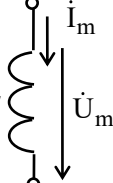
$$\dot{Z}_L = j\omega L = \omega L e^{j\pi/2}. \quad (3.21)$$

Змінним, зворотним комплексним опорам, відповідають *комплексні провідності*:

$$\dot{Y}_C = j\omega C = \omega C e^{j\pi/2}, \quad (3.22)$$

$$\dot{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{\omega L} e^{-j\pi/2}. \quad (3.23)$$

Таблиця 3.2 – Елементна база часового і частотного аналізу

Часова область $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$	Частотна область $\dot{i}(t) = \dot{I}_m e^{j\omega t} = (I_m e^{j\varphi_i}) e^{j\omega t}$
 $u = R i$ $i = u/R = G u$	 $\dot{U}_m = R \dot{I}_m$ $\dot{I}_m = \dot{U}_m / R = G \dot{U}_m$
 $u = \frac{1}{C} \int i dt$ $i = C \frac{du}{dt}$	 $\dot{U}_m = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m = \dot{Z}_C \dot{I}_m$ $\dot{I}_m = j\omega C \dot{U}_m = \dot{Y}_C \dot{U}_m$
 $u = L \frac{di}{dt}$ $i = \frac{1}{L} \int u dt$	 $\dot{U}_m = j\omega L \dot{I}_m = \dot{Z}_L \dot{I}_m$ $\dot{I}_m = \frac{1}{j\omega L} \dot{U}_m = \dot{Y}_L \dot{U}_m$

Модулі комплексних опорів ємності та індуктивності позначаються буквою X и називаються *реактивним опором*:

$$|\dot{Z}_C| = X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad |\dot{Z}_L| = X_L = \omega L. \quad (3.24)$$

Для модулів комплексних провідностей вводиться *реактивна провідність*, позначувана буквою B :

$$|\dot{Y}_C| = B_C = \omega C, \quad |\dot{Y}_L| = B_L = \frac{1}{\omega L}. \quad (3.25)$$

На рис. 3.3 наведені залежності від частоти реактивних опорів ємності і індуктивності.

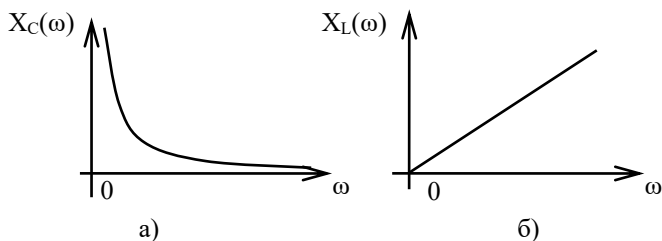


Рисунок 3.3

Для реактивних провідностей для залежності $B_C(\omega)$ відповідає графік на рис. 3.3,б, а для залежності $B_L(\omega)$ - графік на рис. 3.3,а.

• *Векторні діаграми елементів.*

- На опорі вектори комплексних амплітуд струму і напруги збігаються за напрямком, тому що $\varphi_i = \varphi_u$, довжина векторів відрізняється на величину опору R : $U_m = R I_m$.

- Вектор напруги на ємності відстає від вектора струму на кут $\pi/2$ ($\varphi_u = \varphi_i - \pi/2$), довжина векторів відрізняється на величину реактивного опору: $U_m = X_C I_m$.

- Вектор напруги на індуктивності випереджає вектор струму на кут $\pi/2$ ($\varphi_u = \varphi_i + \pi/2$), довжина векторів відрізняється на величину реактивного опору: $U_m = X_L I_m$.

На рис. 3.4 наведені векторні діаграми для опору (а), ємності (б), індуктивності (в).

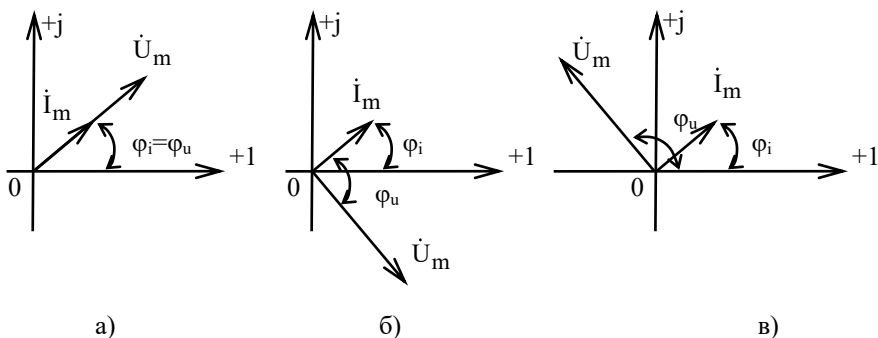


Рисунок 3.4

• *Миттєва і середня за період потужність R, C, L – елементів.*

- Миттєва потужність в опорі на підставі (3.2) рівна:

$$p(t) = u(t)i(t) = U_m I_m \cos(\omega t + \varphi_i)^2 = \frac{R I_m^2}{2} [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_i)]. \quad (3.26)$$

Миттєва потужність на опорі коливається навколо максимального значення з подвоєною частотою, ухвалюючи тільки позитивні значення.

Середня за період потужність на опорі називається *активною потужністю*, її величина рівна:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{R I_m^2}{2} = R I_D^2 = \frac{U_D^2}{R} = U_D I_D, \quad (3.27)$$

де U_D, I_D - діючі значення напруги і струму.

- Миттєва потужність у ємності рівна:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = U_m \cos\left(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right) I_m \cos(\omega t + \varphi_i)^2 = \\ &= \frac{X_C I_m^2}{2} \sin(2\omega t + 2\varphi_i) = X_C I_D^2 \sin(2\omega t + 2\varphi_i). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Середня за період потужність у ємності:

$$P = \frac{X_C I_D^2}{T} \int_0^T \sin(2\omega t + 2\varphi_i) dt = 0. \quad (3.29)$$

- Миттєва потужність в індуктивності рівна:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = U_m \cos\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) I_m \cos(\omega t + \varphi_i)^2 = \\ &= \frac{-X_L I_m^2}{2} \sin(2\omega t + 2\varphi_i) = -X_L I_D^2 \sin(2\omega t + 2\varphi_i). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Середня за період потужність в індуктивності:

$$P = \frac{X_L I_D^2}{T} \int_0^T \sin(2\omega t + 2\varphi_i) dt = 0. \quad (3.31)$$

Миттєва потужність на реактивних елементах коливається навколо нуля з подвоєною частотою, ухвалюючи позитивні і негативні значення. При позитивній півхвилі енергія надходить в елемент, при негативній півхвилі стільки ж енергії віддається джерелу. Тому середня за період потужність у реактивних елементах дорівнює нулю. Максимальне значення коливальної потужності прийнято називати *реактивною потужністю* і позначати P_Q . Для ємності $P_Q = X_C I_D^2$, для індуктивності $P_Q = X_L I_D^2$.

3.4 КОМПОНЕНТНІ І ТОПОЛОГІЧНІ РІВНЯННЯ

- *Компонентні рівняння.* Компонентні рівняння R, C, L – елементів являють собою лінійні алгебраїчні рівняння, що зв'язують між собою за законом Ома комплексні амплітуди струму і напруги. Для опору в законі Ома зберігаються параметри R або $G=1/R$. Для ємності і індуктивності використовуються комплексні опори (3.20), (3.21) або комплексні провідності (3.22), (3.23).

- *Топологічні рівняння.* Для частотної області закони Кірхгофа формулюються для комплексних струмів і напруг.

- *Закон Кірхгофа для струмів.* Виразимо гармонійні струми $i_k(t) = I_{mk} \cos(\omega t + \varphi_{ik})$ в гілках, приєднаних до вузла схеми, через комплексні струми $i_k(t) = \text{Re}(\dot{I}_{mk} e^{j\omega t})$. Тоді згідно з першим законом Кірхгофа можна записати:

$$\sum_k i_k(t) = \sum_k \text{Re}(\dot{I}_{mk} e^{j\omega t}) = 0. \quad (3.32)$$

Ця рівність буде виконуватися за умови:

$$\sum_k \dot{I}_{mk} = 0. \quad (3.33)$$

Таким чином, алгебраїчна сума комплексних амплітуд струмів у вузлі дорівнює нулю або в іншому формулюванні - сума комплексних амплітуд струмів, що входять у вузол, дорівнює сумі комплексних амплітуд струмів, що виходять із нього.

- Закон Кірхгофа для напруг. Виразимо гармонійні напруги $u_k(t) = U_{mk} \cos(\omega t + \varphi_{uk})$ в гілках контуру схеми через комплексні напруги $\dot{u}_k(t) = \operatorname{Re}(\dot{U}_{mk} e^{j\omega t})$. Тоді згідно із другим законом Кірхгофа можна записати:

$$\sum_k u_k(t) = \sum_k \operatorname{Re}(\dot{U}_{mk} e^{j\omega t}) = 0. \quad (3.34)$$

Ця рівність буде виконуватися за умови:

$$\sum_k \dot{U}_{mk} = 0. \quad (3.35)$$

Таким чином, алгебраїчна сума комплексних амплітуд напруг у контурі дорівнює нулю або в іншому формулюванні - алгебраїчна сума комплексних амплітуд напруг на пасивних елементах контуру дорівнює алгебраїчній сумі комплексних ЕРС контуру.

Внаслідок лінійності компонентних та топологічних рівнянь для комплексних амплітуд струмів і напруг математична модель лінійного електричного кола буде представлена в частотній області системою лінійних алгебраїчних рівнянь. Для складання і розв'язку систем рівнянь у частотній області можуть бути безпосередньо застосовані методи аналізу, аналогічні методам аналізу лінійних резистивних кіл. Формальна відмінність аналізу в частотній області від аналізу резистивних кіл буде полягати тільки в тому, що змінними в рівняннях будуть комплексні амплітуди струму і напруги, а коефіцієнтами рівнянь - комплексні опори або комплексні провідності.

3.5 ХАРАКТЕРИСТИКИ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА В ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ

Властивості кіл у частотній області прийнято аналізувати при зміні частоти від нуля до нескінченності. Залежності параметрів кіл від частоти називаються частотними характеристиками. Джерелом

сигналу (вхідним впливом) звичайно служить джерело гармонійної напруги $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_E)$ або $e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi_E)$, представлене комплексною амплітудою $\dot{E}_m = E_m e^{j\varphi_E}$.

При визначенні частотних характеристик у колі виділяють пари вхідних полюсів, до яких підключається джерело гармонійної напруги, і пари вихідних полюсів, на яких розглядається реакція на вхідний вплив. У результаті коло представляється чотириполюсником, зображенням на рис. 3.5.



Рисунок 3.5

Частотні характеристики кола діляться на *вхідні* і *передавальні*.

- До *вхідних характеристик* відносяться:

- комплексний вхідний опір

$$\dot{Z}_{\text{вх}}(\omega) = \frac{\dot{U}_{m1}}{\dot{I}_{m1}}; \quad (3.36)$$

- комплексна вхідна провідність

$$\dot{Y}_{\text{вх}}(\omega) = \frac{\dot{I}_{m1}}{\dot{U}_{m1}}. \quad (3.37)$$

- До *передавальних характеристик* відносяться:

- комплексний коефіцієнт передавання напруги

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}}; \quad (3.38)$$

- комплексний коефіцієнт передавання струму

$$\dot{K}_i(\omega) = \frac{\dot{I}_{m2}}{\dot{I}_{m1}}; \quad (3.39)$$

- комплексний передавальний опір

$$\dot{Z}_{\text{пер}}(\omega) = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{I}_{m1}}; \quad (3.40)$$

- комплексна передавальна провідність

$$\dot{G}_{\text{пер}}(\omega) = \frac{\dot{I}_{m2}}{\dot{U}_{m1}}. \quad (3.41)$$

У комплексних характеристиках можна виділити *модуль і аргумент (фазу)*. Залежність модуля комплексної характеристики від частоти називається *амплітудно-частотною характеристикою* (АЧХ), залежність аргументу (фази) від частоти – *фазочастотною характеристикою* (ФЧХ).

Наприклад, якщо комплексний коефіцієнт передавання напруги записати в показовій формі

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{U_{m2}e^{j\varphi_{u2}}}{U_{m1}e^{j\varphi_{u1}}} = \frac{U_{m2}}{U_{m1}} e^{j(\varphi_{u2}-\varphi_{u1})} = |\dot{K}(\omega)| e^{j\varphi_K(\omega)}, \quad (3.42)$$

те залежність $|\dot{K}(\omega)| = K(\omega) = U_{m2}/U_{m1}$ від частоти буде відповідати амплітудно-частотній характеристиці, а залежність $\varphi_K(\omega) = \varphi_{u2} - \varphi_{u1}$ – фазочастотній характеристиці.

3.6 ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КІЛ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Кола першого порядку – це кола, складені із з'єднання опори R з реактивним елементом – ємністю C або індуктивністю L. Математичною моделлю кіл першого порядку в частотній області є лінійні алгебраїчні рівняння першого порядку.

3.6.1 Частотні характеристики послідовного з'єднання R і C – елементів

На рис. 3.6 показані схеми послідовного з'єднання R і C – елементів для миттєвих значень (а) і комплексних амплітуд (б) струму і напруг на елементах

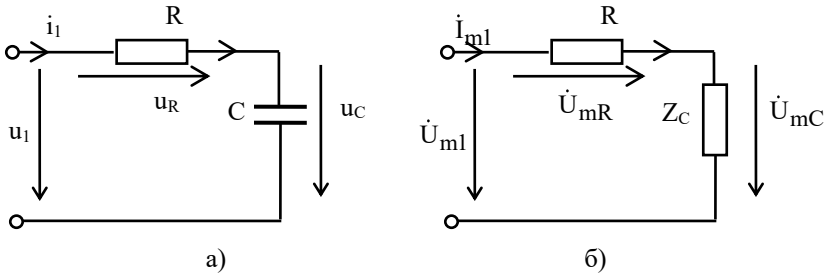


Рисунок 3.6

• *Аналіз схеми.* Струми на елементах рівні: $\dot{I}_{mR} = \dot{I}_{mC} = \dot{I}_{m1}$. Згідно із законом Кірхгофа для напруг:

$$\dot{U}_{m1} = \dot{U}_{mR} + \dot{U}_{mC} = (R + \dot{Z}_C) \dot{I}_{m1},$$

де $\dot{Z}_C = 1/(j\omega C)$ - комплексний опір ємності.

Звідси струм

$$\dot{I}_{m1} = \frac{\dot{U}_{m1}}{R + \dot{Z}_C} = \frac{\dot{U}_{m1}}{\dot{Z}_{BX}}.$$

Тут $\dot{Z}_{BX}(\omega) = \dot{U}_{m1}/\dot{I}_{m1} = R + \dot{Z}_C = R + 1/(j\omega C)$ - вхідний опір кола.

Напруги на елементах кола:

$$\dot{U}_{mR} = R \dot{I}_{m1} = \frac{R}{R + \dot{Z}_C} \dot{U}_{m1}, \quad (3.43)$$

$$\dot{U}_{mC} = \dot{Z}_C \dot{I}_{m1} = \frac{\dot{Z}_C}{R + \dot{Z}_C} \dot{U}_{m1}. \quad (3.44)$$

Зі схеми на рис. 3.6 можна скласти два чотириполюсники із частотними характеристиками, що різняться: RC - чотириполюсник з ємністю на виході, RC - чотириполюсник з опором на виході.

• *RC - чотириполюсник з ємністю на виході.* Схема представлена на рис. 3.7.

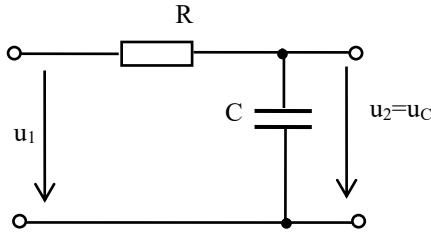


Рисунок 3.7

За (3.42), (3.44) знаходимо комплексний коефіцієнт передавання напруги:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_{mC}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{\dot{Z}_C}{R + \dot{Z}_C} = \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_c}, \quad (3.45)$$

де $\tau_c = RC$ - постійна часу RC - кола.

Представимо комплексний коефіцієнт передавання в показовій формі:

$$\begin{aligned} \dot{K}(\omega) &= |\dot{K}(\omega)| e^{j\varphi_K(\omega)} = \frac{1}{|1 + j\omega\tau_c| e^{j \arg \operatorname{tg}(\omega\tau_c)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{-j \arg \operatorname{tg}(\omega\tau_c)}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Запишемо окремо модуль

$$K(\omega) = |\dot{K}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau_c)^2}} \quad (3.47)$$

і аргумент (фази)

$$\varphi_K(\omega) = -\arg \operatorname{tg}(\omega\tau_c) \quad (3.48)$$

цього вираження.

Залежність модуля від частоти являє собою *амплітудно-частотну характеристику (АЧХ)*, а залежність фази від частоти - *фазочастотну характеристику (ФЧХ)* комплексного коефіцієнта передавання напруги.

На рис. 3.8 наведені побудовані за формулами (3.47), (3.48) графіки АЧХ (а) і ФЧХ (б).

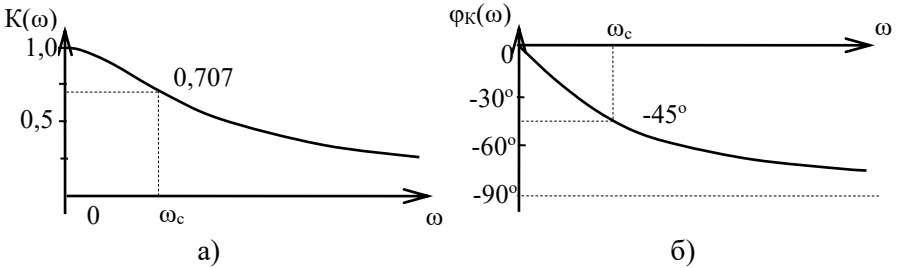


Рисунок 3.8

На графіках можна виділити три характерні частотні точки:

$\omega=0$, на цій частоті $K(0)=1$, $\varphi_K(0)=0$;

$\omega_c=1/\tau_c$, на цій частоті $K(\omega_c)=1/\sqrt{2} \approx 0,707$, $\varphi_K(\omega_c)=-\pi/4$;

$\omega=\infty$, на цій частоті $K(\infty)=0$, $\varphi_K(\infty)=-\pi/2$.

Частота $\omega_c=1/\tau_c$ називається *частотою зрізу*, на цій частоті модуль комплексного коефіцієнта передавання в $1/\sqrt{2} \approx 0,707$ раз менше його максимального значення.

• *RC - чотириполюсник з опором на виході*. Схема представлена на рис. 3.9.

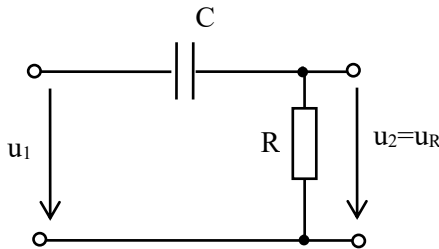


Рисунок 3.9

За (3.43) знаходимо комплексний коефіцієнт передавання напруги:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_{mR}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{R}{R + Z_C} = \frac{R}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{j\omega\tau_c}{1 + j\omega\tau_c}, \quad (3.49)$$

де $\tau_c = RC$ - постійна часу RC - кола.

Представимо цей коефіцієнт у показовій формі:

$$\begin{aligned} \dot{K}(\omega) &= |\dot{K}(\omega)| e^{j\varphi_K(\omega)} = \frac{\omega\tau_c e^{j\pi/2}}{|1 + j\omega\tau_c| e^{j\arg \text{tg}(\omega\tau_c)}} = \\ &= \frac{\omega\tau_c}{\sqrt{1 + (\omega\tau_c)^2}} e^{j[\pi/2 - \arg \text{tg}(\omega\tau_c)]}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Запишемо його модуль

$$K(\omega) = |\dot{K}(\omega)| = \frac{\omega\tau_c}{\sqrt{1 + (\omega\tau_c)^2}} \quad (3.51)$$

і аргумент

$$\varphi_K(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arg \text{tg}(\omega\tau_c). \quad (3.52)$$

На рис. 3.10 наведено побудовані по цих формулах графіки АЧХ (а) і ФЧХ (б) розглянутого кола.

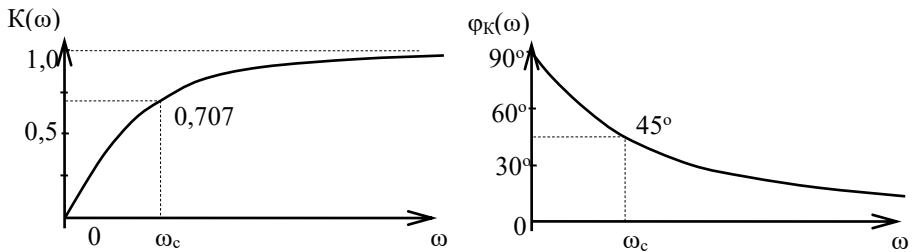


Рисунок 3.10

На графіках можна виділити три характерні частотні точки:

$\omega=0$, на цій частоті $K(0)=0$, $\varphi_K(0) = \pi/2$;

$\omega_c = 1/\tau_c$, на цій частоті $K(\omega_c) = 1/\sqrt{2} \approx 0,707$, $\varphi_K(\omega_c) = \pi/4$;

$\omega=\infty$, на цій частоті $K(\infty)=1$, $\varphi_K = 0$ $\varphi_K(\infty)=0$.

3.6.2 Частотні характеристики послідовного з'єднання R і L – елементів

На рис. 3.11 показані схеми послідовного з'єднання R і L – елементів для миттєвих значень (а) і комплексних амплітуд (б) струму і напруг на елементах.

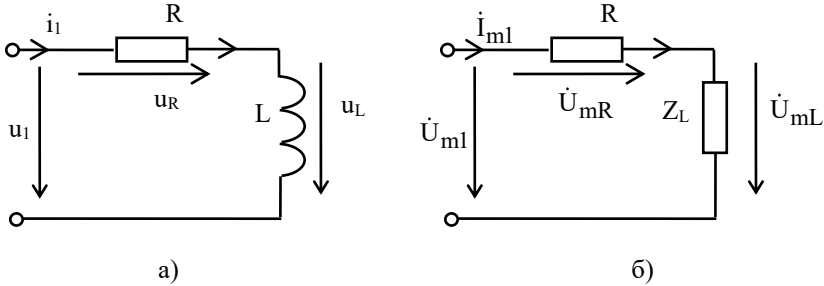


Рисунок 3.11

• *Аналіз схеми.* Струми на елементах рівні: $\dot{I}_{mR} = \dot{I}_{mC} = \dot{I}_{m1}$. Згідно із законом Кірхгофа для напруг:

$$\dot{U}_{m1} = \dot{U}_{mR} + \dot{U}_{mL} = (R + \dot{Z}_L) \dot{I}_{m1},$$

де $\dot{Z}_L = j\omega L$ - комплексний опір індуктивності.

Звідси струм

$$\dot{I}_{m1} = \frac{\dot{U}_{m1}}{R + \dot{Z}_L} = \frac{\dot{U}_{m1}}{\dot{Z}_{\text{вх}}(\omega)}.$$

Тут $\dot{Z}_{\text{вх}}(\omega) = \dot{U}_{m1} / \dot{I}_{m1} = R + \dot{Z}_L = R + j\omega L$ - вхідний опір кола.

Напруги на елементах

$$\dot{U}_{mR} = R \dot{I}_{m1} = \frac{R}{R + \dot{Z}_L} \dot{U}_{m1}, \quad (3.53)$$

$$\dot{U}_{mL} = \dot{Z}_L \dot{I}_{m1} = \frac{\dot{Z}_L}{R + \dot{Z}_L} \dot{U}_{m1}. \quad (3.54)$$

Зі схеми на рис. 3.11 можна скласти два чотириполіусники із частотними характеристиками, що різняться: RL - чотириполіусник з опором на виході, RL - чотириполіусник з індуктивністю на виході.

• RL - чотириполіусник з опором на виході. Схема представлена на рис. 3.12.

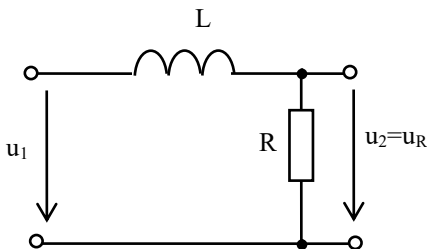


Рисунок 3.12

По (3.53) знаходимо:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_{mR}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{R}{R + \dot{Z}_L} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_c}, \quad (3.55)$$

де $\tau_c = L/R$ - постійна часу RL - кола.

Співвідношення (3.55) повністю збігається з комплексним коефіцієнтом передавання (3.45) RC - чотириполіусника на рис. 3.7. Тому схеми на рис. 3.7 і 3.12 будуть мати однакові АЧХ і ФЧХ, показані на рис. 3.8.

• RL - чотириполіусник з індуктивністю на виході. Схема представлена на рис. 3.13.

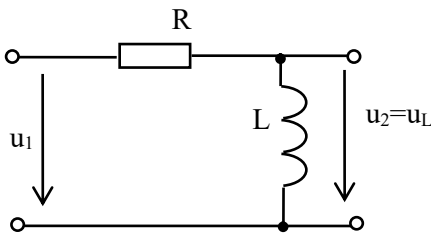


Рисунок 3.13

За (3.54) знаходимо:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_{mL}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{\dot{Z}_L}{R + \dot{Z}_L} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega\tau_c}{1 + j\omega\tau_c}. \quad (3.56)$$

Співвідношення (3.56) повністю збігається з комплексним коефіцієнтом передавання (3.49) RC - чотириполосника на рис. 3.9. Тому схеми на рис. 3.9 і 3.13 будуть мати однакові АЧХ і ФЧХ, показані на рис. 3.10.

● *Частотні властивості RC- і RL – чотириполосників.* RC- і RL - кола мають частотно-виборчі властивості, які визначаються формою їх АЧХ. Кола зі частотно-виборчими властивостями відносяться до класу електричних фільтрів.

Електричний фільтр - це електричне коло, яке пропускає гармонійні коливання в деякій смузі частот і затримує коливання поза цією смугою.

Фільтри, що виділяють коливання низьких частот, починаючи із частоти, рівної нулю, називаються *фільтрами нижніх частот* (ФНЧ), а фільтри, що виділяють коливання високих частот аж до нескінченно великої частоти, називаються *фільтрами високих частот* (ФВЧ).

Таким чином, кола на рис. 3.7 і 3.12 з формою АЧХ на рис.3.8 являють собою найпростіші фільтри нижніх частот. Ці кола коливання низьких частот пропускають, а коливання високих частот затримують. Кола на рис. 3.9 і 3.13 з формою АЧХ на рис. 3.10, навпаки, ставляться до найпростіших фільтрів високих частот. Вони коливання високих частот пропускають, а коливання низьких частот затримують. Границею між смугами пропускання і загородження служить *частота зрізу* $\omega_c = 1/\tau_c$. На частоті зрізу модуль комплексного коефіцієнта передавання в $1/\sqrt{2} \approx 0,707$ раз менше його максимального значення.

3.6.4 Аналіз паралельного з'єднання R і C – елементів

Як приклад аналізу паралельних з'єднань R і C - елементів розглянемо схему чотириполосника на рис. 3.14.

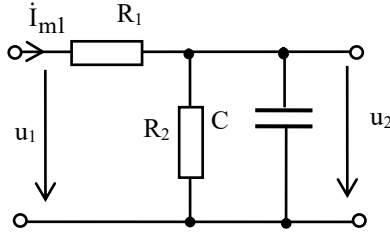


Рисунок 3.14

• *Аналіз схеми.* Визначимо комплексний опір паралельного з'єднання елементів R_2 і C :

$$\dot{Z}_2 = \frac{R_2 \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_2}{1 + j\omega CR_2}.$$

Запишемо рівняння для напруг:

$$\dot{U}_{m1} = \dot{U}_{mR_1} + \dot{U}_{mZ_2} = (R_1 + \dot{Z}_2) \dot{I}_{m1}.$$

Звідси знаходимо коефіцієнт передавання напруги:

$$\begin{aligned} \dot{K}(\omega) &= \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{\dot{U}_{mZ_2}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{\dot{Z}_2}{R_1 + \dot{Z}_2} = \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega CR_2}}{R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega CR_2}} = \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega CR_2 R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega C \frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2}} = \frac{K_0}{1 + j\omega \tau_c}. \end{aligned}$$

Тут $K_0 = R_2 / (R_1 + R_2)$ - коефіцієнт передавання на нульовій частоті,

$\tau_c = CR_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ - постійна часу кола.

Для нормованого коефіцієнта передавання, одержимо:

$$\dot{K}_N(\omega) = \frac{\dot{K}(\omega)}{K_0} = \frac{1}{1 + j\omega \tau_c}.$$

Дана формула повністю збігається з формулою (3.45), тому графіки нормованих АЧХ і ФЧХ розглянутої схеми і схеми на рис. 3.7 будуть мати однаковий вигляд. Вид цих графіків наведений на рис. 3.8.

3.7 ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КІЛ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Кола другого порядку – це кола, складені із з'єднання опору R, ємності C і індуктивності L. Математичною моделлю кіл другого порядку в частотній області є лінійні алгебраїчні рівняння другого порядку.

3.7.1 Послідовний коливальний контур

На рис. 3.15 зображене з'єднання опору, ємності і індуктивності, що утворює послідовний коливальний контур.

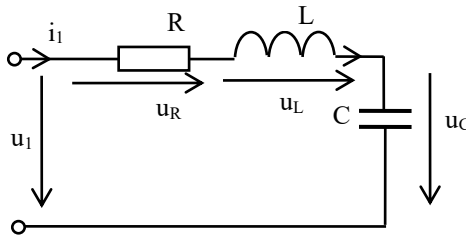


Рисунок 3.15

• *Аналіз схеми.* Струми в колі рівні: $\dot{I}_{mR} = \dot{I}_{mL} = \dot{I}_{mC} = \dot{I}_{m1}$. Згідно із законом Кірхгофа для комплексних амплітуд напруг:

$$\dot{U}_{m1} = \dot{U}_{mR} + \dot{U}_{mL} + \dot{U}_{mC} = (R + \dot{Z}_L + \dot{Z}_C) \dot{I}_{m1}, \quad (3.57)$$

де $\dot{Z}_L = j\omega L$, $\dot{Z}_C = 1/(j\omega C)$ - комплексні опори індуктивності і ємності.

Звідси струм

$$\dot{I}_{m1} = \frac{\dot{U}_{m1}}{R + \dot{Z}_L + \dot{Z}_C} = \frac{\dot{U}_{m1}}{\dot{Z}_{вх}(\omega)}. \quad (3.58)$$

Тут $\dot{Z}_{\text{ВХ}}(\omega) = \dot{U}_{\text{m1}} / \dot{I}_{\text{m1}}$ - комплексний вхідний опір контуру.

Вхідний опір визначається наступним співвідношенням:

$$\dot{Z}_{\text{ВХ}}(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX(\omega), \quad (3.59)$$

де $X(\omega) = \omega L - 1/(\omega C)$ - реактивний опір контуру, R - активний опір контуру.

Напруги на елементах контуру:

$$\dot{U}_{\text{mR}} = R \dot{I}_{\text{m1}} = \frac{R}{R + jX(\omega)} \dot{U}_{\text{m1}}, \quad (3.60)$$

$$\dot{U}_{\text{mL}} = \dot{Z}_L \dot{I}_{\text{m1}} = \frac{j\omega L}{R + jX(\omega)} \dot{U}_{\text{m1}}, \quad (3.61)$$

$$\dot{U}_{\text{mC}} = \dot{Z}_C \dot{I}_{\text{m1}} = \frac{1/j\omega C}{R + jX(\omega)} \dot{U}_{\text{m1}}. \quad (3.62)$$

3.7.1.1 Резонансні властивості послідовного коливального контуру

Реактивний опір послідовного коливального контуру залежить від частоти і на деякій частоті ω_0 , яка називається *резонансною частотою*, стає рівною нулю:

$$X(\omega_0) = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0. \quad (3.63)$$

Звідси випливає значення резонансної частоти:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (3.64)$$

Згідно (3.63) на резонансній частоті реактивні опори індуктивності і ємності рівні за величиною. Ці опори називаються *характеристичним опором* і позначаються буквою ρ :

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (3.65)$$

Підстановка (3.64) в (3.65) приводить до наступної формули для характеристичного опору:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.66)$$

Таким чином, характеристичний опір не залежить від частоти, а визначається тільки значеннями ємності і індуктивності контуру.

Відношення характеристичного опору до активного опору R контуру називається *добротністю контуру* і позначається буквою Q :

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}. \quad (3.67)$$

На резонансній частоті вхідний опір, струм і напруги ухвалюють наступні значення:

$$\dot{Z}_{\text{вх}}(\omega_0) = R, \dot{I}_{\text{мл}}(\omega_0) = \frac{\dot{U}_{\text{мл}}}{R}, \dot{U}_{\text{мR}}(\omega_0) = \dot{U}_{\text{мл}}, \quad (3.68)$$

$$\dot{U}_{\text{мL}}(\omega_0) = \frac{j\omega_0 L}{R} \dot{U}_{\text{мл}} = jQ \dot{U}_{\text{мл}} = Q e^{j\pi/2} \dot{U}_{\text{мл}}, \quad (3.69)$$

$$\dot{U}_{\text{мC}}(\omega_0) = \frac{1}{j\omega_0 C R} \dot{U}_{\text{мл}} = -jQ \dot{U}_{\text{мл}} = Q e^{-j\pi/2} \dot{U}_{\text{мл}}. \quad (3.70)$$

На підставі цих співвідношень можна зробити наступні висновки щодо властивостей послідовного коливального контуру на резонансній частоті:

- комплексні опори індуктивності і ємності компенсують один одного, тому вхідний опір послідовного контуру активний і рівний R ;
- амплітуда струму в контурі максимальна і дорівнює амплітуді вхідної напруги, діленої на опір R ;
- напруга на індуктивності і напруга на ємності рівні по амплітуді і протилежні по фазі, тому вони взаємно компенсуються;

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_{mC}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{1}{R + jX(\omega)} = \frac{1}{j\omega CR} \cdot \frac{1}{1 + j\xi(\omega)}, \quad (3.71)$$

де

$$\xi(\omega) = \frac{X(\omega)}{R} = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} \quad (3.72)$$

- узагальнена розстройка контуру.

У показовій формі (3.71) записується в такий спосіб:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{1}{e^{j\pi/2} \omega CR} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2(\omega)} e^{j \arg \operatorname{tg} \xi(\omega)}} = K(\omega) e^{j\omega_K(\omega)}, \quad (3.73)$$

де

$$K(\omega) = \frac{1}{\omega CR} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2(\omega)}} \quad (3.74)$$

- модуль,

$$\varphi_K(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arg \operatorname{tg} \xi(\omega) \quad (3.75)$$

- фаза коефіцієнта передавання.

В області частот, близьких резонансній частоті, формули (3.74), (3.75) можуть бути спрощені. При $\omega \approx \omega_0$ коефіцієнт $1/(\omega CR)$ можна замінити добротністю $Q = 1/(\omega_0 CR)$. Для спрощення узагальненої розстройки спочатку перетворимо співвідношення (3.72) до наступного виду:

$$\begin{aligned} \xi(\omega) &= \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} = \frac{1}{\omega CR} (\omega^2 LC - 1) = \frac{1}{\omega CR} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} = \\ &= \frac{1}{\omega CR} \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega_0^2}. \end{aligned}$$

Потім, ввівши наближення $\omega \approx \omega_0$ в це вираження, одержимо:

$$\xi(\omega) = \frac{1}{\omega CR} \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega_0^2} \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q, \quad (3.76)$$

де $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ - абсолютна розстройка.

З урахуванням уведених наближень формули (3.74), (3.75) запишуться у вигляді:

$$K(\omega) = \frac{Q}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q\right)^2}}, \quad (3.77)$$

$$\varphi_K(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arg \operatorname{tg} \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q \right). \quad (3.78)$$

Якщо вихідну напругу u_2 послідовного контуру визначити щодо напруги на індуктивності, то згідно (3.61) комплексний коефіцієнт передавання напруги прийме наступний вид:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_{mL}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{j\omega L}{R} \frac{1}{1 + j\xi(\omega)} = \frac{\omega L}{R} \frac{e^{j\pi/2 - j\arg \operatorname{tg}(\xi(\omega)/R)}}{\sqrt{1 + \xi^2(\omega)}}. \quad (3.79)$$

При $\omega \approx \omega_0$ коефіцієнт $\omega L/R$ замінюється добротністю $Q = \omega_0 L/R$, узагальнена розстройка представляється формулою (3.76). У результаті модуль $\dot{K}(\omega)$ в (3.79) буде визначатися формулою (3.77), а фаза формулою

$$\varphi_K(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arg \operatorname{tg} \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q \right). \quad (3.80)$$

• *Нормований коефіцієнт передачі напруги.* Для аналізу частотних властивостей контуру вводяться нормовані співвідношення для модуля і фази комплексного коефіцієнта передавання напруги:

$$K_N(\omega) = \frac{K(\omega)}{K(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q\right)^2}}, \quad (3.81)$$

$$\varphi_{KN}(\omega) = -\arg \operatorname{tg} \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q \right). \quad (3.82)$$

На рис. 3.18 за формулами (3.81), (3.82) побудовані графіки нормованих АЧХ (а) і ФЧХ (б) послідовного коливального контуру.

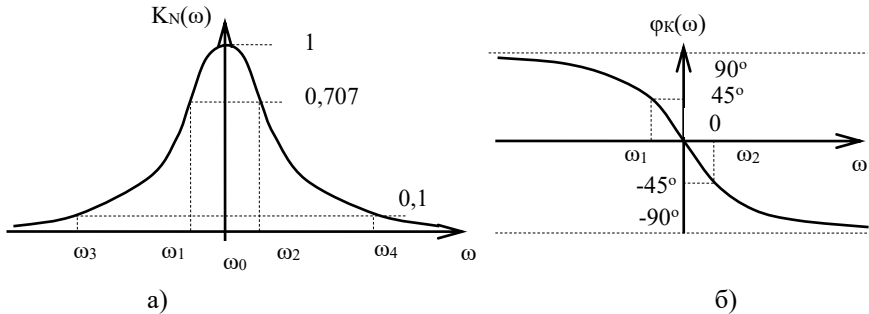


Рисунок 3.18

З рис. 3.18 слід, що амплітудно-частотна характеристика послідовного коливального контуру має високу частотну вибірковість.

3.7.1.3 Частотні властивості послідовного коливального контуру.

Послідовний коливальний контур має частотно-вибірчі властивості, які визначаються формою його АЧХ. За формою АЧХ послідовний коливальний контур відносять до смугових фільтрів (СФ).

Смуговий фільтр – це електричне коло, що пропускає коливання із частотами, що належать деякій смузі частот. Ця смуга частот називається *смугою пропускання* фільтра. Смугою пропускання прийнято визначати за рівнем $1/\sqrt{2} \approx 0,707$ від максимального значення комплексного коефіцієнта передавання напруги.

Для АЧХ послідовного контуру на рис. 3.18 смуга пропускання обмежена частотами ω_1, ω_2 . На цих частотах

$$K_N(\omega_1) = K_N(\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta\omega_{0,7}}{\omega_0} Q\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

звідси випливає:

$$\frac{2\Delta\omega_{0,7}}{\omega_0} Q = 1 \quad (3.83)$$

або

$$2\Delta\omega_{0,7} = \frac{\omega_0}{Q}. \quad (3.84)$$

Тут $2\Delta\omega_{0,7} = \omega_2 - \omega_1$ - ширина смуги пропускання за рівнем 0,707. Її величина пропорційна резонансній частоті і обернено пропорційна добротності. Згідно (3.82), (3.83) на границях смуги пропускання фаза коефіцієнта передавання ухвалює значення $\pm 45^\circ$.

Близькість АЧХ смугового фільтра до ідеальної прямокутної форми оцінюється *коефіцієнтом прямокутності*:

$$k_{\text{пр}} = \frac{2\Delta\omega_{0,1}}{2\Delta\omega_{0,7}}, \quad (3.85)$$

де $2\Delta\omega_{0,1} = \omega_4 - \omega_3$ - ширина смуги пропускання на рис. 3.18 за рівнем 0,1 від максимального значення.

Для коливального контуру

$$K_N(\omega_3) = K_N(\omega_4) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta\omega_{0,1}}{\omega_0} Q\right)^2}} = \frac{1}{10},$$

звідси

$$2\Delta\omega_{0,1} = \sqrt{99} \frac{\omega_0}{Q} \approx 10 \frac{\omega_0}{Q}. \quad (3.86)$$

Таким чином, згідно (3.84) – (3.86) частотні виборчі властивості послідовного контуру характеризуються коефіцієнтом прямокутності, рівним 10.

3.7.2 Паралельний коливальний контур

На рис. 3.19 зображено з'єднання провідності, ємності та індуктивності, що утворює паралельний коливальний контур.

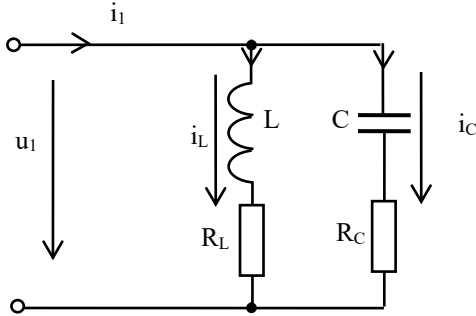


Рисунок 3.19

На рисунку опір R_L – це опір дроту, з якого намотана котушка індуктивності, а опір R_C урахує втрати в ізоляції конденсатора.

3.7.2.1 Резонансна частота паралельного коливального контуру

Визначимо резонансну частоту ω_p з умови

$$B_K(\omega_p) = 0, \quad (3.87)$$

де $B_K(\omega)$ – частотна залежність реактивної складової еквівалентної провідності $\dot{Y}_K(\omega) = R_K(\omega) + jB_K(\omega)$ контуру.

Запишемо співвідношення для еквівалентної провідності контуру:

$$\dot{Y}_K(\omega) = \frac{1}{R_L + j\omega L} + \frac{1}{R_C - j/(\omega C)} = \frac{R_L - j\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} + \frac{R_C + j/(\omega C)}{R_C^2 + 1/(\omega C)^2}.$$

Виділимо реактивну складову:

$$\dot{B}_K(\omega) = -\frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} + \frac{1/(\omega C)}{R_C^2 + 1/(\omega C)^2}.$$

Складемо рівняння (3.87):

$$\dot{B}_K(\omega_p) = -\omega_p^2 L C R_C^2 - \frac{L}{C} + R_L^2 + \omega_p^2 L^2 = 0,$$

звідси

$$\omega_p^2 = \frac{1}{LC} \cdot \frac{L/C - R_L^2}{L/C - R_C^2} = \omega_0^2 \cdot \frac{\rho^2 - R_L^2}{\rho^2 - R_C^2}.$$

Таким чином, формула для резонансної частоти, що враховує втрати в котушці індуктивності і у конденсаторі, має такий вигляд:

$$\omega_p = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{1 - R_L^2/\rho^2}{1 - R_C^2/\rho^2}}. \quad (3.88)$$

Тут $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ - резонансна частота при відсутності втрат $R_L=R_C=0$, $\rho = \sqrt{L/C} = \omega_0 L = 1/\omega_0 C$ - характеристичний опір коливального контуру.

Для коливальних контурів, застосовуваних в електронних обладнаннях, виконуються нерівності: $\rho \gg R_C$, $\rho \gg R_L$. Тому досить високу точність для розрахунків параметрів паралельного контуру дає наближення $\omega_p = \omega_0$.

3.7.2.2 Резонансні властивості паралельного коливального контуру

Для дослідження резонансних властивостей визначимо еквівалентний опір контуру:

$$\dot{Z}_K(\omega) = \frac{1}{\dot{Y}_K(\omega)} = \frac{(R_L + j\omega L) \cdot (R_C - j/\omega C)}{R_L + R_C + j(\omega L - 1/\omega C)}. \quad (3.89)$$

Поблизу резонансу $\omega \approx \omega_0$, тому в чисельнику можна зневажити опорами R_L, R_C у порівнянні з характеристичним опором.

Позначивши $R = R_L + R_C$, перепишемо (3.89):

$$\dot{Z}_K(\omega) = \frac{L/C}{R + j[\omega L - 1/(\omega C)]} = \frac{\rho^2}{R} \frac{1}{1 + j\xi(\omega)} = \frac{R_{ep}}{1 + j\xi(\omega)}. \quad (3.90)$$

Тут

$$R_{ep} = \frac{\rho^2}{R} = \frac{L}{CR} = \rho Q \quad (3.91)$$

- еквівалентний резонансний опір паралельного коливального контуру;

$$\xi(\omega) = [\omega L - 1/(\omega C)]/R \quad (3.92)$$

- узагальнена розстройка контуру.

При резонансі $\xi(\omega_0) = 0$, $\dot{Z}_K(\omega_0) = R_{ep} = \rho Q$, тому струми в контурі будуть визначатися наступним формулами:

- струм в загальній гілці кола

$$\dot{I}_{m1} = \dot{U}_{m1} / \dot{Z}_K(\omega_0) = \dot{U}_{m1} / R_{ep}, \quad (3.93)$$

- струми в індуктивній і ємнісній гілках контуру

$$\dot{I}_{mL} = \frac{\dot{U}_{m1}}{R_L + j\omega_0 L} \square \frac{\dot{U}_{m1}}{j\omega_0 L} = \frac{R_{ep}}{j\rho} \dot{I}_{m1} = -jQ \dot{I}_{m1} = Q \dot{I}_{m1} e^{-j\pi/2}, \quad (3.94)$$

$$\dot{I}_{mC} = \frac{\dot{U}_{m1}}{R_C + 1/(j\omega_0 C)} \square \frac{\dot{U}_{m1}}{1/(j\omega_0 C)} = \frac{jR_{ep}}{\rho} \dot{I}_{m1} = jQ \dot{I}_{m1} = Q \dot{I}_{m1} e^{j\pi/2}. \quad (3.95)$$

Таким чином, можна зробити наступні висновки щодо властивостей паралельного коливального контуру на резонансній частоті:

- опір контуру максимальний, в Q раз перевищуючий характеристичний опір ρ контуру;

- амплітуда струму в загальній гілці кола мінімальна по величині;

- амплітуди струмів в індуктивній і ємнісній гілках рівні по величині і протилежні по фазі, тому взаємно компенсуються;

- амплітуди струмів в індуктивній і ємнісній гілках в Q раз перевищують струм в загальній гілці контуру, це явище називається резонансом струмів.

3.7.2.3 Схема заміщення паралельного коливального контуру

На підставі (3.90) можна скласти схему паралельного коливального контуру для області частот поблизу резонансної частоти. Для цього по наближеній формулі (3.90) для опору контуру визначимо відповідну провідність:

$$\dot{Y}_K(\omega) = \frac{1}{\dot{Z}_K(\omega)} = \frac{R}{L/C} + \frac{j\omega L}{L/C} + \frac{1/(j\omega C)}{L/C} = \frac{1}{R_{ep}} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}. \quad (3.96)$$

На підставі цієї формули схема на рис. 3.19 перетвориться в схему із трьох паралельних гілок, зображену на рис. 3.20.

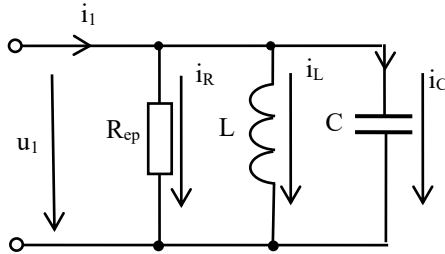


Рисунок 3.20

На рис. 3.21 наведені векторні діаграми для комплексних амплітуд вхідної напруги і струмів у гілках цієї схеми.

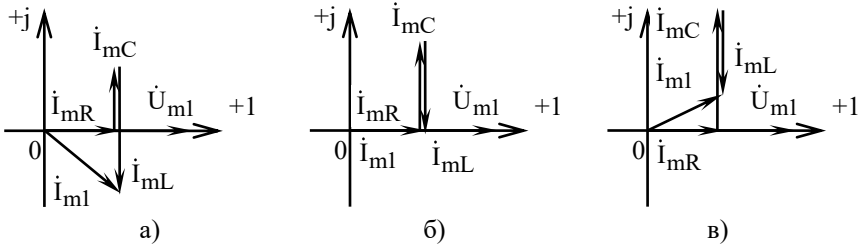


Рисунок 3.21

Рисунки відповідають трьом випадкам: а) – до резонансу $\omega < \omega_0$, $|\dot{I}_{mC}| < |\dot{I}_{mL}|$; б) – при резонансі $\omega = \omega_0$, $|\dot{I}_{mC}| = |\dot{I}_{mL}|$, в) – після резонансу $\omega > \omega_0$, $|\dot{I}_{mC}| > |\dot{I}_{mL}|$.

3.7.2.4 Частотні характеристики паралельного коливального контуру

В електронних схемах паралельний коливальний контур включається за схемою чотирьохполюсника, зображеного на рис. 3.22,а, де R – це внутрішній опір джерела вхідної напруги u_1 .

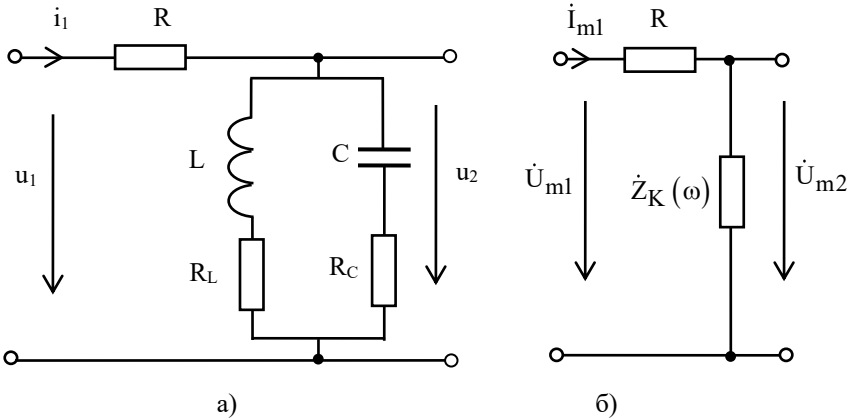


Рисунок 3.22

Еквівалентна схема чотирьохполюсника для комплексних амплітуд представлена на рис. 3.22,б, де $\dot{Z}_K(\omega)$ - опір коливального контуру (3.90).

За схемою на рис. 3.22,б запишемо:

$$\dot{U}_{m2} = \dot{Z}_K(\omega) \dot{I}_{m1} = \dot{Z}_K(\omega) \cdot \frac{\dot{U}_{m1}}{R + \dot{Z}_K(\omega)}, \quad (3.97)$$

звідси впливає формула для комплексного коефіцієнта передавання напруги:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{\dot{Z}_K(\omega)}{R + \dot{Z}_K(\omega)} = \frac{R_{ep}}{R[1 + j\xi(\omega)] + R_{ep}} = \frac{K(\omega_0)}{1 + j\xi_{ек}(\omega)}, \quad (3.98)$$

де

$$K(\omega_0) = \frac{R_{ep}}{R + R_{ep}} \quad (3.99)$$

- коефіцієнт передавання на резонансній частоті;

$$\xi_{ек}(\omega) = \xi(\omega) \frac{R}{R + R_{ep}} \quad (3.100)$$

- еквівалентна узагальнена розстройка.

Для нормованого коефіцієнта передавання, враховуючи наближене вираження (3.76) для узагальненої розстройки $\xi(\omega)$ у формулі (3.100), можна записати:

$$\dot{K}_N(\omega) = \frac{\dot{K}(\omega)}{K(\omega_0)} = \frac{1}{1 + j\xi_{ек}(\omega)} = \frac{1}{1 + j \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q_{ек}}, \quad (3.101)$$

де $Q_{ек} = Q \frac{R}{R + R_{ep}}$ - еквівалентна добротність контуру.

Модуль і аргумент $\dot{K}_N(\omega)$ мають такий вигляд:

$$K_N(\omega) = \frac{K(\omega)}{K(\omega_0)} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q_{ек}\right)^2}}, \quad (3.102)$$

$$\varphi_{KN}(\omega) = -\arg \operatorname{tg} \left(\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q_{ек} \right). \quad (3.103)$$

Ці формули повністю збігаються з формулами (3.81), (3.82), отриманими для послідовного коливального контуру. Тому графіки АЧХ і ФЧХ чотирьохполосника на рис. 3.22,а, що відповідні до формул (3.102), (3.103), будуть за формою збігатися із графіками на рис. 3.18. Відмінність у величині добротності ($Q_{ек} < Q$) викличе тільки розширення смуги пропускання.

3.8 МАТРИЧНІ МЕТОДИ ЧАСТОТНОГО АНАЛІЗУ КІЛ

Для аналізу складних розгалужених лінійних кіл у частотній області застосовуються ті ж матричні методи, які використовуються в розрахунках лінійних резистивних кіл. Звичайно це метод контурних струмів або метод вузлових потенціалів.

При частотному аналізі кіл ємності і індуктивності замінюються комплексними опорами або провідностями, а матричні рівняння складаються щодо комплексних амплітуд струмів і напруг.

Приклад 3.1. Для прикладу складемо матричне рівняння для схеми на рис. 3.23 за методом вузлових потенціалів, викладеним в розділі 2.3.2.

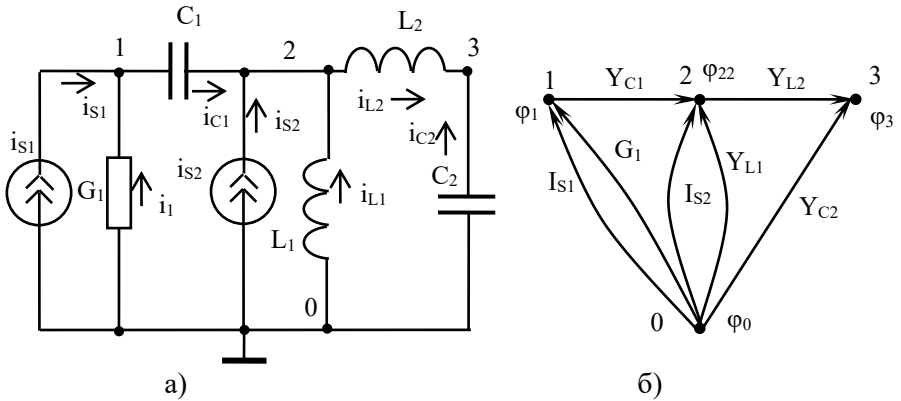


Рисунок 3.23

Формування рівнянь проведемо за наступним алгоритмом:

1. Перейдемо від миттєвих струмів i_k і напруг u_k до їхніх комплексних амплітуд \dot{I}_{mk} , \dot{U}_{mk} . Індуктивності і ємності представимо комплексними провідностями $\dot{Y}_{Lk} = 1/(j\omega L_k)$, $\dot{Y}_{Ck} = j\omega C_k$. Якщо схема містила джерела напруги з комплексною ЕРС величиною \dot{E}_{mk} і внутрішнім комплексним опором \dot{Z}_k , то вони перетворяться в джерела струму $\dot{I}_{Sk} = \dot{E}_{mk}/\dot{Z}_k$ із внутрішньою провідністю $\dot{Y}_k = 1/\dot{Z}_k$.

2. Становимо на рис. 3.23,б граф схеми, нумеруємо всі вузли графа, починаючи з нуля, вказуємо напрямки струмів у гілках.

3. Потенціал нульового вузла ухвалюємо рівним нулю, виражаємо напруги на гілках графа через вузлові потенціали:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{C1} &= \dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2, \dot{U}_{C2} = 0 - \dot{\phi}_3, \dot{U}_{L1} = 0 - \dot{\phi}_2, \\ \dot{U}_{L2} &= \dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_3, \dot{U}_{G1} = 0 - \dot{\phi}_1. \end{aligned}$$

4. Становимо систему рівнянь. В клітки Y_{kk} головної діагоналі матриці вузлових провідностей записуємо суму провідностей, підключених до k -му вузлу. В клітки Y_{kj} поза головною діагоналлю записуємо з негативним знаком суму провідностей, що з'єднують j -й і k -й вузли. В k -ю клітку вектора вузлових струмів зі знаком плюс записуємо вхідні струми, зі знаком мінус – вихідні. Для розглянутого кола матричне рівняння прийме вид:

$$\begin{bmatrix} G_1 + \dot{Y}_{C1} & -\dot{Y}_{C1} & 0 \\ -\dot{Y}_{C1} & \dot{Y}_{C1} + \dot{Y}_{L1} + \dot{Y}_{L2} & -\dot{Y}_{L2} \\ 0 & -\dot{Y}_{L2} & \dot{Y}_{L2} + \dot{Y}_{C2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{S1} \\ \dot{I}_{S2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

або

$$\dot{Y} \cdot \dot{\Phi} = \dot{I}_S.$$

5. Вирішуємо систему рівнянь, знаходимо вектор вузлових потенціалів $\dot{\Phi} = \dot{Y}^{-1} \dot{I}_S$.

6. За вузовими потенціалами визначаємо напруги гілок. Від напруг за законом Ома переходимо до струмів гілок.

Аналогічно виконується аналіз кіл у частотній області за алгоритмом методу контурних струмів.

3.9 УМОВА ПЕРЕДАВАННЯ МАКСИМАЛЬНОЇ ПОТУЖНОСТІ ВІД ДЖЕРЕЛА В НАВАНТАЖЕННЯ

Активна потужність P_A гармонійного струму визначається за формулою (3.4). Для комплексних амплітуд ця формула записується у вигляді:

$$P_A = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{U}_m \dot{I}_m^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(U_m e^{j\varphi_u} I_m e^{-j\varphi_i}) = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i), \quad (3.104)$$

де $\dot{I}_m^* = I_m e^{-j\varphi_i}$ - комплексна сполучена амплітуда струму.

Потужність, обумовлена за формулою

$$\dot{P}_S = \frac{\dot{U}_m \dot{I}_m^*}{2} = \frac{U_m I_m}{2} [\cos(\varphi_u - \varphi_i) + j \sin(\varphi_u - \varphi_i)], \quad (3.105)$$

називається *комплексною потужністю*. Модуль цього вираження

$$P_S = \frac{1}{2} |\dot{U}_m \dot{I}_m^*| = \frac{U_m I_m}{2} \quad (3.106)$$

визначає *повну потужність*.

Уявна частина комплексної потужності – це *реактивна потужність* P_Q :

$$P_Q = \frac{1}{2j} \operatorname{Im}(\dot{U}_m \dot{I}_m^*) = \frac{U_m I_m}{2} \sin(\varphi_u - \varphi_i). \quad (3.107)$$

На рис. 3.24 показана схема передавання потужності із джерела ЕРС з комплексною амплітудою \dot{E}_m і внутрішнім опором $\dot{Z}_i = R_i + jX_i$ у навантаження з опором $\dot{Z}_H = R_H + jX_H$.

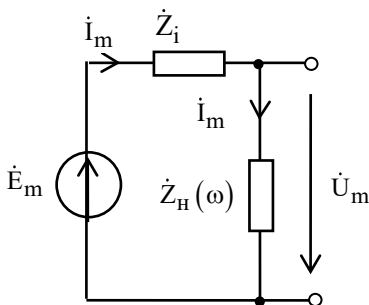


Рисунок 3.24

За законом Кірхгофа:

$$\dot{E}_m = \dot{U}_i + \dot{U}_H = (\dot{Z}_i + \dot{Z}_H) \dot{I}_m,$$

звідси струм у колі

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{\dot{Z}_i + \dot{Z}_H} = \frac{\dot{E}_m}{R_i + R_H + j(X_i + X_H)} = \frac{\dot{E}_m}{R_\Sigma + jX_\Sigma},$$

а напруга на навантаженні

$$\dot{U}_m = \frac{R_H + jX_H}{R_\Sigma + jX_\Sigma} \dot{E}_m,$$

де $R_\Sigma = R_i + R_H$, $X_\Sigma = X_i + X_H$.

За (3.105) визначається комплексна потужність у навантаженні:

$$\dot{P}_S = \frac{\dot{U}_m \dot{I}_m^*}{2} = \frac{R_H + jX_H}{R_\Sigma + jX_\Sigma} \dot{E}_m \cdot \frac{\dot{E}_m^*}{R_\Sigma - jX_\Sigma} = \frac{R_H + jX_H}{R_\Sigma^2 + X_\Sigma^2} \cdot \frac{E_m^2}{2}. \quad (3.108)$$

З цієї формули знаходимо співвідношення для активної потужності

$$P_A = \frac{R_H}{R_\Sigma^2 + X_\Sigma^2} \cdot \frac{E_m^2}{2} \quad (3.109)$$

і співвідношення для реактивної потужності

$$\dot{P}_Q = \frac{X_H}{R_\Sigma^2 + X_\Sigma^2} \cdot \frac{E_m^2}{2}. \quad (3.110)$$

При $X_\Sigma = 0$ або $X_i = -X_H$ активна потужність у навантаженні відповідно до формули (3.109) ухвалює максимальне значення:

$$P_{A\max} = \frac{R_H}{R_i + R_H} \cdot \frac{E_m^2}{2}. \quad (3.111)$$

Потужність у навантаженні можна побільшити, якщо підібрати оптимальне значення R_H .

Екстремум функції (3.111) перебуває з рівняння:

$$\frac{dP_{A \max}}{dR_H} = E_m^2 \left[\frac{(R_i + R_H)^2 - 2R_H(R_i + R_H)}{(R_i + R_H)^4} \right] = 0.$$

Звідси одержуємо оптимальне співвідношення для активних опорів: $R_H = R_i$. При цьому активна потужність у навантаженні ухвалює найбільше значення, обумовлене формулою:

$$P_{A \max \max} = \frac{E_m^2}{4R_H}. \quad (3.112)$$

Таким чином, умовою оптимального узгодження джерела з навантаженням є комплексна спряженість внутрішнього опору джерела і опору навантаження:

$$\dot{Z}_H = \dot{Z}_i^*, \quad (3.113)$$

де $R_H = R_i$, $X_H = -X_i$.

Приклад 3.2. Навантаженням служить електродвигун, обмотка якого має опір R_H і індуктивність L_H . Потрібно погодити з навантаженням джерело гармонійної напруги з частотою ω_0 . Умова оптимального узгодження: $R_H = R_i$, $\omega_0 L_H + X_i = 0$. Для реалізації негативного реактивного опору використовуємо ємність C_i . Тоді $\omega_0 L_H - 1/(\omega_0 C_i) = 0$, звідси $C_i = 1/(\omega_0^2 L_H)$. Таким чином, джерело напруги повинно мати наступні параметри: $R_i = R_H$, $X_i = 1/(\omega_0^2 L_H)$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Параметри гармонійного коливання.
2. Потужність і діючі значення гармонійних струму і напруги.
3. Запишіть комплексне число в алгебраїчній, тригонометричній і показовій формах. Поясніть форми подання на комплексній площині.

4. Пояснити подання гармонійних коливань в комплексній формі. Дайте визначення комплексної амплітуди.
5. Поясніть операції диференціювання і інтегрування з комплексними числами.
6. Елементна база частотного аналізу.
7. Запишіть формули для визначення комплексного опору ємності і індуктивності.
8. Запишіть формули для визначення комплексної провідності ємності і індуктивності.
9. Накресліть і поясніть векторні діаграми для опору, ємності, індуктивності.
10. Миттєва і середня за період потужності гармонійного коливання на опорі, ємності, індуктивності.
11. Сформулюйте закони Кірхгофа для комплексних амплітуд.
12. Виконайте аналіз послідовного RC – кола. Складіть формули для розрахунку струму і напруги на його елементах.
13. Накресліть схеми RC – чотириполосників і дайте означення амплітудно– частотної і фазочастотної характеристик комплексного коефіцієнта передачі напруги.
14. Складіть формули для розрахунку комплексних коефіцієнтів передачі напруги RC- чотириполосників.
15. Накресліть амплітудно–частотну і фазочастотну характеристики комплексних коефіцієнтів передачі напруги чотириполосників на основі RC – кола. Дайте визначення частоти зрізу.
16. Виконайте аналіз послідовного RL – кола. Складіть формули для розрахунку струму і напруги на його елементах.
17. Накресліть схеми RL – чотириполосників і дайте означення амплітудно– частотної і фазочастотної характеристик комплексного коефіцієнта передачі напруги.
18. Поясніть частотні характеристики RL –чотириполосників.
19. Накресліть схему послідовного RLC – кола і дайте означення амплітудно – частотної і фазочастотної характеристик комплексного коефіцієнта передачі напруги.
20. Виконайте аналіз послідовного RLC – кола. Складіть формули для розрахунку струму і напруги на його елементах.

21. Запишіть формули для резонансної частоти, характеристичного опору, добротності коливального контуру.
22. Накресліть векторні діаграми для послідовного коливального контуру до резонансу, при резонансі, після резонансу.
23. Нарисувати і пояснити частотні характеристики послідовного коливального контуру.
24. Дайте означення ширини смуги пропускання і запишіть формулу для її розрахунку.
25. Накресліть схему паралельного RLC – кола, а також його схему заміщення поблизу резонансу.
26. Накресліть векторні діаграми для паралельного коливального контуру до резонансу, при резонансі, після резонансу.
27. Запишіть формулу для еквівалентного резонансного опору паралельного коливального контуру.
28. Поясніть фізичний зміст резонансу в послідовному і паралельному коливальних контурах.
29. Поясніть застосування матричних методів для аналізу частотних характеристик кіл.
30. Дайте означення комплексної, повної, активної, реактивної потужностей гармонійного струму.
31. Поясніть умови передачі максимальної потужності від джерела енергії до навантаження.

32.

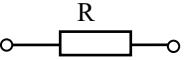
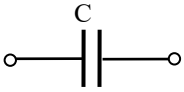

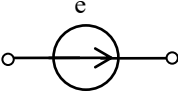
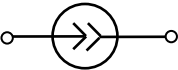
4 АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ КІЛ У ЧАСОВІЙ ОБЛАСТІ

Метою аналізу лінійних кіл у часовій області є розрахунки залежностей у часі струмів і напруг на елементах кола при вхідному впливі заданої форми.

4.1 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЛІНІЙНОГО КОЛА В ЧАСОВІЙ ОБЛАСТІ

Елементною базою для аналізу є опори, ємності, індуктивності, джерела струму і напруги. Математичні моделі елементів для часового аналізу представлено в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Елементна база моделювання

Елемент	Умовна позначка	Математичний опис
Опір		$u = R i$ $i = G u$
Ємність		$i = C \frac{du}{dt}$ $u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$
Індуктивність		$u = L \frac{di}{dt}$ $i(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt$
Джерело напруги		$e(t)$
Джерело струму		$i_s(t)$

В якості основних компонентних рівнянь для ємності і індуктивності ухвалюються диференціальні співвідношення, що представлені в таблиці.

Топологічні рівняння складаються за законами Кірхгофа для миттєвих значень струмів і напруг на елементах кола. Внаслідок лінійності компонентних і топологічних рівнянь математичною моделлю лінійного кола в часовій області служать звичайні лінійні диференціальні рівняння.

В загальному випадку модель лінійного кола описується диференціальним рівнянням n-го порядку:

$$b_n \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = f(t), \quad (4.1)$$

де $y(t)$ – реакція кола (струм або напруги на елементі кола),

$f(t)$ – функція, що описує вхідний вплив.

n – порядок диференціального рівняння.

Число n , яке також називається порядком кола, залежить від числа реактивних елементів – ємностей і індуктивностей у колі.

Загальний розв'язок рівняння (4.1) шукають у вигляді суми двох складових:

$$y(t) = y_{\text{вл}}(t) + y_{\text{вм}}(t), \quad (4.2)$$

де $y_{\text{вл}}(t)$ - вільна складова,

$y_{\text{вм}}(t)$ - вимушена складова.

Вимушена складова характеризує стаціонарний режим у колі і відповідає *частковому розв'язку* неоднорідного рівняння (4.1). Вид часткового розв'язку визначається видом функції $f(t)$ вхідного впливу.

Вільна складова характеризує вільні коливання в колі при відсутності вхідного впливу $f(t)$ і визначається загальним розв'язком однорідного рівняння:

$$b_n \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = 0. \quad (4.3)$$

Розв'язок однорідного рівняння береться у вигляді: $y_{\text{вл}}(t) = A \exp(pt)$, де A, p – постійні коефіцієнти. Підстановка цієї формули в (4.3) дає характеристичне рівняння:

$$b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0. \quad (4.4)$$

Кожний k -й корінь із n коренів цього рівняння визначає незалежний розв'язок $y_{\text{вл}_k}(t) = A_k \exp(p_k t)$. З комбінації незалежних розв'язків складається загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y_{\text{вл}}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}. \quad (4.5)$$

Для знаходження загального розв'язку рівняння (4.1) необхідно задати для моменту часу $t=0$ початкові умови для функції $y(t)$ і її похідних. При аналізі кіл початкові умови визначаються з умови безперервності струмів на індуктивностях $i_L(0-) = i_L(0+)$ і безперервності напруги на ємностях $u_C(0-) = u_C(0+)$.

4.2 ТЕСТОВІ СИГНАЛИ

Розв'язок диференціальних рівнянь (4.1) звичайно проводять для тестових вхідних впливів $f(t)$ у вигляді одиничної ступінчастої $1_0(t)$ або одиничної імпульсної функції $\delta(t)$. За реакціями на ці функції, отриманими в результаті розв'язку диференціального рівняння, може бути складена реакція кола на вхідний вплив довільної форми.

4.2.1 Одинична ступінчаста функція

Аналітично одинична ступінчаста функція $1_0(t)$ (в математиці це функція Хевісайда) записується в такий спосіб:

$$1_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

При запізнюванні на час τ

$$1_0(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0, \\ 1, & t \geq \tau. \end{cases} \quad (4.7)$$

На рис. 4.1 представлена одинична ступінчаста функція, певна для моменту часу $t=0$ (а) і зміщена на час τ (б).

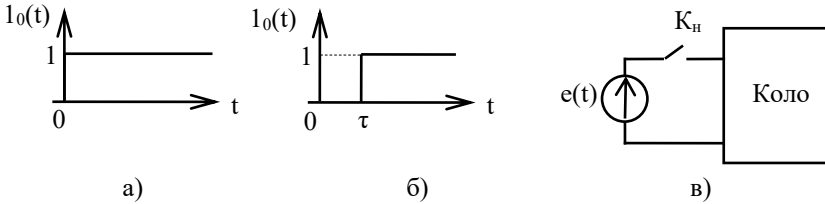


Рисунок 4.1

За допомогою одиничної ступінчастої функції моделюють підключення джерел сигналу до кола. Наприклад, операцію підключення сигналу $e(t)$ до входу кола на рис. 4.1,в у момент часу $t=0$ можна представити функцією:

$$e(t)1_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

4.2.2 Одинична імпульсна функція

Одинична імпульсна функція $\delta(t)$ (в математиці це дельта-функція Дірака) являє собою прямокутний імпульс нескінченно тонкий (тривалість імпульсу τ прагне до нуля) і нескінченно високий (висота імпульсу h прямує до нескінченності) із площею, рівною одиниці $s = \tau \cdot h = 1$. Цю функцію можна записати в такий спосіб:

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, t \neq 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = 1. \end{cases} \quad (4.8)$$

На рисунку 4.2 дельта функція, що позначена стрілкою, показана для моменту часу $t=0$ (а) і при запізнюванні на час τ (б).

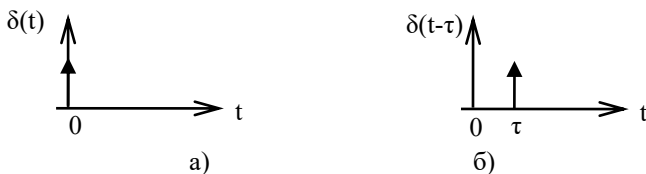


Рисунок 4.2

Моделлю імпульсної функції є короткий прямокутний імпульс.
Для запізненої імпульсної функції:

$$\begin{cases} \delta(t - \tau) = 0, t \neq \tau, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = \int_{\tau-}^{\tau+} \delta(t - \tau) dt = 1. \end{cases} \quad (4.9)$$

Множення функції $f(t)$ на імпульсну функцію $\delta(t)$ приводить до наступного співвідношення:

$$f(t)\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0, t \neq \tau, \\ f(\tau)\delta(t - \tau), t = \tau. \end{cases}$$

Інтеграл від цього співвідношення згідно (4.8):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - \tau) dt = f(\tau) \int_{\tau-}^{\tau+} \delta(t - \tau) dt = f(\tau) \quad (4.10)$$

З цієї формули випливає, що дельта функція має властивість вибірки (фільтруючу властивість), що дозволяють виділяти з функції окремі її значення, відповідні до моменту часу τ .

- *Зв'язок одиничної і ступінчастої функцій.* Якщо обрати похідну від функції на рис. 4.1,а, то при $t < 0$ і $t > 0$ вона буде дорівнювати нулю, а при $t = 0$ – нескінченності (див. рис. 4.2,а). Якщо ж обрати інтеграл від функції на рис. 4.2,а, то при $t < 0$ він буде дорівнювати нулю, а при $t \geq 0$ – одиниці (див. рис. 4.1,а). Таким чином, імпульсна функція є похідною від ступінчастої функції, а ступінчата – інтегралом від імпульсної функції:

$$\begin{cases} \frac{dI_0(t)}{dt} = \delta(t), \\ \int \delta(t) dt = I_0(t). \end{cases} \quad (4.11)$$

4.3 ПЕРЕХІДНА І ІМПУЛЬСНА ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛА

- *Перехідна характеристика $h(t)$* - це реакція кола на вхідний вплив у вигляді одиничної ступінчастої функції $I_0(t)$.
- *Імпульсна характеристика $k(t)$* – це реакція кола на одиничну імпульсну функцію $\delta(t)$.

Обидві ці характеристики визначаються при нульових початкових умовах, тобто при розряджених ємностях $u_C(0) = 0$ і розряджених індуктивностях $i_L(0) = 0$.

На рис. 4.3 продемонстроване визначення перехідної (а) і імпульсної (б) характеристик.

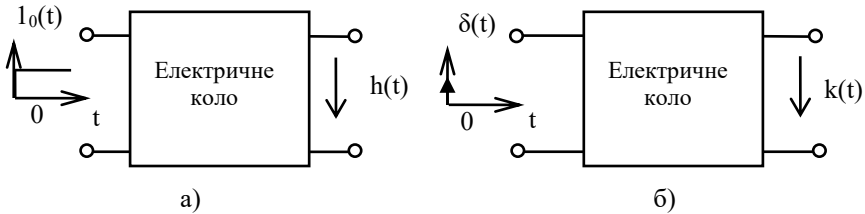


Рисунок 4.3

- *Зв'язок перехідної та імпульсної характеристик.* Нехай рівняння (4.1) складене для розрахунків перехідної характеристики, тобто $f(t) = I_0(t)$, $y(t) = h(t)$. Знайдемо похідні від лівої і правої частин цього рівняння. Похідна від вхідного впливу буде визначати імпульсну функцію $f'(t) = I_0'(t) = \delta(t)$, а похідна від реакції буде визначати імпульсну характеристику $y'(t) = h'(t) = k(t)$. Навпаки, для рівняння (4.1), складеного для $f(t) = \delta(t)$, $y(t) = k(t)$, інтеграл від вхідного впливу буде визначати одиничну ступінчасту функцію, а інтеграл від реакції $k(t)$ – перехідну характеристику $h(t)$.

Таким чином, імпульсна характеристика є похідною від перехідної характеристики, а перехідна – інтегралом від імпульсної характеристики:

$$\begin{cases} \frac{dh(t)}{dt} = k(t), \\ \int k(t) dt = h(t). \end{cases} \quad (4.12)$$

Знаходження перехідної характеристики зводиться до розрахунків реакції кола, при підключенні до його входу в момент часу $t=0$ джерела постійної напруги або струму. Це завдання набагато простіше, чим розрахунки реакції кола на імпульсний вплив. Тому, як правило, спочатку визначають перехідну характеристику, а потім в результаті взяття похідної одержують імпульсну характеристику.

4.4 ІНТЕГРАЛИ НАКЛАДЕННЯ. ЗНАХОДЖЕННЯ РЕАКЦІЇ КОЛА НА ДОВІЛЬНИЙ ВПЛИВ

Інтеграли накладення – інтеграл Дюамеля та інтеграл згортки, дозволяють визначити реакцію кола $u_2(t)$ на довільний сигнал $u_1(t)$ по відомій перехідній або імпульсній характеристиці. Інтеграли формулюються на основі *принципу накладення (суперпозиції)*, згідно з яким реакція лінійного електричного кола на суму впливів дорівнює сумі реакцій кола на кожний вплив окремо. Побудови, що пояснюють висновок формул для інтегралів, показані на рис. 4.4.

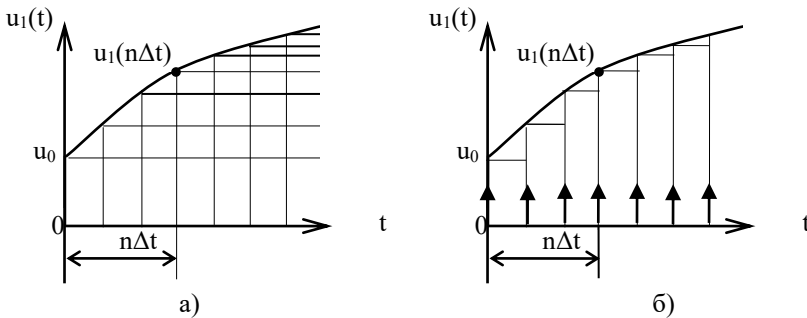


Рисунок 4.4

• *Інтеграл* Дюамеля. Нехай відома перехідна характеристика $h(t)$ кола. У відповідність із рис. 4.4,а розділимо вісь часу на рівні інтервали $\Delta\tau$ і представимо вхідний сигнал $u_1(t)$ послідовністю ступінчастих функцій. З рисунка для моменту часу $t=0$ одержимо ступінчасту функцію $u_1(0)1_0(t)$, а для моменту часу $t=n\Delta\tau$ одержимо ступінчасту функцію $\Delta u_1(n\Delta\tau)1_0(t-n\Delta\tau)$, де $\Delta u_1(n\Delta\tau) = u_1(n\Delta\tau) - u_1[(n-1)\Delta\tau]$ - висота функції.

По відомій перехідній характеристиці знаходимо реакції кола на ступінчасті функції:

$$u_2(0) = u_1(0)h(t), u_2(n\Delta\tau) = \Delta u_1(n\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau), n=1,2,\dots$$

Підсумовуючи до моменту часу $t=m\Delta\tau$ усі реакції на ступінчасті функції, одержимо наближене вираження для вихідного сигналу:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= u_1(0)h(t) + \sum_{n=1}^m \Delta u_1(n\Delta\tau)h(t - n\Delta\tau) = \\ &= u_1(0)h(t) + \sum_{n=1}^m \frac{\Delta u_1(n\Delta\tau)}{\Delta\tau} h(t - n\Delta\tau)\Delta\tau. \end{aligned}$$

Переходячи до меж $\Delta\tau \rightarrow 0$, $n\Delta\tau \rightarrow \tau$, $\Delta u_1(n\Delta\tau)/\Delta\tau \rightarrow u_1'(\tau)$, одержимо формулу інтеграла Дюамеля:

$$u_2(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(\tau)h(t - \tau). \quad (4.13)$$

Шляхом заміни змінних і інтегрування по частинах можна скласти ще три форми інтеграла Дюамеля:

$$u_2(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1(\tau)h'(t - \tau), \quad (4.14)$$

$$u_2(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(t-\tau)h(\tau), \quad (4.15)$$

$$u_2(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1(t-\tau)h'(\tau). \quad (4.16)$$

• *Інтеграл згортки.* Вхідний сигнал у відповідність із рис. 4.4,б представляється послідовністю прямокутників з підставою $\Delta\tau$ і висотою $u_1(n\Delta\tau)$ в n -й точці. Для кожної n -й точки розбивки вводиться імпульсна функція $\delta(t-n\Delta\tau)$, позначена на рисунку стрілкою, з ваговим коефіцієнтом, рівним площі відповідного прямокутника $s_n = u_1(n\Delta\tau)\Delta\tau$.

По відомій імпульсній характеристиці знаходимо реакції кола на імпульсні функції:

$$u_2(n\Delta\tau) = u_1(n\Delta\tau)\Delta\tau k(t-n\Delta\tau), n=1,2,\dots$$

Підсумовуючи до моменту часу $t=m\Delta\tau$ усі реакції на імпульсні функції, одержимо наближене вираження для вихідного сигналу:

$$u_2(t) = \sum_{n=0}^m u_1(n\Delta\tau)\Delta\tau k(t-n\Delta\tau).$$

Переходячи до меж $\Delta\tau \rightarrow 0$, $n\Delta\tau \rightarrow \tau$, $u_1(n\Delta\tau) \rightarrow u_1(\tau)$, одержимо формулу інтеграла згортки:

$$u_2(t) = \int_0^t u_1(\tau)k(t-\tau). \quad (4.17)$$

В результаті заміни змінних можна одержати другу форму інтеграла:

$$u_2(t) = \int_0^t u_1(t-\tau)k(\tau). \quad (4.18)$$

При розрахунках вибирається та форма інтеграла Дюамеля або згортки, яка дає більш просте підінтегральне вираження.

4.5 ЧАСОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КІЛ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Кола першого порядку – це з'єднання опори R з ємністю C або індуктивністю L . Математичною моделлю кіл першого порядку у часовій області є лінійне диференціальне рівняння першого порядку.

4.5.1 Реакція послідовного RC – кола на ступінчастий вплив

На рис. 4.5 зображена схема послідовного RC - кола. В якості вхідного сигналу $u_1(t)$ взята ступінчаста функція, що моделює підключення джерела постійної напруги E до кола в момент часу $t=0$:

$$u_1(t) = E1_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ E, & t \geq 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Початкова напруга на ємності $u_C(0) = 0$.

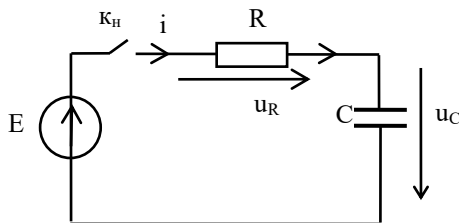


Рисунок 4.5

• *Аналіз схеми.* У колі $i_R = i_C = i$. За законом Кірхгофа для напруг:

$$u_1 = u_R + u_C = Ri + u_C. \quad (4.20)$$

Струм у ємності пов'язаний з напругою формулою:

$$i = C \frac{du_C}{dt}. \quad (4.21)$$

Підстановкою (4.21) в (4.20) одержуємо диференціальне рівняння:

$$u_1 = RC \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

Перепишемо це рівняння, визначивши u_1 за (4.19) і ввівши постійну часу кола $\tau_c = RC$:

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau_c} u_C = \frac{1}{\tau_c} E. \quad (4.22)$$

Цьому рівнянню відповідає характеристичне рівняння $p + 1/\tau_c = 0$. Звідси $p = -1/\tau_c$. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння, що характеризує вільні коливання $u_{C_{вл}}$ в колі, запишеться у вигляді:

$$u_{C_{вл}} = A e^{-t/\tau_c}. \quad (4.23)$$

Частковий розв'язок $u_{C_{вм}}$, що характеризує стаціонарний режим у колі, беремо рівним напрузі E : $u_{C_{вм}} = E$. Правильність цього вибору підтверджується безпосередньою підстановкою $u_{C_{вм}}$ в рівняння (4.22). Цей частковий розв'язок можна також одержати з аналізу стаціонарного режиму в колі, який настає при повному заряді ємності до напруги E . Струм у колі при цьому стає рівним нулю, а напруга $u_C = E$.

З початкової умови $u_C(0) = 0$ знаходимо коефіцієнт A :

$$u_C(0) = A e^0 + E = 0, \quad A = -E.$$

Таким чином, розв'язок рівняння (4.22) буде мати вигляд:

$$u_C(t) = u_{C_{вл}} + u_{C_{вм}} = E - E e^{-t/\tau_c} = E(1 - e^{-t/\tau_c}). \quad (4.24)$$

За (4.21), (4.24) становимо формули для струму в колі і напруги на опорі:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = CE \frac{1}{\tau_c} e^{-t/\tau_c} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau_c}, \quad (4.25)$$

$$u_R = R i = E e^{-t/\tau_c}. \quad (4.26)$$

На рис. 4.6 наведені графіки реакції на елементах кола при підключенні джерела постійної напруги E , що побудовані за співвідношеннями (4.24) – (4.26).

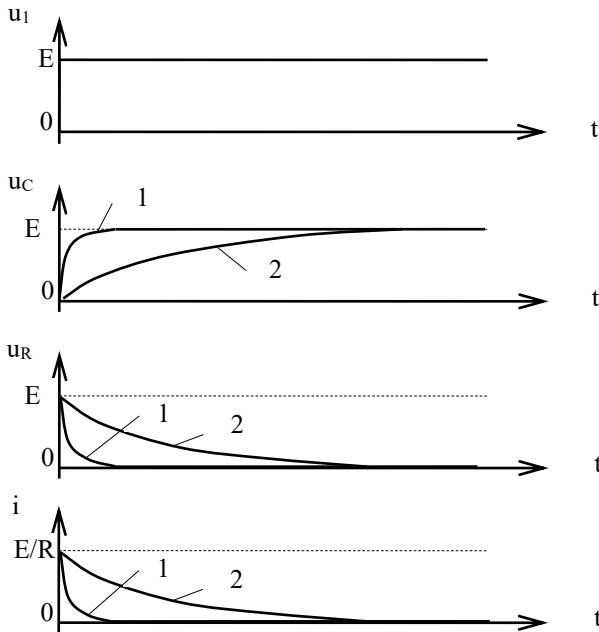


Рисунок 4.6

Із графіків випливає, що RC - коло має інерційність, яка забезпечує плавний заряд ємності до напруги E . Швидкість заряду залежить від величини постійної часу кола. Чим менше постійна часу, тем швидше відбувається заряд. На рисунках цифрою 1 позначені графіки з малою постійною часу τ_{c1} , а цифрою 2 – з великою постійною часу τ_{c2} ($\tau_{c2} > \tau_{c1}$). В міру заряду конденсатора зарядний струм i , напруга u_R на опорі, зменшуються, а напруга на ємності зростає. У будь-який момент часу виконується умова $u_1(t) = u_R(t) + u_C(t)$.

4.5.2 Реакція RC – кола на сигнал прямокутної форми

Прямокутний імпульс висотою E и тривалістю τ_{im} можна представити, як показано на рис. 4.7, комбінацією ступінчастих функцій, зміщених відносно один одного на τ_{im} :

$$u_1(t) = E[1_0(t) - 1_0(t - \tau_{im})]. \quad (4.27)$$

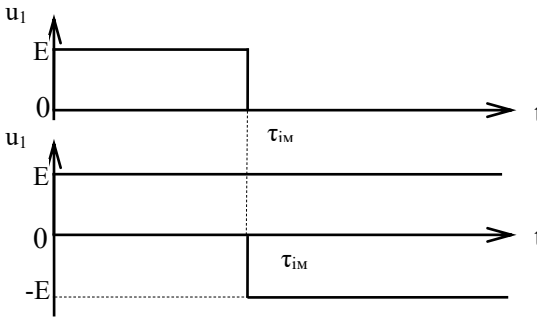


Рисунок 4.7

За співвідношеннями (4.24) - (4.26) складемо реакції на елементах кола у вигляді суми реакцій від ступінчастих функцій в (4.27):

$$u_C(t) = E \left[\left(1 - e^{-t/\tau_c}\right) 1_0(t) - \left(1 - e^{-(t-\tau_{im})/\tau_c}\right) 1_0(t - \tau_{im}) \right], \quad (4.28)$$

$$u_R(t) = E \left[e^{-t/\tau_c} 1_0(t) - e^{-(t-\tau_{im})/\tau_c} 1_0(t - \tau_{im}) \right], \quad (4.29)$$

$$i(t) = \frac{E}{R} \left[e^{-t/\tau_c} 1_0(t) - e^{-(t-\tau_{im})/\tau_c} 1_0(t - \tau_{im}) \right]. \quad (4.30)$$

Графіки цих функцій разом із вхідним сигналом наведено на 4.8. Цифрою 1 позначені графіки для малої постійної часу τ_1 , цифрою 2 – для великої постійної часу τ_{c2} ($\tau_{c1} < \tau_{c2}$) у порівнянні із тривалістю імпульсу.

До моменту часу τ_{im} відбувається заряд конденсатора від джерела напруги E . Схема проходження зарядного струму $i_{зр}$ показана на рис. 4.9,а. В момент закінчення імпульсу $t = \tau_{im}$ виникає негативний

стрибок напруги величиною E , вхідна напруга стає рівною нулю і ємність починає розряджатися. Схема розряду конденсатора i_{pz} показана на рис. 4.9,б. Швидкість заряду і розряду визначається величиною постійною часу τ_c кола.

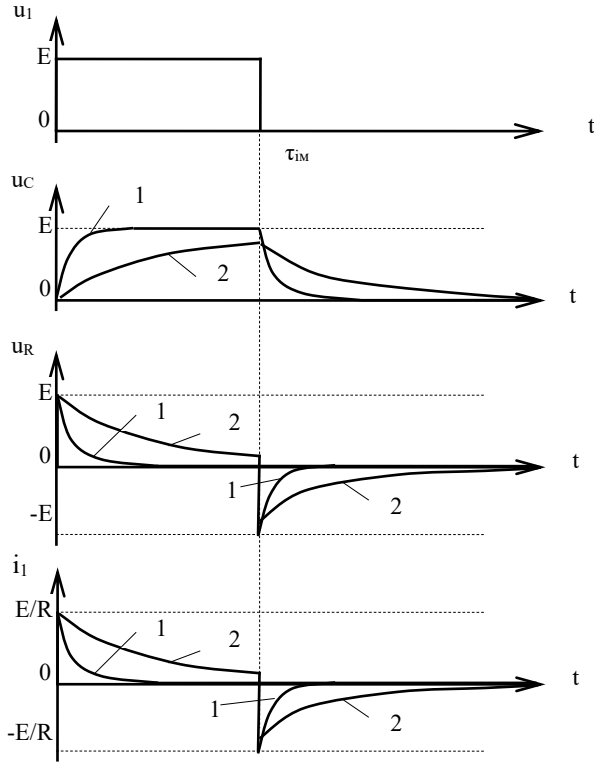


Рисунок 4.8

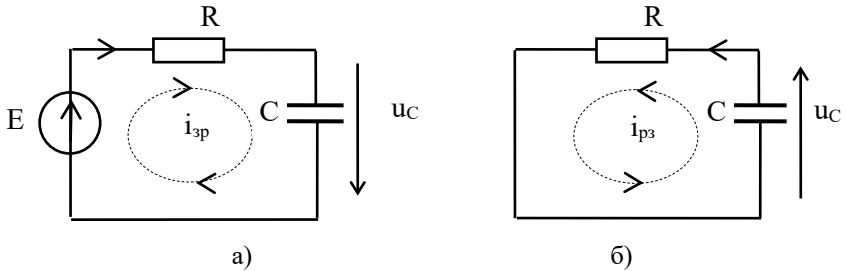


Рисунок 4.9

На рис. 4.8 ємність у колі з малою постійною часу τ_{c1} встигає зарядитися до напруги E за час дії імпульсу, а ємність у колі з великою постійною часу τ_{c2} не встигає зарядитися до напруги E , тому в момент часу $t=\tau_{im}$ напруга на ємності буде менше E .

4.5.3 Перехідні та імпульсні характеристики RC – кола

Перехідні характеристики складаються за співвідношеннями (4.24) – (4.26) при $E=1$, і визначаються для моментів часу $t \geq 0$ за допомогою ступінчастої функції:

$$h_C(t) = (1 - e^{-t/\tau_c}) 1_0(t), \quad (4.31)$$

$$h_i(t) = \frac{1}{R} e^{-t/\tau_c} 1_0(t), \quad (4.32)$$

$$h_R(t) = e^{-t/\tau_c} 1_0(t). \quad (4.33)$$

За перехідними характеристиками згідно (4.12) обчислюються імпульсні характеристики.

Диференціюючи співвідношення (4.31) - (4.33), що представляють собою добуток двох функцій, одержимо відповідні імпульсні характеристики:

$$\begin{aligned} k_C(t) &= \frac{d}{dt} \left[(1 - e^{-t/\tau_c}) 1_0(t) \right] = \\ &= \frac{1}{\tau_c} e^{-t/\tau_c} 1_0(t) + (1 - e^0) \delta(t) = \frac{1}{\tau_c} e^{-t/\tau_c} 1_0(t), \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$k_i(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{e^{-t/\tau_c}}{R} 1_0(t) \right] = -\frac{e^{-t/\tau_c}}{\tau_c R} 1_0(t) + \frac{1}{R} \delta(t), \quad (4.35)$$

$$k_R(t) = \frac{d}{dt} \left[e^{-t/\tau_c} 1_0(t) \right] = -\frac{e^{-t/\tau_c}}{\tau_c} 1_0(t) + \delta(t). \quad (4.36)$$

На рис. 4.10 наведено графіки імпульсних характеристик, що побудовані за (4.34) – (4.36).

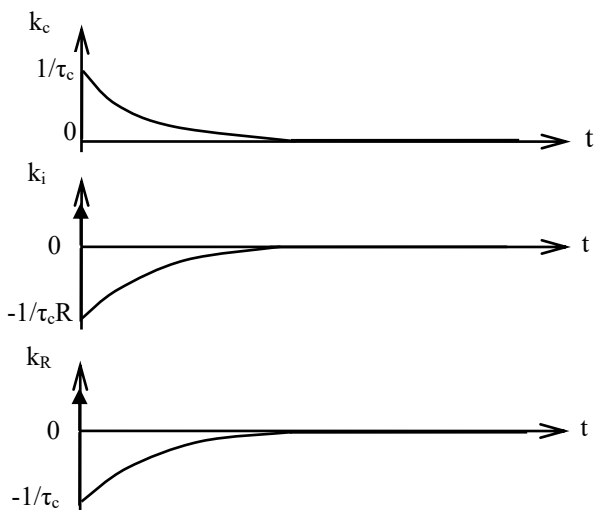


Рисунок 4.10

Імпульсні функції на рисунках, які позначені стрілками, моделюють нескінченно тонкий імпульс з нескінченно великою амплітудою. Протягом цього імпульсу відбувається миттєвий заряд ємності до напруги $1/\tau_c$. По закінченні цього імпульсу при $t > 0^+$ відбувається розряд ємності. Процесу розряду відповідає схема на рис. 4.9,б. Відзначимо, що графіки на рис. 4.10 аналогічні графікам на рис. 4.8 при $\tau_{iM} \rightarrow 0$.

Імпульсні характеристики на рис. 4.10 при $t > 0^+$ відповідають вільним коливанням у колі, оскільки вони відбуваються при відсутності вхідного впливу.

4.5.4 Реакція RC - кола на гармонійний вплив

Нехай до входу RC - кола в момент часу $t=0$ підключається гармонійне коливання виду:

$$u_1(t) = E \sin(\omega t + \varphi_E). \quad (4.37)$$

Початкові умови на ємності прийемо нульовими: $u_C(0) = 0$.

Виконаємо аналіз кола двома методами – шляхом розв'язку диференціального рівняння і за допомогою інтеграла згортки.

• *Розв'язок диференціального рівняння.* Коло характеризується диференціальним рівнянням (4.22), йому відповідають вільні коливання (4.23).

Для знаходження часткового розв'язку рівняння (4.22) представимо (4.37) у комплексній формі

$$\dot{u}_1(t) = E e^{j(\omega t + \varphi_E)}. \quad (4.38)$$

В аналогічному виді розшукуємо вимушену складову:

$$\dot{u}_{\text{C}_{\text{BM}}}(t) = B e^{j(\omega t + \varphi_u)}, \quad (4.39)$$

Підставивши (4.38), (4.39) в диференціальне рівняння (4.22) і скоротивши множник $\exp(j\omega t)$, одержимо:

$$\left(j\omega + \frac{1}{\tau_c} \right) B e^{j\varphi_u} = \frac{E}{\tau_c} e^{j\varphi_E}$$

або

$$\left(j\omega + \frac{1}{\tau_c} \right) B = \frac{E}{\tau_c} e^{j(\varphi_E - \varphi_u)} = \frac{E}{\tau_c} [\cos(\varphi_E - \varphi_u) + j\sin(\varphi_E - \varphi_u)].$$

Це рівняння щодо реальної і уявної частин запишемо у вигляді двох рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau_c} B = \frac{E}{\tau_c} \cos(\varphi_E - \varphi_u), \\ \omega B = \frac{E}{\tau_c} \sin(\varphi_E - \varphi_u). \end{cases} \quad (4.40)$$

Звівши в квадрат обидві частини рівнянь і склавши, одержимо

$$\left(\omega^2 + \frac{1}{\tau_c^2} \right) B^2 = \frac{E^2}{\tau_c^2},$$

звідси

$$B = \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega\tau_c)^2}}. \quad (4.41)$$

В свою чергу, поділивши друге рівняння в (4.40) на перше, одержимо:

$$\omega\tau_c = \operatorname{tg}(\varphi_E - \varphi_u)$$

або

$$\varphi_u = \varphi_E - \arctg(\omega\tau_c) = \varphi_E - \varphi, \quad (4.42)$$

де $\varphi = \arctg(\omega\tau_c)$.

Отже, згідно (4.41), (4.42) частковий розв'язок диференціального рівняння (4.22) буде мати вигляд:

$$u_{C_{\text{ВМ}}}(t) = \operatorname{Im} \left[\frac{E}{\sqrt{1 + (\omega\tau_c)^2}} e^{j[\omega t + \varphi_E - \varphi]} \right] = \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega\tau_c)^2}} \sin(\omega t + \varphi_E - \varphi). \quad (4.43)$$

Відзначимо, що цей розв'язок, що характеризує стаціонарний гармонійний режим у колі, можна було б відразу записати, помноживши комплексний коефіцієнт передавання (3.46) RC - кола на комплексну амплітуду $\dot{U}_{\text{мл}} = E \exp(j\varphi_E)$ вхідного сигналу.

Складемо розв'язок диференціального рівняння (4.22), визначивши згідно (4.23) його вільну складову:

$$u_C(t) = u_{C_{\text{ВЛ}}} + u_{C_{\text{ВМ}}} = A e^{-t/\tau_c} + \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega\tau_c)^2}} \sin(\omega t + \varphi_E - \varphi).$$

Підставивши це вираження в початкову умову $u_C(0) = 0$, одержимо:

$$A = \frac{-E}{\sqrt{1 + (\omega\tau_c)^2}} \sin(\varphi_E - \varphi),$$

звідси

$$u_{C_{\text{ВЛ}}}(t) = A e^{-t/\tau_c} = \frac{-E}{\sqrt{1 + (\omega\tau_c)^2}} e^{-t/\tau_c} \sin(\varphi_E - \varphi). \quad (4.44)$$

Таким чином, розв'язок диференціального рівняння згідно (4.43), (4.44) запишеться у вигляді:

$$u_C(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega\tau_c)^2}} \left[\sin(\omega t + \varphi_E - \varphi) - e^{-t/\tau} \sin(\varphi_E - \varphi) \right]. \quad (4.45)$$

На рис. 4.11 наведено графік залежності в часі напруги на ємності $u_C(t)$, побудований за (4.45). На рисунку також наведені графіки, побудовані за (4.43), (4.44) для вимушеної $u_{вм}(t)$ і для вільної $u_{вл}(t)$ складових напруги на ємності.

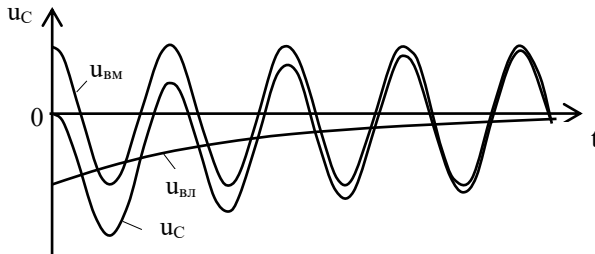


Рисунок 4.11

З графіків видно, що вільна складова $u_{вл}(t)$ забезпечує в міру загасання плавний перехід від початкового значення $u_C(0) = 0$ напруги на ємності до стаціонарного значення напруги, обумовлений вимушеної складовій $u_{вм}(t)$. Швидкість загасання визначається постійною часу $\tau_c = RC$ кола.

• *Розв'язок методом інтеграла згортки.* Для знаходження реакції $u_C(t)$ кола, що розглядається, на вхідний вплив (4.37) скористаємося інтегралом згортки у формі (4.17) і імпульсною характеристикою (4.34):

$$u_C(t) = \int_0^t u_1(\tau) k_C(t - \tau) d\tau = \int_0^t E \sin(\omega\tau + \varphi_E) \frac{1}{\tau_c} e^{-(t-\tau)/\tau_c} d\tau =$$

$$= \frac{E}{\tau_c} e^{-t/\tau_c} \int_0^t e^{\tau/\tau_c} \sin(\omega\tau + \varphi_E) d\tau.$$

Розкривши табличний інтеграл у цій формулі, одержимо:

$$u_C(t) = \frac{E}{\tau_c} e^{-t/\tau_c} \frac{e^{-\frac{\varphi_E}{\omega\tau_c}}}{\omega \left[(1/\omega\tau_c)^2 + 1 \right]} \left\{ e^{\frac{\omega t + \varphi_E}{\omega\tau_c}} \left[\frac{1}{\omega\tau_c} \sin(\omega t + \varphi_E) - \cos(\omega t + \varphi_E) \right] - e^{\frac{\varphi_E}{\omega\tau_c}} \left[\frac{1}{\omega\tau_c} \sin(\varphi_E) - \cos(\varphi_E) \right] \right\}.$$

Звідси

$$u_C(t) = \frac{E\omega\tau_c}{1 + (\omega\tau_c)^2} \left\{ \left[\frac{1}{\omega\tau_c} \sin(\omega t + \varphi_E) - \cos(\omega t + \varphi_E) \right] - e^{-t/\tau_c} \left[\frac{1}{\omega\tau_c} \sin(\varphi_E) - \cos(\varphi_E) \right] \right\}.$$

Ввівши $\operatorname{tg}\varphi = \omega\tau_c$, $\sin\varphi = \omega\tau_c / \sqrt{1 + (\omega\tau_c)^2}$ і виконавши тригонометричне перетворення, прийдемо до формули, тотожної (4.45):

$$u_C(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega\tau_c)^2}} \left[\sin(\omega t + \varphi_E - \varphi) - e^{-t/\tau} \sin(\varphi_E - \varphi) \right],$$

де $\varphi = \operatorname{arctg}(\omega\tau_c)$.

Слід зазначити, що в загальному випадку процедура розрахунків реакції кола на довільний вплив методом інтеграла згортки більш проста в порівнянні з розв'язком диференціального рівняння і зводиться до операції інтегрування, яка може бути виконана чисельно.

4.5.5 Диференціальна і інтегральна RC - ланка

На основі послідовного RC - кола складаються схеми чотириполіусників, представлених на рис. 4.12, які можуть мати функції інтегральної або диференціальної ланки.

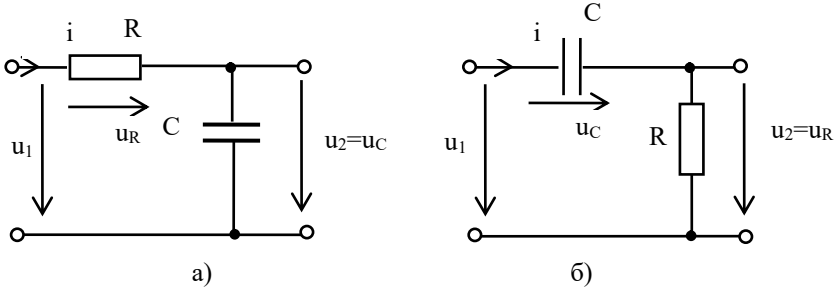


Рисунок 4.12

Для визначення функцій чотириполіусника на рис. 4.12,а знайдемо згідно (4.20) струм у колі:

$$i = \frac{u_R}{R} = \frac{u_1 - u_2}{R} = C \frac{du_2}{dt},$$

звідси

$$du_2 = \frac{1}{\tau_c} (u_1 - u_2) dt .$$

Інтеграл від цього вираження:

$$u_2 = \frac{1}{\tau_c} \int u_1 dt - \frac{1}{\tau_c} \int u_2 dt$$

або

$$u_2 + \frac{1}{\tau_c} \int u_2 dt = \frac{1}{\tau_c} \int u_1 dt . \quad (4.46)$$

При великій постійній часі τ_c другим доданком у цій формулі можна зневажити, тоді $u_2 \approx \frac{1}{\tau_c} \int u_1 dt$, тобто коло на рис. 4.12,а буде являти собою інтегральну ланку. При малих τ_c , навпаки, можна

зневажити першим доданком в (4.46), тоді $u_2 \approx u_1$, тобто ланка буде повторювати форму вхідного сигналу.

Для схеми на рис. 4.12,б згідно (4.21) маємо:

$$u_2 = u_R = Ri = RC \frac{du_C}{dt} = \tau_c \frac{d(u_1 - u_2)}{dt}.$$

Звідси випливає:

$$u_2 + \tau_c \frac{du_2}{dt} = \tau_c \frac{du_1}{dt}. \quad (4.47)$$

При малій постійній часу τ_c другим доданком у цій формулі можна зневажити, тоді $u_2 \approx \tau_c du_1/dt$, тобто коло на рис. 4.12,б буде являти собою диференцівальну ланку. При більших τ_c , навпаки, можна зневажити першим доданком в (4.47), тоді $u_2 \approx u_1$, тобто ланка буде повторювати форму вхідного сигналу.

Дані висновки підтверджуються графіками на рис. 4.6. Для малої постійної часу τ_{c1} напруга на опорі близько за формою до похідної від ступінчастої функції, а напруга на ємності при великій постійній часу τ_{c2} близько за формою до лінійно зростаючої функції, що є інтегралом від ступінчастого впливу.

• *Слід зазначити*, що згідно з висновками розділу 3.6.3 у частотній області інтегруюче коло на рис. 4.12,а являє собою найпростіший фільтр нижніх частот, а коло на рис. 4.12,а, що диференціює, – найпростіший фільтр верхніх частот.

4.5.6 Реакція послідовного RL – кола на ступінчастий вплив

Коло, що утворено з послідовного з'єднання R- і L – елементів, показано на рис. 4.13. В момент часу $t=0$ до кола підключається джерело постійної напруги величиною E . Відповідний вхідний вплив $u_1(t)$ моделюється ступінчастою функцією:

$$u_1(t) = E1_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ E, & t \geq 0. \end{cases} \quad (4.48)$$

Початковий струм в індуктивності прийнятий рівним нулю:
 $i_L(0) = i_1(0) = 0$.

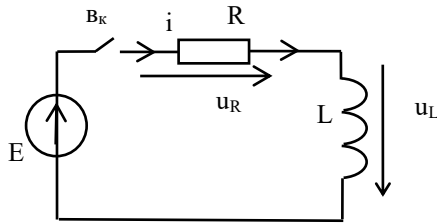


Рисунок 4.13

• *Аналіз схеми.* У колі $i_R = i_L = i$. За законом Кірхгофа для напруг:

$$u_1 = u_R + u_L = Ri + u_L. \quad (4.49)$$

Згідно (1.16) струм в індуктивності пов'язаний з напругою формулою:

$$u_L = L \frac{di}{dt}. \quad (4.50)$$

Підстановкою (4.50) в (4.49), одержуємо диференціальне рівняння:

$$u_1 = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

Перепишемо це рівняння, визначивши u_1 за (4.48) і ввівши постійну часу $\tau_c = L/R$ кола:

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau_c} i = \frac{1}{\tau_c} \cdot \frac{E}{R}. \quad (4.51)$$

Цьому рівнянню відповідає характеристичне рівняння $p + 1/\tau_c = 0$. Звідси $p = -1/\tau_c$. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння, що характеризує вільні коливання в колі, запишеться у вигляді:

$$i_{вл} = A e^{-t/\tau_c}.$$

Частковий розв'язок $i_{\text{вм}}$, що характеризує стаціонарний режим у колі, визначається у вигляді: $i_{\text{вм}} = E/R$. Правильність цього вибору підтверджується безпосередньою підстановкою $i_{\text{вм}}$ в рівняння (4.51). Цей частковий розв'язок можна також одержати з аналізу стаціонарного режиму в колі, який настає при повному заряді індуктивності струмом. При цьому напруга на індуктивності стає рівною нулю, а вся вхідна напруга E прикладається до опору.

З початкової умови $i_L(0) = i(0) = 0$ знаходимо коефіцієнт A :

$$i(0) = i_{\text{вд}} + i_{\text{вм}} = A e^0 + E/R = 0,$$

звідси $A = -E/R$.

Таким чином, розв'язок рівняння (4.51) буде мати вигляд:

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau_c}). \quad (4.52)$$

За (4.52) становимо формули для напруг на опорі і індуктивності:

$$u_R = R i = E (1 - e^{-t/\tau_c}), \quad (4.53)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{E}{R} \frac{1}{\tau_c} e^{-t/\tau_c} = E e^{-t/\tau_c}. \quad (4.54)$$

Отримані формули для напруг на опорі і індуктивності збігаються з формулами (4.24), (4.26) RC - кола. Причому формула (4.53) для напруги u_R RL - кола повторює формулу (4.24) для напруги u_C RC - кола, а формула (4.54) для напруги u_L RL - кола повторює формулу (4.26) для напруги u_R RC - кола.

Отже, при підключенні джерела постійної напруги E до RL - кола, часова характеристика $u_R(t)$ буде відповідати графіку $u_C(t)$ на рис. 4.6, а часова характеристика $u_L(t)$ - графіку $u_R(t)$ на цьому ж рисунку.

• *Диференціальна та інтегральна RL – ланка.* На основі послідовного RL - кола складаються схеми чотирьохполюсників, представлених на рис. 4.14, які можуть мати функції інтегральної або диференціальної ланки. З порівняння формул (4.53), (4.54) з формулами (4.24), (4.26) слід, що коло на рис. 4.14,а по своїх властивостях буде аналогічно RC - колу на рис. 4.12,б, тобто може виконувати функції ланки, що диференціює, а коло на рис. 4.14,б буде аналогічно RC - колу на рис. 4.12,а, тобто може виконувати функції ланки, що інтегрує.

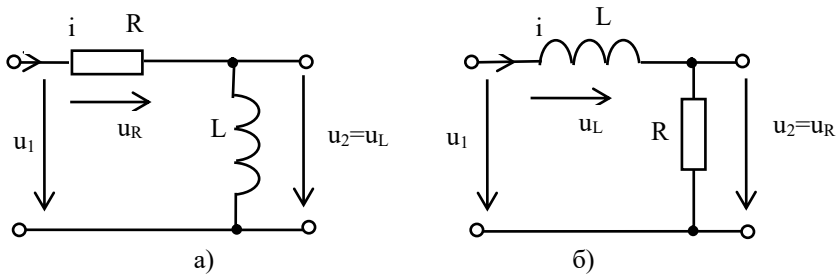


Рисунок 4.14

Отже, схема чотирьохполюсника на рис. 4.14,а відповідає диференціальній ланці, а схема чотирьохполюсника на рис. 4.14,б – інтегральній ланці.

4.6 ЧАСОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КІЛ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Кола другого порядку – це кола, складені із з'єднання опору R, ємності C і індуктивності L. Математичною моделлю кола другого порядку у часовій області є лінійне диференціальне рівняння другого порядку.

4.6.1 Часові характеристики послідовного RLC – кола

Схема послідовного RLC- кола (послідовного коливального контуру) зображена на рис. 4.15.

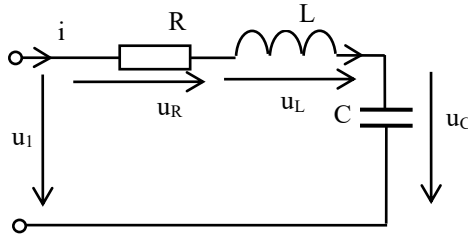


Рисунок 4.15

• *Аналіз схеми і складання диференціального рівняння.* Струм у колі $i_R = i_L = i_C = i$. За законом Кірхгофа для напруг:

$$u_1 = u_R + u_L + u_C = R i + L \frac{di}{dt} + u_C. \quad (4.55)$$

Підстановкою в (4.55) співвідношення $i = C du_C/dt$ для струму через ємність, одержуємо диференціальне рівняння:

$$RC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = u_1.$$

Запишемо це рівняння у вигляді:

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 u_1, \quad (4.56)$$

де $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ - резонансна частота,
 $2\alpha = R/L$ - коефіцієнт загасання.

4.6.1.1 Реакція послідовної RLC – кола на ступінчастий вплив

Нехай вхідний сигналу $u_1(t)$ - ступінчаста функція, що моделює підключення джерела постійної напруги E до кола в момент часу $t=0$:

$$u_1(t) = E 1_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ E, & t \geq 0. \end{cases}$$

Початкові умови на реактивних елементах: $u_C(0) = u_0$, $i_L(0) = 0$.

Для цього впливу диференціальне рівняння (4.56) запишеться у вигляді:

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E. \quad (4.57)$$

Рівнянню (4.57) відповідає характеристичне рівняння:

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0,$$

яке має два корені

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_{\text{вл}}, \quad (4.58)$$

де $\omega_{\text{вл}} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ - частота вільних коливань.

Загальний розв'язок однорідного рівняння, відповідного до рівняння (4.57), буде мати вигляд:

$$u_{C_{\text{вл}}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (4.59)$$

Частковим розв'язком рівняння (4.57) є $u_{C_{\text{вм}}} = E$. Цей розв'язок відповідає стаціонарному режиму у колі, при якому ємність заряджена до напруги E .

Сума загального (4.59) і часткового $u_{C_{\text{вм}}} = E$ рішень являє собою розв'язок диференціального рівняння (4.57):

$$u_C = u_{C_{\text{вл}}} + u_{C_{\text{вм}}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + E. \quad (4.60)$$

По цій залежності визначимо співвідношення для струму і напруги на індуктивності:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \left(A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t} \right), \quad (4.61)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = LC \left(A_1 p_1^2 e^{p_1 t} + A_2 p_2^2 e^{p_2 t} \right). \quad (4.62)$$

Постійні A_1, A_2 визначаються з початкових умов $u_C(0) = u_0$, $i_L(0) = 0$:

$$\begin{cases} u_C(0) = A_1 e^0 + A_2 e^0 + E = u_0, \\ i_L(0) = i(0) = C \left(p_1 A_1 e^0 + p_2 A_2 e^0 \right) = 0. \end{cases}$$

В матричній формі ця система рівнянь має вигляд:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 - E \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вирішуємо систему рівнянь за методом Крамера:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = p_2 - p_1, \\ A_1 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} u_0 - E & 1 \\ 0 & p_2 \end{vmatrix} = \frac{p_2 (u_0 - E)}{p_2 - p_1}, \\ A_2 &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & u_0 - E \\ p_1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-p_1 (u_0 - E)}{p_2 - p_1}. \end{aligned}$$

Підставивши співвідношення для A_1, A_2 в (4.60) – (4.62), одержимо:

$$u_C(t) = E + \frac{E - u_0}{p_1 - p_2} \left(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t} \right), \quad (4.63)$$

$$i(t) = (E - u_0) C \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} \left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t} \right), \quad (4.64)$$

$$u_L(t) = \frac{E - u_0}{\omega_0^2} \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} \left(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t} \right). \quad (4.65)$$

Залежно від співвідношення між коефіцієнтом загасання α і резонансною частотою ω_0 в RLC - колах можливі два режими – *коливальний і аперіодичний*.

Для аналізу режимів виразимо відношення α/ω_0 через параметри послідовного коливального контуру, скориставшись формулами (3.63) – (3.67):

$$\frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{2L}{R} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{2R} = 2Q, \quad (4.66)$$

де $\rho = \sqrt{L/C}$ - характеристичний опір контуру,

$Q = \rho/R$ - добротність контуру.

4.6.1.2 Коливальний режим у послідовного RLC - кола

Коливальний режим має місце при $\omega_0 > \alpha$ або згідно (4.66) при $Q > 1/2$, $\rho > 0,5R$.

Коливальний режим підрозділяється на режим *затухаючих* ($\alpha \neq 0$) і режим *незатухаючих* ($\alpha = 0$) гармонійних коливань.

• *Режим затухаючих коливань.* При $\omega_0 > \alpha$, $\alpha \neq 0$ коріння характеристичного рівняння (4.58) будуть комплексно сполученими: $p_1 = -\alpha + j\omega_{\text{вл}}$, $p_2 = -\alpha - j\omega_{\text{вл}}$. Підстановка цих коренів в (4.64) дає наступне співвідношення для струму в колі:

$$i(t) = (E - u_0) C \frac{\alpha^2 + \omega_{\text{вл}}^2}{2j\omega_{\text{вл}}} e^{-\alpha t} \left(e^{j\omega_{\text{вл}} t} - e^{-j\omega_{\text{вл}} t} \right).$$

Замінивши тут $\alpha^2 + \omega_{\text{вл}}^2$ на ω_0^2 і застосувавши формулу Ейлера (3.8), одержимо:

$$i(t) = (E - u_0) C \frac{\omega_0^2}{\omega_{\text{вл}}} e^{-\alpha t} \sin \omega_{\text{вл}} t = \frac{E - u_0}{\rho} \frac{\omega_0}{\omega_{\text{вл}}} e^{-\alpha t} \sin \omega_{\text{вл}} t. \quad (4.67)$$

Для напруги на ємності з (4.63) впливає:

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= E + \frac{E - u_0}{2j\omega_{ВЛ}} \left((-\alpha - j\omega_{ВЛ}) e^{(-\alpha + j\omega_{ВЛ})t} - (-\alpha + j\omega_{ВЛ}) e^{(-\alpha - j\omega_{ВЛ})t} \right) = \\
 &= E - (E - u_0) e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\omega_{ВЛ}} \frac{e^{j\omega_{ВЛ}t} - e^{-j\omega_{ВЛ}t}}{2j} + \frac{e^{j\omega_{ВЛ}t} + e^{-j\omega_{ВЛ}t}}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Застосувавши формулу Ейлера і позначивши $\operatorname{tg}\varphi = \omega_{ВЛ}/\alpha$, у підсумку одержимо:

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= E - (E - u_0) e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\omega_{ВЛ}} \sin \omega_{ВЛ} t + \cos \omega_{ВЛ} t \right) = \\
 &= E - (E - u_0) e^{-\alpha t} \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} \sin \omega_{ВЛ} t + \cos \omega_{ВЛ} t \right) = \\
 &= E - (E - u_0) \frac{e^{-\alpha t}}{\sin \varphi} (\cos \varphi \cdot \sin \omega_{ВЛ} t + \sin \varphi \cdot \cos \omega_{ВЛ} t) = \\
 &= E - (E - u_0) \frac{\omega_0}{\omega_{ВЛ}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_{ВЛ} t + \varphi). \tag{4.68}
 \end{aligned}$$

Тут використано співвідношення $\sin \varphi = \omega_{ВЛ} / \sqrt{\omega_{ВЛ}^2 + \alpha^2} = \omega_{ВЛ} / \omega_0$.

Здійснивши аналогічні перетворення з формулою (4.65), одержимо співвідношення для напруги на індуктивності:

$$\begin{aligned}
 u_L(t) &= (E - u_0) e^{-\alpha t} \left(\cos \omega_{ВЛ} t - \frac{\alpha}{\omega_{ВЛ}} \sin \omega_{ВЛ} t \right) = \\
 &= -(E - u_0) \frac{\omega_0}{\omega_{ВЛ}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_{ВЛ} t - \varphi). \tag{4.69}
 \end{aligned}$$

• *Режим незатухаючих коливань.* При $\alpha=0$, тобто при $R=0$, коріння характеристичного рівняння будуть уявними і комплексно сполученими: $p_1 = j\omega_0$, $p_2 = -j\omega_0$.

Співвідношення (4.67) – (4.69) при відсутності загасання приймуть вид:

$$i(t) = \frac{(E - u_0)}{\rho} \sin \omega_0 t, \quad (4.70)$$

$$u_C(t) = E - (E - u_0) \cos \omega_0 t, \quad (4.71)$$

$$u_L(t) = (E - u_0) \cos \omega_0 t. \quad (4.72)$$

На рис. 4.16 наведені графіки, побудовані за співвідношеннями (4.67) – (4.69) для затухаючих (а) і за (4.70) – (4.72) для незатухаючих (б) коливань у коливальному контурі при нульових початкових умовах $u_C(0) = u_0 = 0$, $i_L(0) = 0$.

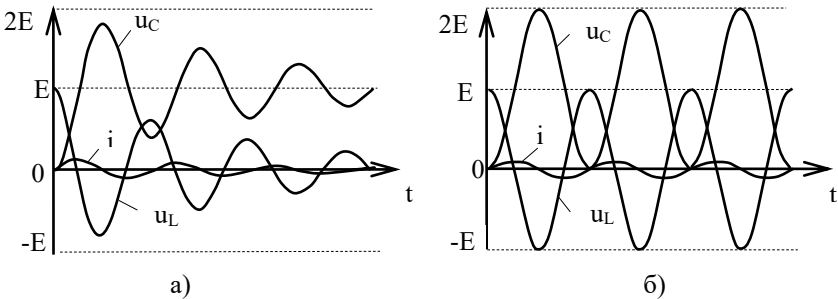


Рисунок 4.16

Якщо зовнішній вплив відсутній, тобто $E=0$ у формулах (4.70) – (4.72), то коливання в контурі виникають за рахунок початкової напруги u_0 на ємності. В цьому випадку енергія, що накопичується індуктивністю і ємністю в режимі незатухаючих коливань, буде визначатися формулами:

$$w_L(t) = \frac{Li^2}{2} = \frac{Lu_0^2}{2\rho^2} \sin^2 \omega_0 t = \frac{Cu_0^2}{2} \sin^2 \omega_0 t, \quad (4.73)$$

$$w_C(t) = \frac{Cu_C^2}{2} = \frac{Cu_0^2}{2} \cos^2 \omega_0 t. \quad (4.74)$$

Таким чином, згідно із цими формулами ємність і індуктивність в контурі періодично обмінюються енергією, причому, коли на одному з реактивних елементів енергія досягає максимуму $Cu_0^2/2$, то

на іншому вона стає раною нулю. Сума енергій на елементах залишається постійною в часі і рівною початковій енергії, запасеної в ємності: $w_L(t) + w_C(t) = Cu_0^2/2$.

4.6.1.3 Аперіодичний режим у послідовного RLC - кола

Аперіодичний режим має місце при $\omega_0 \leq \alpha$ або згідно (4.66) при $Q \leq 1/2$, $\rho \leq 0,5R$. Якщо позначити $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$, то коріння (4.58) характеристичного рівняння запишуться у вигляді: $p_{1,2} = -\alpha \pm \beta = -\alpha \pm j\omega_{вл}$, звідси $\omega_{вл} = -j\beta$.

Виразивши в (4.67) – (4.69) частоту $\omega_{вл}$ через β та застосувавши формули $\sin(-j\beta) = sh\beta/j$, $\cos(-j\beta) = ch\beta$, одержимо при $u_C(0) = u_0 = 0$ наступні співвідношення:

$$i(t) = \frac{E}{\rho} \frac{\omega_0}{\beta} e^{-\alpha t} sh\beta t, \quad (4.75)$$

$$u_C(t) = E \left[1 - e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\beta} sh\beta t + ch\beta t \right) \right], \quad (4.76)$$

$$u_L(t) = E e^{-\alpha t} \left(ch\beta t - \frac{\alpha}{\beta} sh\beta t \right). \quad (4.77)$$

• *Критичний режим.* Умова $\omega_0 = \alpha$, $\beta = 0$ або $Q=1/2$, $\rho=0,5R$ відповідає критичному режиму. При $\beta \rightarrow 0$ маємо $sh(\beta t)/\beta = t$, тобто співвідношення (4.75) – (4.77) для критичного режиму приймуть вид:

$$i(t) = E \frac{\omega_0}{\rho} t e^{-\alpha t} = \frac{E}{L} t e^{-\alpha t}, \quad (4.78)$$

$$u_C(t) = E \left[1 - e^{-\alpha t} (1 + \alpha t) \right], \quad (4.79)$$

$$u_L(t) = E e^{-\alpha t} (1 - \alpha t). \quad (4.80)$$

На рис. 4.17 наведено графіки, побудовані за співвідношеннями (4.75) – (4.77) для аперіодичного (а) і за (4.78) – (4.80) для критичного

(б) режимів в RCL - колі при нульовій початковій умові: $u_C(0) = 0$, $i_L(0) = 0$.

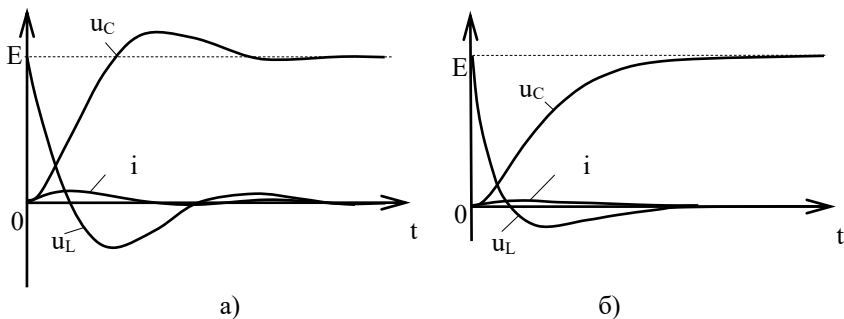


Рисунок 4.17

Слід зазначити, що основним режимом, який використовується в RLC - колі, є коливальний режим, що виникає при $R < 2\sqrt{L/C}$.

4.6.1.4 Перехідна та імпульсна характеристики послідовного коливального контуру

Типова схема включення послідовного RLC - кола у вигляді чотириполосника наведена на рис. 4.18

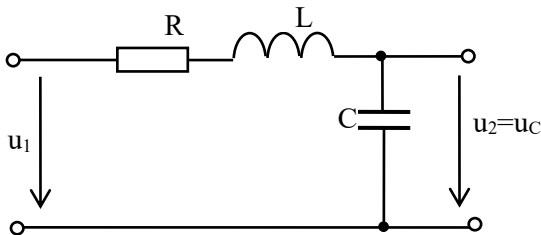


Рисунок 4.18

Перехідна характеристика цього чотириполосника визначається за (4.63) при $E=1$, $u_C(0)=0$, $i_1(0)=i_L(0)=0$:

$$h_C(t) = 1 + \frac{1}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \cdot 1_0(t). \quad (4.81)$$

Для коливального режиму це вираження згідно (4.68) набуде вигляду:

$$h_C(t) = 1 - \frac{\omega_0}{\omega_{\text{вл}}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_{\text{вл}} t + \varphi) \cdot 1_0(t). \quad (4.82)$$

Імпульсна характеристика – це похідна від перехідної характеристики: $k_C = dh_C/dt$.

Похідна від (4.81) дасть наступну формулу для імпульсної характеристики:

$$\begin{aligned} k_C(t) &= \frac{p_2 p_1}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \cdot 1_0(t) + \frac{1}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \cdot \delta(t) = \\ &= \frac{p_2 p_1}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \cdot 1_0(t). \end{aligned} \quad (4.83)$$

Похідна від (4.82) визначить імпульсну характеристику для коливального режиму:

$$k_C(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega_{\text{вл}}} e^{-\alpha t} \sin \omega_{\text{вл}} t. \quad (4.84)$$

Аналогічно можуть бути визначені перехідна та імпульсна характеристики чотириполюсника, у якого вихідна напруга – це напруга на індуктивності або напруга на опорі.

4.6.1.5 Реакція послідовного коливального контуру на гармонійний вплив

Нехай на вхід кола, показаного на рис. 4.18, подано гармонійний вплив виду:

$$u_1(t) = E \sin(\omega t) 1_0(t). \quad (4.85)$$

Початкові умови на реактивних елементах кола приймемо нульовими: $u_C(0)=0, i_1(0)=i_L(0)=0$.

Співвідношення для реакції кола на гармонійний вплив може бути знайдене шляхом розв'язку диференціального рівняння (4.56), а також може бути отримано за допомогою інтеграла згортки.

Скористаємося для знаходження реакції RLC - кола в коливальному режимі інтегралом згортки (4.18) і імпульсною характеристикою (4.84):

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= \int_0^t u_1(t-\tau)k_C(\tau)d\tau = \\
 &= \int_0^t E \sin[\omega(t-\tau)] \left[\frac{\omega_0^2}{\omega_{ВЛ}} e^{-\alpha\tau} \sin(\omega_{ВЛ}\tau) + \delta(\tau) \right] d\tau = \\
 &= E \frac{\omega_0^2}{\omega_{ВЛ}} \int_0^t e^{-\alpha\tau} \sin[\omega(t-\tau)] \sin(\omega_{ВЛ}\tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

Розкривши добуток синусів, складемо формулу, що містить табличні інтеграли:

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= E \frac{\omega_0^2}{\omega_{ВЛ}} \left\{ \cos \omega t \left[\int_0^t e^{-\alpha\tau} \cos[(\omega + \omega_{ВЛ})\tau] d\tau - \int_0^t e^{-\alpha\tau} \cos[(\omega - \omega_{ВЛ})\tau] d\tau \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \sin \omega t \left[\int_0^t e^{-\alpha\tau} \sin[(\omega + \omega_{ВЛ})\tau] d\tau - \int_0^t e^{-\alpha\tau} \sin[(\omega - \omega_{ВЛ})\tau] d\tau \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Обчисливши табличні інтеграли і здійснивши перетворення, одержимо наступний результат:

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= u_{C_{ВЛ}}(t) + u_{C_{ВМ}}(t) = \\
 &= \frac{\omega_0^2 E}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}} \left[\frac{\omega e^{-\alpha t}}{\omega_{ВЛ}} \sin(\omega_{ВЛ} t + \varphi_{ВЛ}) - \sin(\omega t + \varphi_{ВМ}) \right]. \quad (4.86)
 \end{aligned}$$

$$\text{де } \varphi_{\text{ВЛ}} = \text{arctg} \left(\frac{2\alpha\omega_{\text{ВЛ}}}{\alpha^2 - \omega_{\text{ВЛ}}^2 + \omega^2} \right),$$

$$\varphi_{\text{ВМ}} = \text{arctg} \left(\frac{2\alpha\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right).$$

Ця формула містить у собі вільну $u_{\text{ВЛ}}(t)$ складову, що загасає в часі за експонентним законом, і змушену $u_{\text{ВМ}}(t)$ складову, що визначає стаціонарний гармонійний режим.

• Зв'язок вимушеної складової з комплексним коефіцієнтом передачі по напрузі. Якщо у вираженні (4.86) для вимушеної складової

$$u_{\text{СВМ}}(t) = - \frac{\omega_0^2 E}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi_{\text{ВМ}}) \quad (4.87)$$

ввести наступні заміни:

$$\frac{1}{\omega CR} = \frac{\omega_0^2}{2\alpha\omega},$$

$$\xi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha\omega} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R},$$

$$\varphi_{\text{ВМ}} = \text{arctg}(\xi) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \xi,$$

то формула (4.87) набуває вигляду:

$$u_{\text{СВМ}}(t) = \frac{E}{\omega CR \sqrt{1 + \xi^2}} \sin(\omega t - \pi/2 - \text{arctg} \xi). \quad (4.88)$$

В цій формулі вимушена складова представлена у вигляді, що збігається із записом уявної частини комплексної напруги на ємності в співвідношеннях (3.73) – (3.75) при вхідному гармонійному сигналі (4.85):

$$u_{\text{СВМ}}(t) = \text{Im} \left[E e^{j\omega t} \cdot \dot{K}(\omega) e^{-j\varphi_K} \right] = E \cdot K(\omega) \sin(\omega t - \varphi_K),$$

де $K(\omega) = 1 / \left(\omega CR \sqrt{1 + \xi^2(\omega)} \right)$ - модуль, $\varphi_K(\omega) = -\pi/2 - \arctg \xi(\omega)$ - фаза комплексного коефіцієнта передавання (3.73); $\xi(\omega)$ – узагальнена розстройка (3.72).

На рис. 4.19 наведено графіки часової залежності напруги на ємності, побудовані за (4.86) для двох випадків: а – при розбіжності частоти ω вхідного сигналу з резонансною частотою ω_0 , б – при рівності частот $\omega = \omega_0$.

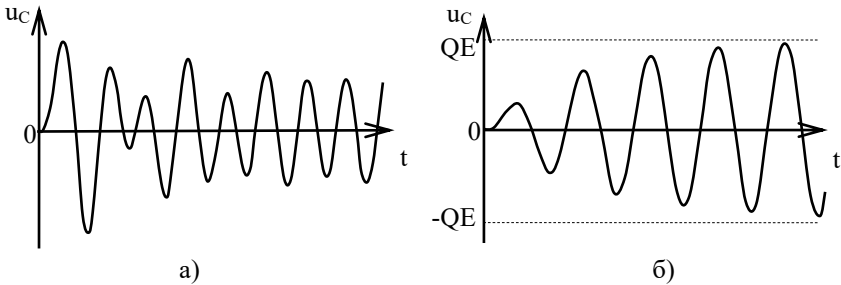


Рисунок 4.19

При розбіжності частот ω і ω_0 протягом перехідного періоду відбувається взаємодія двох коливань $u_{\text{вм}}(t)$ і $u_{\text{вл}}(t)$ із частотами ω і $\omega_{\text{вл}} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, що різняться в міру загасання вільного коливання $u_{\text{вл}}(t)$ у контурі встановлюється стаціонарний режим, відповідний до змушеного коливання $u_{\text{вм}}(t)$, що змінюється із частотою ω . При збігу частот $\omega = \omega_0$ ($\xi = 0$) амплітуда коливань у процесі перехідного періоду монотонно зростає і досягає максимального значення, рівного $Q \cdot E$, де $Q = \omega_0 / (2\alpha) = \sqrt{L/C} / R$ - добротність коливального контуру.

4.6.2 Часові характеристики паралельного RLC – кола

Для аналізу процесів у паралельному коливальному контурі скористаємося його спрощеною схемою, наведеною на рис. 4.20.

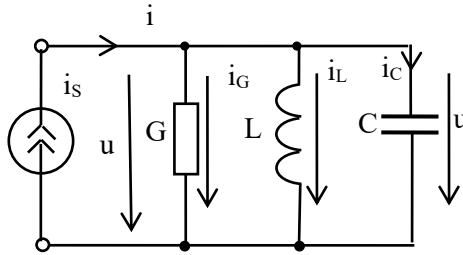


Рисунок 4.20

Ця схема при $G = 1/R_{\text{зр}}$, $R_{\text{зр}} = \rho^2/R = L/(CR)$ повторює схему на рис. 3.20, складену для частот близьких резонансній частоті ω_0 .

Розглянемо реакцію контуру при підключенні джерела постійного струму до кола в момент часу $t=0$:

$$i_S(t) = I_S l_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ I_S, & t \geq 0. \end{cases} \quad (4.89)$$

• *Аналіз схеми.* Напряга на елементах схеми однакова: $u_G = u_L = u_C = u$. За законом Кірхгофа струм у загальній гілці:

$$i = i_G + i_L + i_C = Gu + i_L + C du/dt .$$

Підстановка $u = L di_L/dt$ в це вираження приводить до диференціального рівняння:

$$i = GL \frac{di_L}{dt} + i_L + CL \frac{d^2 i_L}{dt^2} .$$

Представимо це рівняння з обліком (4.89) у вигляді

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = \omega_0^2 I_S , \quad (4.90)$$

де $\alpha = G/(2C)$ - коефіцієнт загасання,

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ - резонансна частота.

Якщо виразити G через еквівалентний резонансний опір $R_{ep} = L/(CR)$, то коефіцієнт загасання можна представити в такий спосіб: $\alpha = 1/(2CR_{ep}) = R/(2L)$, де $R = R_C + R_L$ - загальний опір втрат в ємності і індуктивності в схемі на рис. 3.19.

Таким чином, рівняння (4.90) паралельного контуру на рис. 4.20 повністю збігається з рівнянням (4.57) послідовного коливального контуру. Тому при нульових початкових умовах $u_C(0)=0$, $i_L(0)=0$ для коливального режиму рішення (4.90) згідно (4.68) набуде вигляду:

$$i_L(t) = I_S \left[1 - \frac{\omega_0}{\omega_{вл}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_{вл} t + \varphi) \right]. \quad (4.91)$$

Напряга на контурі, з урахуванням співвідношень $\operatorname{tg}\varphi = \omega_{вл}/\alpha$, $\cos\varphi = \alpha/\sqrt{\alpha^2 + \omega_{вл}^2} = \alpha/\omega_0$, $\rho = \sqrt{L/C}$ запишеться у вигляді, аналогічному (4.67):

$$\begin{aligned} u(t) &= L \frac{di_L}{dt} = LI_S \frac{\omega_0}{\omega_{вл}} e^{-\alpha t} \left[\alpha \sin(\omega_{вл} t + \varphi) - \omega_{вл} \cos(\omega_{вл} t + \varphi) \right] = \\ &= \rho I_S \frac{\omega_0}{\omega_{вл}} e^{-\alpha t} \sin \omega_{вл} t. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Струм через ємність буде представлений вираженням, аналогічним (4.69):

$$i_C(t) = C \frac{du}{dt} = -I_S \frac{\omega_0}{\omega_{вл}} e^{-\alpha t} \sin(\omega_{вл} t - \varphi). \quad (4.93)$$

На рис. 4.21 наведені графіки, побудовані за співвідношеннями (4.91) – (4.93) для затухаючих коливань у паралельному коливальному контурі при нульовій початковій умові $u_C(0) = 0$, $i_L(0) = 0$.

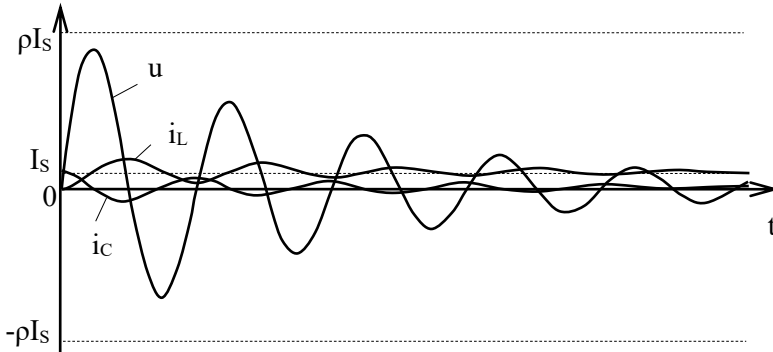


Рисунок 4.21

• Відмітимо, що при підключенні до паралельного контуру джерела гармонійного струму $i_s(t) = I_s \sin(\omega t) 1_0(t)$ залежність для $i_L(t)$ буде визначатися співвідношенням (4.86) і графіками на рис. 4.19 при заміні E на I_s .

4.7 МЕТОД ЗМІННИХ СТАНУ

В теорії електричних кіл змінними стану є напруга u_C на ємнісних елементах і струми i_L індуктивних елементів. Математична модель кола щодо цих змінних складається у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку, що представляються в нормальній формі (формі Коші). При записі рівнянь стану в нормальній формі похідні du_C/dt , di_L/dt у лівій частині рівнянь виражають через функції від змінних u_C і i_L та джерел струму і напруги.

При складанні рівнянь спочатку знаходять зв'язки змінних i_C , u_L зі струмами і напругами в колі, а потім змінні i_C , u_L замінюють похідним, тому що $i_C = C du_C/dt$, $u_L = L di_L/dt$.

Приклад 4.1. Для прикладу сформуємо систему рівнянь стану для схеми на рис. 4.22, скориставшись топологічним алгоритмом.

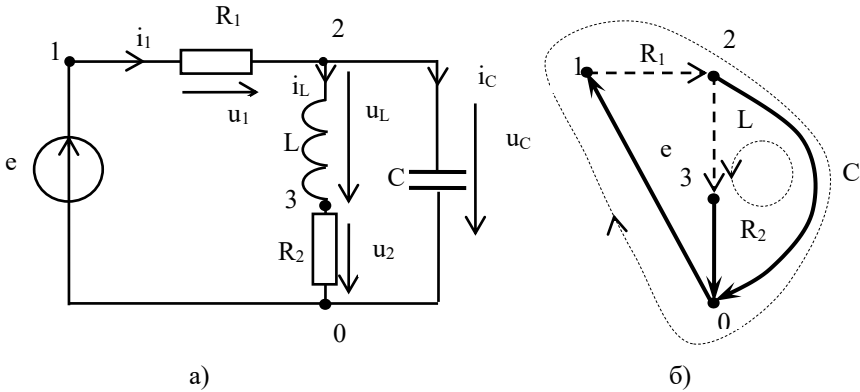


Рисунок 4.22

Алгоритм містить у собі наступні кроки:

1. Вибирається дерево графа, гілками якого є всі ємності і джерела напруги, а хордами – усі індуктивності і джерела струму. В якості додаткових гілок дерева використовуються опори.

Дерево, побудоване згідно із цим правилом, називається нормальним.

Для розглянутої схеми нормальне дерево, побудовано на рис. 4.22,б і відзначено товстими лініями. Хорди дерева відзначені пунктирними лініями. Напрямок обходу контурів збігається з напрямком хорд.

2. Складається таблиця з'єднань гілок графа.

В клітках першого рядка таблиці по черзі вказуються позначення гілок дерева, відповідних до ємностей, опорів, джерел напруги.

В клітках першого стовпця по черзі вказуються позначення хорд дерева, відповідних до опорів, індуктивностей, джерел струму.

Підключаються хорди до дерева, в результаті утворюються контури. Для кожного контуру в клітках рядків таблиці знаком +1 відзначаються гілки дерева, що збігаються у напрямку з обходом контуру, і знаком -1 при протилежній орієнтації. Якщо гілка не входить в контур – ставиться нуль.

Для розглянутого кола з'єднання гілок представлені таблицею 4.2.

Таблиця 4.2

хорды/ ветви	C	R ₂	e
R ₁	+1	0	+1
L	-1	+1	0

3. По таблиці з'єднань складаються рівняння кола. Стовпці визначають рівняння для першого закону Кірхгофа, рядки – для другого. При записі рівняння по рядках напруги на пасивних гілках беруться зі знаком, протилежним знаку в таблиці. Знаки ЕРС джерел напруги зберігаються.

Рівняння, що відповідають табл. 4.2.

- Запис по стовпцях:

$$i_C = i_1 - i_L, \quad (4.94)$$

$$i_2 = i_L, \quad (4.95)$$

$$i_e = i_1. \quad (4.96)$$

- Запис по рядках:

$$u_1 = -u_C + e, \quad (4.97)$$

$$u_L = u_C - u_2. \quad (4.98)$$

4. За рівняннями для струмів i_C через ємність і напругу u_L на індуктивностях на підставі формул $du_C/dt = i_C/C$, $di_L/dt = u_L/L$ становлять диференціальні рівняння стану.

Для розглянутого кола згідно (4.98), (4.94) рівняння стану запишуться у вигляді:

$$\begin{cases} di_L/dt = (u_C - u_2)/L = (u_C - R_2 i_L)/L, \\ du_C/dt = (i_1 - i_L)/C = [(e - u_C)/R_1 - i_L]/C, \end{cases}$$

або в матричній формі:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_2/L & 1/L \\ -1/C & -1/(CR_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/(CR_1) \end{bmatrix} [e]. \quad (4.99)$$

5. Складаються рівняння реакцій, що зв'язують струми і напруги на елементах кола зі змінними стану.

Наприклад, для розглянутого кола напруги на опорах і на індуктивності згідно (4.95), (4.97), (4.98) будуть представлені наступною системою рівнянь:

$$\begin{cases} u_1 = -u_C + e, \\ u_2 = R_2 i_L, \\ u_L = u_C - R_2 i_L, \end{cases}$$

або в матричному виді

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ R_2 & 0 \\ -R_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [e]. \quad (4.100)$$

У загальному випадку системи рівнянь стану і рівнянь реакцій записуються в такий спосіб:

$$\dot{x} = Ax + Bv, \quad (4.101)$$

$$y = Cx + Dv, \quad (4.102)$$

де x – вектор змінних стану, \dot{x} – вектор їх похідних; A, B, C, D – матриці параметрів кола; v – вектор впливів; y – вектор реакцій.

Для розв'язку рівнянь стану (4.101) застосовуються аналітичні і чисельні методи.

В аналітичному виді розв'язок (4.101) записується в такий спосіб:

$$x(t) = x(0)e^{At} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bv(\tau) d\tau, \quad (4.103)$$

де $x(0)$ – початкові умови на LC – елементах,

e^{At} – матрична експонента.

Матричну експоненту за методом Келлі – Гамільтона можна представити у вигляді:

$$e^{At} = a_0(t)I_M + a_1(t)A + a_2(t)A^2 + \dots + a_{n-1}(t)A^{n-1}, \quad (4.104)$$

де I_M – одинична матриця,

$\dots a_k(t)$ – функції від часу і коренів характеристичного рівняння,

n – розмірність системи рівнянь стану.

Функції $a_k(t)$ визначаються в такий спосіб:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & p_1 & \cdots & p_1^{n-1} \\ 1 & p_2 & \cdots & p_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & p_n & \cdots & p_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e^{p_1 t} \\ e^{p_2 t} \\ \vdots \\ e^{p_n t} \end{bmatrix}, \quad (4.105)$$

де p_k – власні числа матриці A .

Власні числа матриці відповідають корінням характеристичного рівняння $p^n + \alpha_{n-1}p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0 = 0$, яке складається на підставі співвідношення

$$\det(pI_M - A) = 0. \quad (4.106)$$

Знайдемо розглянутим методом розв'язок рівняння (4.99), відповідного до перехідних характеристик, тобто будемо вважати, що в момент часу $t=0$ до кола на рис. 4.22 підключається джерело напруги з одиничною амплітудою: $e(t) = l_0(t)$ при нульових початкових умовах.

Згідно (4.99), (4.106) запишемо:

$$\det \left(p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -R_2/L & 1/L \\ -1/C & -1/(CR_1) \end{bmatrix} \right) = \left| \begin{array}{cc} p + R_2/L & -1/L \\ 1/C & p + 1/(CR_1) \end{array} \right| = 0.$$

Розкривши визначник, одержимо характеристичне рівняння:

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_k^2 = 0,$$

де $\alpha = (R_2/L + 1/CR_1)/2$,

$$\omega_k^2 = (1 + R_2/R_1)\omega_0^2,$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

Коріння цього рівняння запишуться у вигляді:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_k^2}.$$

Згідно (4.105) визначимо коефіцієнти в розкладанні матричної експоненти:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & p_1 \\ 1 & p_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e^{p_1 t} \\ e^{p_2 t} \end{bmatrix} = \frac{1}{p_2 - p_1} \begin{bmatrix} p_2 & -p_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{p_1 t} \\ e^{p_2 t} \end{bmatrix}.$$

Звідси

$$a_0(t) = (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) / (p_2 - p_1),$$

$$a_1(t) = (-e^{p_1 t} + e^{p_2 t}) / (p_2 - p_1).$$

Згідно (4.103), (4.104) запишемо розв'язок рівняння стану (4.99) при $e=1$ і нульових початкових умовах:

$$\begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} = v \int_0^t a_0(t-\tau) d\tau + Av \int_0^t a_1(t-\tau) d\tau = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/(CR_1) \end{bmatrix} I_0 + \begin{bmatrix} 1/(LCR_1) \\ -1/(CR_1)^2 \end{bmatrix} I_1,$$

$$\text{де } I_0(t) = \int_0^t a_0(t-\tau) d\tau = \frac{1}{p_2 - p_1} \left[\frac{-p_2}{p_1} (1 - e^{p_1 t}) + \frac{p_1}{p_2} (1 - e^{p_2 t}) \right],$$

$$I_1(t) = \int_0^t a_1(t-\tau) d\tau = \frac{1}{p_2 - p_1} \left[\frac{1}{p_1} (1 - e^{p_1 t}) - \frac{1}{p_2} (1 - e^{p_2 t}) \right].$$

Звідси одержуємо формули для розрахунків змінних стану:

$$i_L(t) = \frac{1}{LCR_1} I_1(t), \quad (4.107)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{CR_1} I_0(t) - \frac{1}{(CR_1)^2} I_1(t). \quad (4.108)$$

На рис 4.23 наведені графіки перехідних характеристик кола на рис. 4.22,а, що розраховані за формулами (4.107), (4.108) при наступних параметрах $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $L = 10^{-6}$ Гн, $C = 20 \cdot 10^{-9}$ Ф, $\omega_0 = 2,24 \cdot 10^6$ рад/с, $T = 2\pi/\omega_0 = 2,81 \cdot 10^{-6}$ с.

Із графіків видно, що при підключенні джерела напруги до кола виникають загасаючі вільні коливання. Частота цих коливань рівна

$\omega_{\text{вл}} = \sqrt{(1 + R_2/R_1)\omega_0^2 - \alpha^2} = 2,22 \cdot 10^6$ рад/с. Після загасання вільних коливань встановлюється стаціонарний режим, при якому змінні

ухвалюють наступні значення: $i_L = 1/(R_1 + R_2) = 0,0091 \text{ A}$,
 $u_C = R_2/(R_1 + R_2) = 0,091 \text{ В}$.

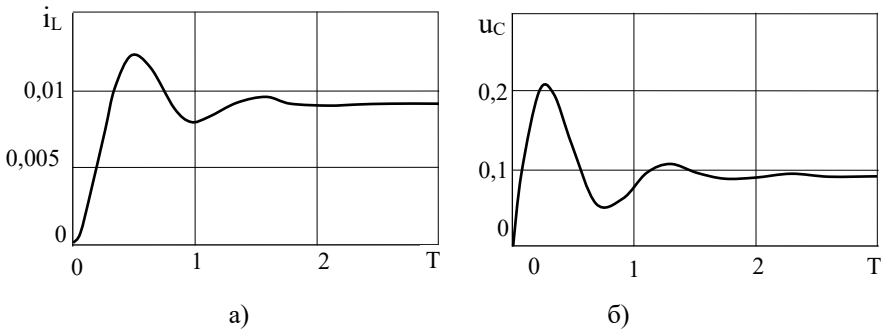


Рисунок 4.23

• Перевагами методу змінних стану є:

- мала розмірність систем диференціальних рівнянь, що не перевищує кількість реактивних елементів кола;
- системи рівнянь складаються в нормальній формі, зручній для застосування чисельних методів розв'язку диференціальних рівнянь.

В якості недоліку слід зазначити складність алгоритму складання рівнянь стану.

4.8 МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗРАХУНКІВ ЧАСОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК КІЛ

У загальному випадку при числі диференціальних рівнянь більше двох для їхнього розв'язку використовуються чисельні методи.

Чисельні методи розв'язку диференціальних рівнянь діляться на явні і неявні, однокрокові і багатокрокові, абсолютно і умовно стійкі. Методи різняться також порядком точності.

Більшість методів призначена для розв'язку диференціальних рівнянь і їх систем, складених у нормальній формі.

4.8.1 Алгебраїзація диференціальних рівнянь

Для ілюстрації методики застосування чисельних методів розглянемо розв'язок диференціального рівняння першого порядку

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad (4.109)$$

при початковій умові $x(0) = x_0$. Додатково задається інтервал часу, на якому розшукується розв'язок. Проводиться розбивка інтервалу на ряд точок звичайно з рівномірним кроком Δt . Відповідно до розбивки інтервалу змінна x і її похідна представляються окремими (дискретними) значеннями.

Для розв'язку рівняння скористаємося однокроковими явним і неявним методами Ейлера. Методи Ейлера засновані на найпростішій апроксимації похідної в точці $t_n = n\Delta t$ кінцевими різницями:

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x_n - x_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t}. \quad (4.110)$$

Підставивши цю формулу в (4.109), одержимо явну

$$x_n = x_{n-1} + \Delta t f(x_{n-1}, t_{n-1}) \quad (4.111)$$

і неявну

$$x_n = x_{n-1} + \Delta t f(x_n, t_n) \quad (4.112)$$

формули Ейлера.

В явній формулі значення змінної x_n в точці t_n визначається по відомому її значенню, розрахованому в попередній точці. У неявній формулі шукане значення x_n перебуває як у лівій, так і в правій частинах формули.

Явний і неявний методи Ейлера мають перший порядок точності. Це найнижчий порядок точності, тому при використанні цих методів крок Δt слід брати малим. Явний метод Ейлера є обмежено стійким – при великій величині кроку він може розходитися. Неявний метод Ейлера абсолютно стійкий – теоретично він може сходиться до розв'язку при будь-якій величині кроку.

Рівняння (4.111), (4.112) ставляться до класу *різницевих рівнянь*. Процедура складання різницевих рівнянь називається *алгебраїзацією диференціальних рівнянь*.

При програмуванні розрахунків за різницевиими рівняннями організовується цикл по індексу n , а для початку розрахунків використовується початкова умова $x_0 = x(0)$. Наприклад, розрахункам за формулою (4.111) буде відповідати наступна рекуррентна послідовність операцій:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \Delta t f(x_0, t_0), \\ x_2 &= x_1 + \Delta t f(x_1, t_1), \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= x_{n-1} + \Delta t f(x_{n-1}, t_{n-1}). \end{aligned}$$

Аналогічно виконується чисельний розв'язок систем диференціальних рівнянь. Наприклад, диференціальному рівнянню (4.99) згідно формули (4.111) буде відповідати різницеве рівняння

$$\begin{bmatrix} i_{Ln} \\ u_{Cn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{Ln-1} \\ u_{Cn-1} \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} -R_2/L & 1/L \\ -1/C & -1/(CR_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{Ln-1} \\ u_{Cn-1} \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} 0 \\ 1/(CR_1) \end{bmatrix} [e_{n-1}]. \quad (4.113)$$

При застосуванні формули (4.112) до (4.99) буде потрібно вихідне різницеве рівняння

$$\begin{bmatrix} i_{Ln} \\ u_{Cn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{Ln-1} \\ u_{Cn-1} \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} -R_2/L & 1/L \\ -1/C & -1/(CR_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{Ln} \\ u_{Cn} \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} 0 \\ 1/(CR_1) \end{bmatrix} [e_n]$$

перетворити до виду, записаного в явній формі щодо шуканих змінних у точці t_n :

$$\begin{bmatrix} i_{Ln} \\ u_{Cn} \end{bmatrix} = \left\{ 1_M - \Delta t \begin{bmatrix} -R_2/L & 1/L \\ -1/C & -1/(CR_1) \end{bmatrix} \right\}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} i_{Ln-1} \\ u_{Cn-1} \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} 0 \\ 1/(CR_1) \end{bmatrix} [e_n] \right\}, \quad (4.114)$$

де 1_M – одинична матриця.

На рис. 4.24 наведені результати розрахунків за формулами (4.113), (4.114) реакції кола на рис. 4.22 на гармонійний вплив $e(t) = \sin(\omega_0 t)$, де $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Розрахунки виконані для параметрів кола, зазначених в прикладі 4.1 розділу 4.7.

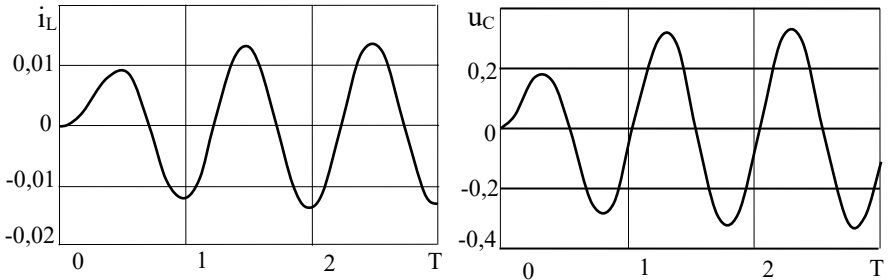


Рисунок 4.24

Із графіків видно, що амплітуда коливань в процесі перехідного періоду монотонно зростає і досягає максимального значення, відповідного до стаціонарного режиму.

4.8.2 Дискретні моделі реактивних елементів

Дискретні моделі LC – елементів одержують за допомогою неявних методів в результаті алгебраїзації диференціальних рівнянь $du_C/dt = i_C/C$, $di_L/dt = u_L/L$ ємності та індуктивності. Якщо застосувати до цих рівнянь неявний метод Ейлера (4.112), то можна одержати наступні різницеві рівняння:

$$u_{Cn} = u_{Cn-1} + \frac{\Delta t}{C} i_{Cn} = E_{Cn-1} + r_C i_{Cn}, \quad (4.115)$$

$$i_{Ln} = i_{Ln-1} + \frac{\Delta t}{L} u_{Ln} = I_{Ln-1} + g_L u_{Ln}. \quad (4.116)$$

Ці рівняння можна записати в іншому виді:

$$i_{Cn} = -\frac{C}{\Delta t} u_{Cn-1} + \frac{C}{\Delta t} u_{Cn} = -I_{Cn-1} + g_C u_{Cn}, \quad (4.117)$$

$$u_{Ln} = -\frac{L}{\Delta t} i_{Ln-1} + \frac{L}{\Delta t} i_{Ln} = -E_{Ln-1} + r_L i_{Ln}. \quad (4.118)$$

Коефіцієнти для n-го кроку в цих рівняннях являють собою дискретні опори $r_C = \Delta t/C$, $r_L = L/\Delta t$ або дискретні провідності $g_C = 1/r_C = C/\Delta t$,

$g_L = 1/r_L = \Delta t/L$. Коефіцієнти для попереднього (n-1)-го кроку є джерелами напруги $E_{C_{n-1}} = u_{C_{n-1}}$, $E_{L_{n-1}} = L/\Delta t i_{L_{n-1}} = r_L i_{L_{n-1}}$ або джерелами струму $I_{L_{n-1}} = i_{L_{n-1}}$, $I_{C_{n-1}} = C/\Delta t u_{C_{n-1}} = g_C u_{C_{n-1}}$.

На підставі рівнянь (4.115) – (4.118) за законами Кірхгофа складаються дискретні схеми заміщення реактивних елементів. Ці схеми представлені на рис. 4.25, вони підрозділяються на послідовні (а), (б) і паралельні (в), (г).

При заміщенні реактивних елементів їх дискретними моделями, коло на кожному кроці рішення перетвориться в резистивне коло, що полягає з опорів і джерел струму і напруги.

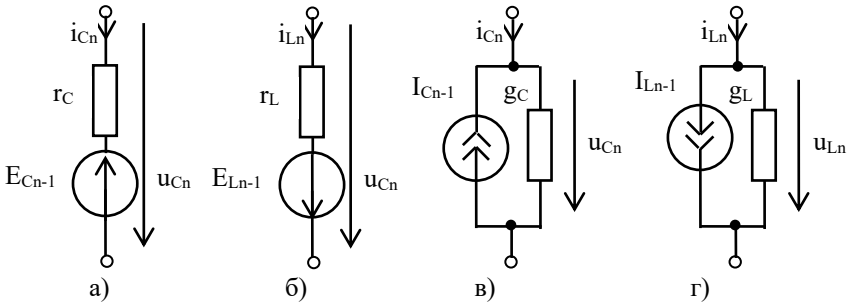


Рисунок 4.25

Аналіз резистивного кола може бути виконаний методом контурних струмів. В цьому випадку зручно використовувати послідовні схеми заміщення реактивних елементів. Або методом вузлових потенціалів з використанням паралельних схем заміщення.

Приклад 4.2. Для прикладу на рис. 4.26 зображено послідовне RCL – коло (а) і його дискретна схема заміщення (б).

З аналізу дискретної схеми випливає:

$$i_n = i_{L_n} = i_{C_n},$$

$$R i_n + r_L i_n + r_C i_n = e_n + E_{L_{n-1}} - E_{C_{n-1}}.$$

Звідси і на підставі (4.115), (4.118) одержуємо рекуррентне співвідношення для n-го кроку обчислень:

$$\begin{cases} i_n = (e_n + r_L i_{n-1} - u_{Cn-1}) / (R + r_L + r_C), \\ u_{Rn} = R i_n, \\ u_{Ln} = -r_L i_{n-1} + r_L i_{Ln}, \\ u_{Cn} = u_{Cn-1} + r_C i_{Cn}. \end{cases}$$

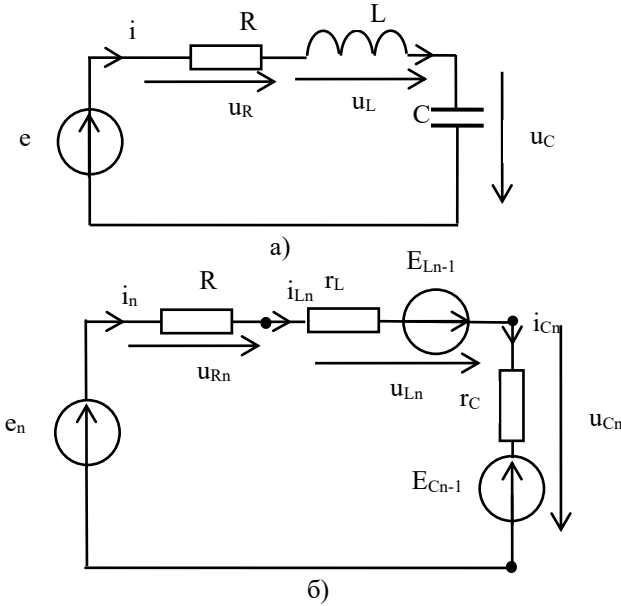


Рисунок 4.26

На рис. 4.27 наведені графіки, побудовані за цими формулами для напруг на індуктивності і ємності при нульових початкових умовах $i_0 = 0$, $u_{C0} = 0$, гармонійному вхідному впливі $e(t) = \sin(\omega_0 t)$ і при наступних параметрах кола: $R = 20$ Ом, $L = 100 \cdot 10^{-6}$ Гн, $C = 10 \cdot 10^{-9}$ Ф, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 1 \cdot 10^6$ рад/с, $T = 2\pi/\omega_0 = 6,28 \cdot 10^{-6}$, $Q = \rho/R = \sqrt{L/C}/R = 5$.

Із графіків видно, що амплітуда коливань на індуктивності і ємності монотонно зростає і досягає в стаціонарному режимі максимального значення, рівного добротності $Q=5$. Коливання на ємності і індуктивності в стаціонарному режимі при частоті вхідного

коливання рівній резонансній частоті перебувають, як це видно на графіках, у протифазі.

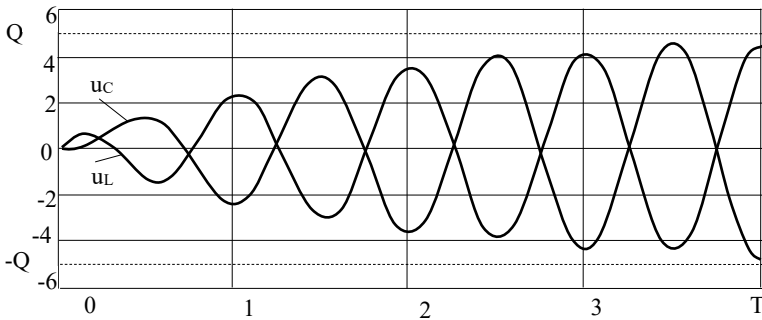


Рисунок 4.27

• Найважливішою перевагою використання дискретних моделей реактивних елементів є відсутність необхідності складання для кіл диференціальних рівнянь. Кола, в результаті дискретизації рівнянь LC – елементів, представляються найпростішими моделями у вигляді резистивних схем, що складаються з опорів, джерел струму і напруг.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Пояснити елементну базу моделювання у часовій області.
2. Пояснити методику рішення диференціальних рівнянь при аналізі лінійних кіл.
3. Дайте означення одиничної ступінчастої функції і одиничної імпульсної функції, поясніть їх властивості та взаємозв'язок.
4. Дайте означення перехідної і імпульсної характеристик, поясніть їх взаємозв'язок.
5. Запишіть формули для інтеграла Дюамеля і інтеграла згортки.
6. Складіть диференціальне рівняння для послідовного RC-кола.
7. Накресліть і поясніть реакції на елементах RC-кола при підключенні джерела постійної напруги.
8. Накресліть і поясніть реакції на елементах RC-кола на сигнал прямокутної форми.
9. Накресліть і поясніть імпульсні характеристики RC-кола.

10. Накресліть реакцію RC- кола на гармонійний сигнал, поясніть залежності для вільної і змушеної складових.
11. Накресліть схеми RC- чотириполюсників та поясніть умови, при яких вони будуть виконувати функції ланки, що диференціює або інтегрує.
12. Складіть диференціальне рівняння для послідовного RL- кола.
13. Накресліть схеми RL- чотириполюсників та поясніть умови, при яких вони будуть виконувати функції ланки, що диференціює або інтегрує.
14. Складіть диференціальне рівняння для послідовного RLC- кола.
15. Поясніть умови виникнення коливального режиму в послідовному коливальному контурі та накресліть графіки згасаючих і незатухаючих коливань.
16. Поясніть умови виникнення аперіодичного режиму в послідовному коливальному контурі та накресліть графіки аперіодичних коливань.
17. Накресліть і поясніть графіки залежностей від часу для напруги на ємності при гармонійному вхідному сигналі з частотою рівної і нерівної резонансної частоти коливального контуру.
18. Накресліть схему і складіть диференціальне рівняння для паралельного коливального контуру.
19. Поясніть часові характеристики паралельного коливального контуру.
20. Поясніть метод змінних стану, відзначити переваги і недоліки.
21. Поясніть топологічний метод складання рівнянь змінних стану.
22. Поясніть аналітичний метод рішення рівнянь змінних стану.
23. Запишіть формули явного і неявного методів Ейлера, складіть різницеве рівняння, поясніть його програмування.
24. Поясніть методику складання дискретних моделей LC- елементів.
25. Накресліть дискретні схеми заміщення LC- елементів.

5 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЧОТИРИПОЛЮСНИКОВ

Чотириполосник – електричне коло, що має два вхідних і два вихідних полюса - зовнішніх вузлів. Теорію чотириполосників використовують, коли потрібно визначити тільки вхідні й вихідні струми та напруги на вході та виході кола. Цей зв'язок встановлюється за допомогою параметрів чотириполосника, які можуть бути розраховані за схемою чотириполосника або визначені експериментально.

У вигляді чотириполосника представляють електронні компоненти, функціональні вузли і пристрої.

5.1 ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ЧОТИРИПОЛЮСНИКА

Рівняння чотириполосника справедливі за будь-яких форм струму і напруги та виду кола. Тому, не порушуючи загальний підхід, можна аналізувати комплексну форму співвідношень.

На рис. 5.1 показано зображення чотириполосника та умовні напрями комплексних амплітуд зовнішніх струмів і напруг.

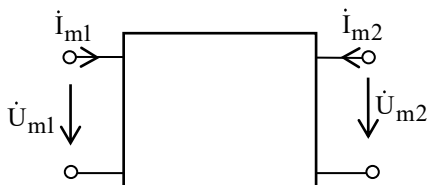


Рисунок 5.1

Режим роботи чотириполосника характеризується чотирма величинами: вхідною напругою \dot{U}_{m1} , вхідним струмом \dot{I}_{m1} , вихідною напругою \dot{U}_{m2} , вихідним струмом \dot{I}_{m2} . Рівняння, що зв'язують ці чотири величини, називають основними рівняннями чотириполосника.

В теорії аналізу і синтезу кіл найчастіше застосовуються рівняння чотириполосників в Y , Z і H -формі.

Рівняння передачі чотириполосника в Y - формі:

$$\begin{cases} \dot{I}_{m1} = \dot{Y}_{11} \dot{U}_{m1} + \dot{Y}_{12} \dot{U}_{m2}, \\ \dot{I}_{m2} = \dot{Y}_{21} \dot{U}_{m1} + \dot{Y}_{22} \dot{U}_{m2}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Рівняння передачі чотириполюсника в Z- формі:

$$\begin{cases} \dot{U}_{m1} = \dot{Z}_{11} \dot{I}_{m1} + \dot{Z}_{12} \dot{I}_{m2}, \\ \dot{U}_{m2} = \dot{Z}_{21} \dot{I}_{m1} + \dot{Z}_{22} \dot{I}_{m2}. \end{cases} \quad (5.2)$$

Рівняння передачі чотириполюсника в H- формі:

$$\begin{cases} \dot{U}_{m1} = \dot{H}_{11} \dot{I}_{m1} + \dot{H}_{12} \dot{U}_{m2}, \\ \dot{I}_{m2} = \dot{H}_{21} \dot{I}_{m1} + \dot{H}_{22} \dot{U}_{m2}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Всі форми запису рівнянь передачі чотириполюсника містять повну інформацію про нього, і в цьому сенсі всі вони еквівалентні. Звідси випливає, що між Y, Z, H - параметрами існує однозначний зв'язок.

Розмірність параметрів чотириполюсника у виразах (5.1) - (5.3) легко встановити за розмірністю відповідних дій та реакцій.

5.2 ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ПАРАМЕТРІВ ЧОТИРИПОЛЮСНИКА

Кожний параметр в рівняннях (5.1) – (5.3) має конкретний фізичний зміст.

• *Розглянемо рівняння (5.1).* Припустимо, що напруга $\dot{U}_{m2} = 0$ (режим короткого замикання на виході – режим КЗ).

Тоді з (5.1) слід:

$$\dot{Y}_{11} = \frac{\dot{I}_{m1}}{\dot{U}_{m1}} \Big/ \dot{U}_{m2} = 0 \quad - \quad \text{комплексна вхідна провідність}$$

чотириполюсника при короткому замиканні на виході;

$$\dot{Y}_{21} = \frac{\dot{I}_{m2}}{\dot{U}_{m1}} \Big/ \dot{U}_{m2} = 0 \quad - \quad \text{комплексна провідність прямої передачі}$$

чотириполюсника при короткому замиканні на виході.

Припустимо, що в (5.1) напруга $\dot{U}_{m1} = 0$ (режим короткого замикання на вході – режим КЗ).

Тоді з (5.1) слід:

$$\dot{Y}_{12} = \frac{\dot{I}_{m1}}{\dot{U}_{m2}} / \dot{U}_{m1} = 0 \quad - \quad \text{комплексна провідність зворотного}$$

зв'язку чотириполосника при короткому замиканні на вході;

$$\dot{Y}_{22} = \frac{\dot{I}_{m2}}{\dot{U}_{m2}} / \dot{U}_{m1} = 0 \quad - \quad \text{комплексна вихідна провідність}$$

чотириполосника при короткому замиканні на вході.

• *Розглянемо рівняння (5.2).* Припустимо, що струм $\dot{I}_{m2} = 0$ (режим холостого ходу на виході – режим ХХ).

Тоді з (5.2) слід:

$$\dot{Z}_{11} = \frac{\dot{U}_{m1}}{\dot{I}_{m1}} / \dot{I}_{m2} = 0 \quad - \quad \text{комплексний вхідний опір}$$

чотириполосника при холостому ході на виході;

$$\dot{Z}_{21} = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{I}_{m1}} / \dot{I}_{m2} = 0 \quad - \quad \text{комплексний опір прямої передачі}$$

чотириполосника при холостому ході на виході.

Припустимо, що в (5.2) струм $\dot{I}_{m1} = 0$ (режим холостого ходу на вході – режим ХХ).

Тоді з (5.2) слід:

$$\dot{Z}_{12} = \frac{\dot{U}_{m1}}{\dot{I}_{m2}} / \dot{I}_{m1} = 0 \quad - \quad \text{комплексний опір зворотного зв'язку}$$

чотириполосника при холостому ході на вході;

$$\dot{Z}_{22} = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{I}_{m2}} / \dot{I}_{m1} = 0 \quad - \quad \text{комплексний вихідний опір}$$

чотириполосника при холостому ході на вході.

Аналогічно визначаються за (5.3) Н - параметри шляхом завдання режимів КЗ і ХХ.

5.3 МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЧОТИРИПОЛЮСНИКА

• *Експериментальний метод.* Вимірювання проводять виходячи з фізичного змісту параметрів, забезпечуючи режими короткого

замикання або холостого ходу на входах чотириполосника. Метод застосовується в разі, коли внутрішня структура чотириполосника невідома або коли вона складна для аналізу.

- *Розрахунковий метод.* Застосовується, коли схема чотириполосника відома. Параметри визначаються за результатами аналізу схеми.

Приклад 5.1. Для схеми чотириполосника на рис. 5.3 визначити вхідну провідність \dot{Y}_{11} при КЗ на виході.

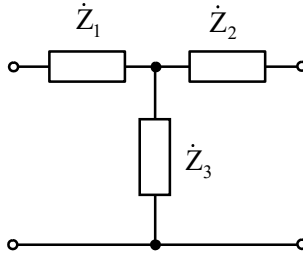


Рисунок 5.3

Завдання вирішуємо методом перетворення схеми. При КЗ на виході схема перетвориться до виду на рис. 5.4.

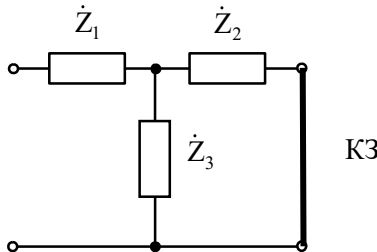


Рисунок 5.4

За схемою отримуємо:

$$\dot{Y}_{11} = \frac{1}{\dot{Z}_e}, \quad \dot{Z}_e = \dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}.$$

Приклад 5.2. Для схеми чотириполосника на рис. 5.3 визначити всі параметри провідності.

Застосовуємо для аналізу метод контурних струмів, використовуючи схему на рис. 5.5 з підключеними джерелами напруги.

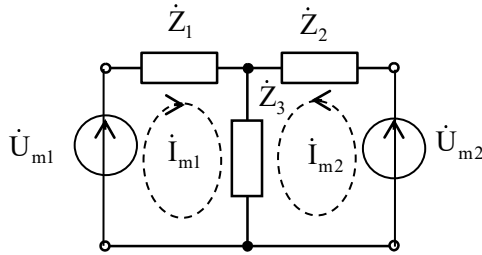


Рисунок 5.5

За схемою складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3)\dot{I}_{m1} + \dot{Z}_3\dot{I}_{m2} = \dot{U}_{m1}, \\ \dot{Z}_3\dot{I}_{m1} + (\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3)\dot{I}_{m2} = \dot{U}_{m2}. \end{cases}$$

Вирішуємо систему методом Крамера і отримуємо Y – параметри чотириполюсника:

$$\dot{I}_{m1} = \frac{1}{\dot{\Delta}} \begin{vmatrix} \dot{U}_{m1} & \dot{Z}_3 \\ \dot{U}_{m2} & \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 \end{vmatrix} = \frac{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}{\dot{\Delta}} \dot{U}_{m1} + \frac{-\dot{Z}_3}{\dot{\Delta}} \dot{U}_{m2} = \dot{Y}_{11} \dot{U}_{m1} + \dot{Y}_{12} \dot{U}_{m2},$$

$$\dot{I}_{m2} = \frac{1}{\dot{\Delta}} \begin{vmatrix} \dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 & \dot{U}_{m1} \\ \dot{Z}_3 & \dot{U}_{m2} \end{vmatrix} = \frac{-\dot{Z}_3}{\dot{\Delta}} \dot{U}_{m1} + \frac{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3}{\dot{\Delta}} \dot{U}_{m2} = \dot{Y}_{21} \dot{U}_{m1} + \dot{Y}_{22} \dot{U}_{m2},$$

де $\dot{\Delta} = (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3)(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3) - \dot{Z}_3^2$.

- Якщо для аналізу застосувати метод вузлових потенціалів, підключивши до схеми на рис. 5.3 джерела струму, то будуть визначені Z -параметри чотириполюсника.

5.4 ЗАЛЕЖНІ ДЖЕРЕЛА НАПРУГИ І СТРУМУ

При побудові моделей електронних компонентів (напівпровідникових діодів, транзисторів, мікросхем)

використовуються джерела напруги і струму, величина яких залежить від напруги і струмів, що діють в інших частинах схеми. Таких джерел чотири, і вони являють собою найпростіші чотириполюсники.

- Джерело напруги, кероване напругою.

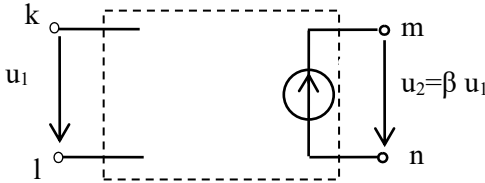


Рисунок 5.6

На рис. 5.6 залежне джерело напруги включено між m і n вузлами схеми, а керуюча напруга діє між k і l вузлами, β - коефіцієнт передачі за напругою.

- Джерело напруги, кероване струмом.

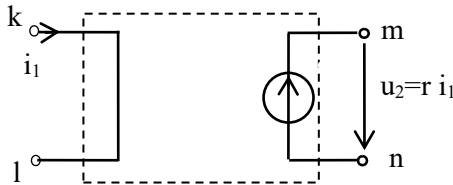


Рисунок 5.7

На рис. 5.7 залежне джерело напруги включено між m і n вузлами схеми, а керуючий струм - це струм, що протікає по гілці між k і l вузлами, r - опір передачі за напругою.

- Джерело струму, кероване напругою.

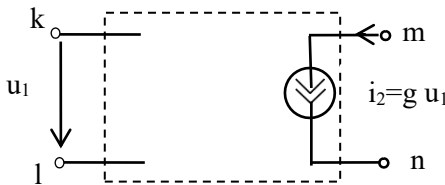


Рисунок 5.8

На рис. 5.8 залежне джерело струму включено між m и n вузлами схеми, а керуюча напруга діє між k и l вузлами, g - провідність передачі за струмом.

- *Джерело струму, кероване струмом.*

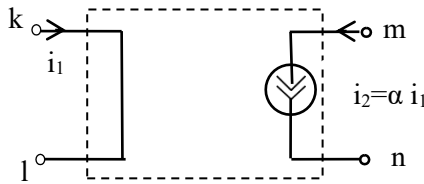


Рисунок 5.9

На рис. 5.9 залежне джерело струму включено між m и n вузлами схеми, а керуючий струм протікає по гілці між k и l вузлами, α - коефіцієнт передачі за струмом.

5.5 СХЕМИ ЗАМІЩЕННЯ ЧОТИРИПОЛЮСНИКА

За допомогою залежних джерел за рівняннями (5.1) - (5.3) можуть бути складені схеми заміщення чотириполюсників.

Наприклад, схема, еквівалентна системі рівнянь (5.1), приведена на рис. 5.11.

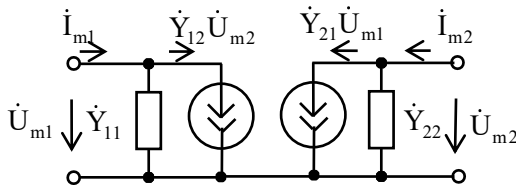


Рисунок 5.11

Схема складена згідно з законом Кірхгофа для струмів, ліва частина схеми відповідає першому рівнянню в (5.1), права частина - другому рівнянню.

На рис. 5.12 приведена схема заміщення, еквівалентна (5.2).

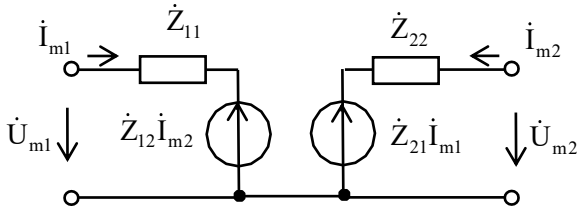


Рисунок 5.12

Схема складена згідно з законом Кірхгофа для напруг, ліва частина схеми відповідає першому рівнянню в (5.2), права частина - другому рівнянню

Аналогічно за допомогою законів Кірхгофа складається на рис. 5.13 схема заміщення рівнянь (5.3).

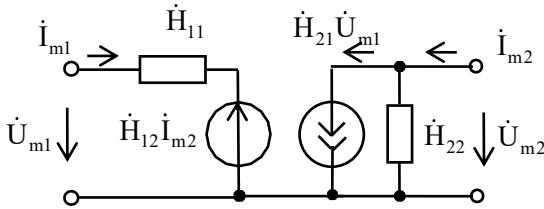


Рисунок 5.13

Ліва частина схеми відповідає першому рівнянню в (5.3), права частина - другому рівнянню. Ліва частина складена згідно з законом Кірхгофа для напруг, права частина - згідно з законом Кірхгофа для струмів.

Приклад 5.4. Лінійна модель біполярного п-р-п транзистора.

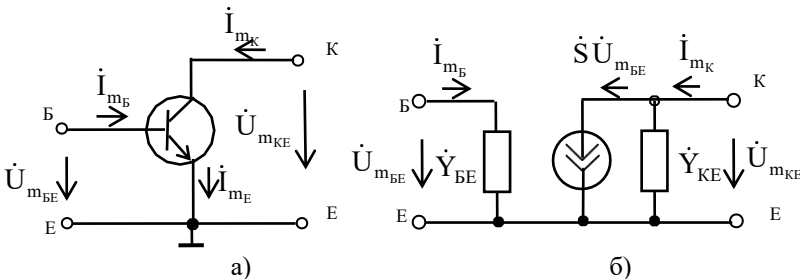


Рисунок 5.14

На рис. 5.14,а показано транзистор, включений за схемою з загальним емітером, а на рис. 5.14,б - його схема заміщення, побудована за рис. 5.11. Провідність зворотного зв'язку \dot{Y}_{12} в схемі відсутня, так як у транзисторів вона близька до нуля, провідність прямої передачі \dot{Y}_{21} позначена через \dot{S} і називається *крутизною*.

Приклад 5.5. Лінійна модель операційного підсилювача. *Операційний підсилювач* (ОП) – це мікросхема, що виконує функції підсилювача напруги з великим коефіцієнтом підсилення, з високим входним опором, низьким вихідним опором і широкою смугою пропускання. ОП призначений для виконання різноманітних операцій над аналоговими сигналами.

ОП має диференційний вхід, що забезпечує посилення різниці двох входних сигналів, і один вихід. Схемне зображення ОП показано на рис. 5.15,а, де 1 – прямий (неінвертуючий) вхід, 2 – інверсний (інвертуючий) вхід, 3 – вихід.

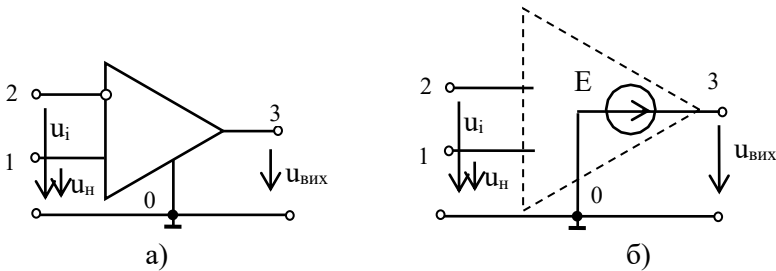


Рисунок 5.15

Вихідна напруга $u_{\text{вих}}$ зв'язана з напругами на входах ОП співвідношенням:

$$u_{\text{вих}} = k(u_{\text{н}} - u_{\text{i}}),$$

де k – коефіцієнт підсилення.

Для сучасних ОП коефіцієнт підсилення $k = 10^5 - 10^6$, вхідний опір $R_{\text{вх}}$ становить $10^5 - 10^{12}$ Ом, вихідний опір $R_{\text{вих}}$ - порядку десятків ом. Амплітудно-частотна характеристика починається від нульової частоти і закінчується одиницями, десятками мегагерц.

Якщо вважати, що $R_{вх} = \infty$, $R_{вих} = 0$, то ідеальний ОП можна уявити еквівалентною схемою, показаною на рис. 5.15,б, де $E = k(u_n - u_i)$.

5.6 ПАРАМЕТРИ НАВАНТАЖЕНОГО ЧОТИРИПОЛЮСНИКА

Чотириполіусник, до виходу якого підключено навантаження називається навантаженим, його схема приведена на рис. 5.16, де \dot{Y}_H - комплексна провідність навантаження.

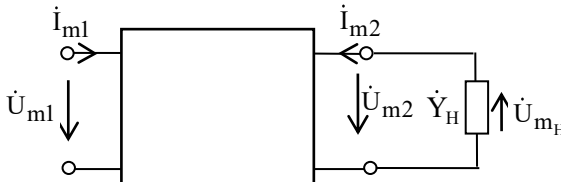


Рисунок 5.16

Основними параметрами навантаженого чотириполіусника є: вхідна провідність, коефіцієнти передачі за напругою і струмом.

- *Коефіцієнт передачі за напругою:* $\dot{K} = \dot{U}_{m2} / \dot{U}_{m1}$.

Вивід формули. З рис. 5.16 знаходимо $\dot{I}_{m2} = \dot{Y}_H \dot{U}_{mH}$, $\dot{U}_{mH} = -\dot{U}_{m2}$. Підставляємо \dot{I}_{m2} в друге рівняння в (5.1), після перетворень отримуємо:

$$\dot{K} = \frac{-\dot{Y}_{21}}{\dot{Y}_{22} + \dot{Y}_H}. \quad (5.4)$$

- *Вхідна провідність:* $\dot{Y}_{ex} = \dot{I}_{m1} / \dot{U}_{m1}$.

Вивід формули. Розділивши перше рівняння в (5.1) на \dot{U}_{m1} і враховуючи (5.4), отримаємо:

$$\dot{Y}_{вх} = \dot{Y}_{11} - \frac{\dot{Y}_{12} \dot{Y}_{21}}{\dot{Y}_{22} + \dot{Y}_H}. \quad (5.5)$$

- *Коефіцієнт передачі за струмом:* $\dot{K}_i = \dot{I}_{m2} / \dot{I}_{m1}$.

Вивід формули. Розділивши перше рівняння в (5.1) на друге і з огляду на (5.4), після перетворень отримаємо:

$$\dot{K}_i = \frac{\dot{Y}_{21}\dot{Y}_H}{\dot{Y}_{11}\dot{Y}_H + \Delta}. \quad (5.6)$$

де $\Delta = \dot{Y}_{11}\dot{Y}_{22} - \dot{Y}_{21}\dot{Y}_{12}$ - визначник матриці системи рівнянь в (5.1).

Приклад 5.6. Коефіцієнт посилення по напрузі підсилювача на транзисторі на рис. 5.14 з навантаженням \dot{Y}_H в колі колектора згідно (5.4) розраховується за формулою

$$\dot{K} = \frac{-\dot{S}}{\dot{Y}_{KE} + \dot{Y}_H}.$$

5.7 ЗВ'ЯЗАНІ КОТУШКИ ІНДУКТИВНОСТІ

Дві або більше котушок індуктивності, які мають загальний магнітний потік, називаються зв'язаними.

На рис. 5.16 наведено дві зв'язані котушки індуктивності при різному напрямку струмів в них.

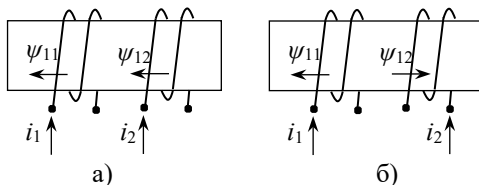


Рисунок 5.17

На рисунках Ψ_{11} - магнітний потік самоіндукції, викликаний власним струмом першої котушки, Ψ_{12} - магнітний потік взаємної індукції в першій котушці, викликаний власним струмом другої котушки. Аналогічно друга котушка характеризується магнітним потоком Ψ_{22} самоіндукції і магнітним потоком взаємної індукції Ψ_{21} . Залежно від напрямку струмів в котушках або від напрямку намотування витків котушок повний магнітний потік в котушці буде складатися з суми або різниці потоків самоіндукції і взаємної індукції.

Для зв'язаних котушок на рис. 5.17,а з узгодженим напрямком струмів повні потоки будуть визначатися сумою:

$$\begin{cases} \Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12}, \\ \Psi_2 = \Psi_{21} + \Psi_{22}. \end{cases} \quad (5.7)$$

Для зустрічного напрямку струмів в котушках на рис. 5.17, б повні потоки визначаються різницею:

$$\begin{cases} \Psi_1 = \Psi_{11} - \Psi_{12}, \\ \Psi_2 = -\Psi_{21} + \Psi_{22}. \end{cases} \quad (5.8)$$

На рис. 5.18 зображені умовні позначення зв'язаних котушок, точкою відзначено початок намотування витків котушок.

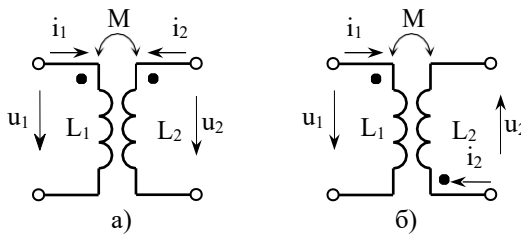


Рисунок 5.18

Рис. 5.18,а відповідає узгодженому включенню котушок (береться М з плюсом), 5.18,б - зустрічному (береться М з мінусом). Якщо котушки представляють собою лінійні елементи, то магнітні потоки самоіндукції і взаємоіндукції в (5.7), будуть пропорційні струмам:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \Psi_{11} \pm \Psi_{12} = L_1 i_1 \pm M i_2, \\ \Psi_2 &= \pm \Psi_{21} + \Psi_{22} = \pm M i_1 + L_2 i_2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Тут $L_1 = \Psi_{11}/i_1$, $L_2 = \Psi_{22}/i_2$ - індуктивності котушок, $M = \Psi_{12}/i_2 = \Psi_{21}/i_1$ - взаємна індуктивність.

В результаті диференціювання (5.9) складеється модель зв'язаних котушок для часової області:

$$\begin{cases} u_1 = L_1 di_1/dt \pm M di_2/dt, \\ u_2 = \pm M di_1/dt + L_2 di_2/dt. \end{cases} \quad (5.10)$$

Для частотної області ($d/dt \rightarrow j\omega t$):

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 = \pm j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2. \end{cases} \quad (5.11)$$

За (5.11) можна скласти на рис. 5.19 схему заміщення пов'язаних котушок, аналогічну схемі на рис. 5.12:

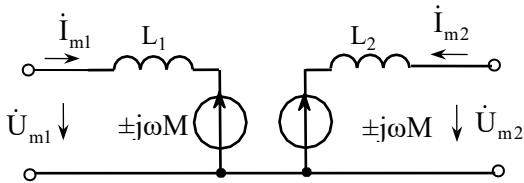


Рисунок 5.19

Якщо при узгодженому включенні котушок переписати рівняння (5.11) наступним чином:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega(L_1 - M)\dot{I}_1 + j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2), \\ \dot{U}_2 = j\omega M(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) + j\omega L_2(\dot{I}_2 - M), \end{cases} \quad (5.12)$$

то за цією системою рівнянь можна скласти Т-образну схему заміщення пов'язаних котушок, зображену на рис. 5.20.

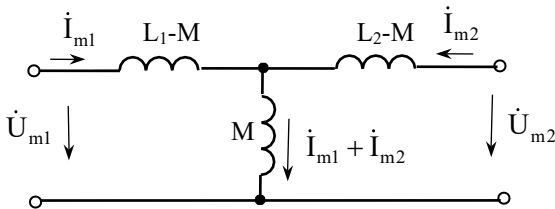


Рисунок 5.20

Аналіз цієї схеми методом контурних струмів призводить до рівнянь (5.12).

5.8 ТРАНСФОРМАТОР

Трансформатор - це пристрій, який служить для передачі енергії з одного кола в інше за допомогою електромагнітної індукції. Трансформатор складається з двох або декількох індуктивно зв'язаних котушок, розташованих на загальному сердечнику. Для збільшення інтенсивності магнітного потоку в котушках сердечник виконується з феромагнітного матеріалу з високою магнітною проникністю.

Різновидом трансформаторів є силовий трансформатор, який використовується в блоках електроживлення електронних пристроїв. Силовий трансформатор складається з первинної обмотки, до якої підключається джерело змінної напруги, і вторинних обмоток, до яких підключаються навантаження. На рис. 5.21,а зображена конструкція силового трансформатора, а на рис. 5.21,б - його умовне позначення на електричних схемах.

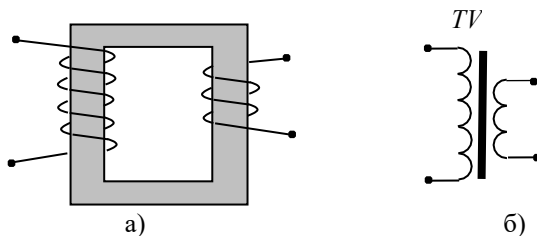


Рисунок 5.21

Рисунок відповідає конструкції і умовному позначенню силового понижуючого трансформатора, що містить первинну обмотку з великим числом витків і вторинну обмотку з меншим числом витків. Величина напруги в обмотках пропорційна числу витків.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дайте визначення чотиріполюсника.
2. Наведіть рівняння чотиріполюсників в Y , Z , H – формі запису.
3. Фізичний сенс Y - параметрів чотиріполюсника.

4. Фізичний сенс Z - параметрів чотириполюсника.
5. Методи визначення параметрів чотириполюсника.
6. Накресліть схеми залежних джерел напруги.
7. Накресліть схеми залежних джерел струму.
8. Накресліть схему заміщення чотириполюсника для Y -форми рівнянь.
9. Накресліть схему заміщення чотириполюсника для Z - форми рівнянь.
10. Основні параметри навантаженого чотириполюсника і формули для їх розрахунку.
11. Дайте визначення зв'язаних котушок індуктивності, вкажіть їх умовні позначення на схемах.
12. Запишіть системи рівнянь зв'язаних котушок індуктивності для часової і частотної області.
13. Накресліть схему заміщення зв'язаних котушок індуктивності з залежними джерелами.
14. Накресліть Т-образну схему заміщення зв'язаних котушок індуктивності.
15. Дайте визначення силового трансформатора, вкажіть його призначення, конструкцію, умовне позначення на схемах.

БІБЛОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Основи теорії кіл: підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч.1 / Ю.О. Коваль, Л.В. Гринченко, І.О. Милютченко, О.І. Рибін, В.М. / за заг. редакцією В.М. Шокала та В.І. Правди. – Харків: Компанія СМІТ, 2008. 432 с.
2. Основи теорії кіл: підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч.2 / Ю.О. Коваль, Л.В. Гринченко, І.О. Милютченко, О.І. Рибін, В.М. / за заг. редакцією В.М. Шокала та В.І. Правди. – Харків: Компанія СМІТ, 2008. 560 с.
3. Соболев Ю.В., Бабаев М.М., Давиденко М.Г. Теорія електричних і магнітних кіл. – Харків: ХФВ «Транспорт України», 2002. – 264 с.
4. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учеб. для вузов. Изд. 10-е. - М.: Гардарики, 2002. - 638 с.
5. Попов В.П. Основы теории цепей: Учеб. для вузов. Изд. 3-е - М.: Высшая школа, 2000. - 575с.

Навчальне видання

КАРПУКОВ Леонід Матвійович

ОСНОВИ ТЕОРІЇ КІЛ, СИГНАЛІВ ТА ПРОЦЕСІВ В ЕЛЕКТРОНІЦІ

Частина 1

Навчальний посібник

Комп'ютерний набір: *Карпуков Л. М.*

Комп'ютерна верстка: *Дяченко О.О.*

Підписано до друку 2021. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк.
Тираж 100 прим. Зам. №

Національний університет «Запорізька політехніка»
Україна, 69063, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64
Тел.: (061) 769-82-96, 220-12-14

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №6952 від 22.10.2019.