МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

І. М. Килимник, Т.Г. Полякова

ПРАКТИКУМ З ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

Запоріжжя • НУ «Запорізька політехніка» • 2020

УДК 517.91(075.8)
К 39

Рекомендовано до друку Вченою радою Національного університету «Запорізька політехніка», (Протокол № 4/20 від 02.03.2020 р.)

Рецензенти:

Гребенюк С. М., доктор технічних наук, доцент Запорізького національного університету;

Корніч Г. В., доктор фізико-математичних наук, професор національного університету «Запорізька політехніка».

К39 Практикум з інтегрування функції однієї змінної: Навчальний посібник /І. М. Килимник, Т.Г. Полякова. – Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2020. – 306 с.

ISBN 978-617-529-254-9

У навчальному посібнику «Практикум з інтегрування функції однієї змінної» викладено основні теоретичні положення за темами «Невизначений інтеграл» і «Визначений інтеграл», методи інтегрування та застосування інтегрального числення при розв'язуванні прикладних задач.

Всі теоретичні положення супроводжуються великою кількістю прикладів з докладним розв'язанням. Для більш повного засвоєння матеріалу запропоновані завдання для самостійної роботи з відповідями.

Навчальний посібник «Практикум з інтегрування функції однієї змінної» призначений для студентів інженерно-технічних напрямів підготовки заочної (дистанційної) форми навчання та для самостійної роботи студентів денної форми навчання.

УДК 517.91(075.8)

ISBN 978-617-529-254-9

ЗМІСТ

ВСТУП

Інтегральне числення – це розділ математичного аналізу, в якому вивчаються властивості і способи обчислення інтегралів та їх застосування для розв'язання як теоретичних, так і прикладних задач. Тема «Інтегрування функції однієї змінної» є ключовою для подальшого вивчення розділів вищої математики, таких як «Звичайні диференціальні рівняння та системи диференціальних рівнянь», «Інтегрування функції кількох змінних», «Криволінійні інтеграли» та інших.

Навчальний посібник «Практикум з інтегрування функції однієї змінної» написаний на основі багаторічного досвіду викладання курсу «Вища математика» для студентів інженерно-технічних напрямів підготовки.

У першому розділі «Невизначений інтеграл» запропонованого навчального посібника викладені основні поняття, властивості і методи обчислення невизначених інтегралів. Другий розділ «Визначений інтеграл» включає методи обчислення визначеного інтеграла, невласні інтеграли першого і другого роду, застосування визначеного інтеграла для розв'язання задач геометрії, фізики та механіки.

Кожна тема включає в себе необхідний теоретичний матеріал, викладений коротко і доступно, який супроводжується великою кількістю прикладів із розв'язанням, а також завдання для самостійного розв'язування з відповідями.

Даний посібник дозволяє студентам не тільки отримати необхідну кількість інформації, але і поглибити та поширити знання, що були ними засвоєні на лекціях та практичних заняттях.

Посібник відповідає програмі курсу вищої математики, корисний для студентів інженерно-технічних спеціальностей заочної (дистанційної) форми навчання і може широко використовуватися студентами денної форми навчання: для самостійної роботи, а також на практичних заняттях і для виконання індивідуального завдання з теми «Інтегрування функції однієї змінної».

1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1 Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла

Однією з основних задач у диференціальному численні є знаходження похідної $F'(x)$ або диференціала $dF(x) = F'(x)dx$ даної функції $F(x)$.

Основною задачею інтегрального числення є зворотна задача: відновлення функції $F(x)$ за заданою її похідною $F'(x) = f(x)$ або заданим диференціалом $dF(x) = f(x)dx$. Цей процес називають інтегруванням.

<u>Означення 1.1</u> Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо $F(x)$ диференційована на $(a;b)$ і для усіх $x \in (a;b)$ виконується рівність

$$F'(x) = f(x) \tag{1.1}$$

або

$$dF(x) = f(x)dx\,. \tag{1.2}$$

Наприклад, для усіх $x \in (-\infty;\infty)$ слушно $(\cos x)' = -\sin x$, тому функція $\cos x$ є первісною для функції $(-\sin x)$, а функція a^x є первісною для функції $a^x \ln a$, тому що $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$.

Функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$, тому що $F'(x) = f(x)$, але і $(F(x)+C)' = f(x)$, $C - const$. Тому функція $F(x)+C$ є первісною для функції $f(x)$. Існує множина первісних $F(x)$ для функції $f(x)$, які відрізняються тільки сталою:

$$(F(x)+C)' = F'(x) = f(x). \tag{1.3}$$

<u>Означення 1.2</u> Множину первісних називають невизначеним інтегралом функції $f(x)$ і записують

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad (1.4)$$

де x – змінна інтегрування, $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, $C - const$.

Наприклад, $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$,

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

<u>Теорема 1.1</u>. Для будь-якої функції $f(x)$, неперервної на проміжку $(a;b)$, існує на цьому проміжку первісна функція $F(x)$, отже і інтеграл $\int f(x)dx$.

1.2 Властивості невизначеного інтеграла

1) Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \qquad (1.5)$$

2) Невизначений інтеграл від диференціала функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:

$$\int dF(x) = F(x) + C. \qquad (1.6)$$

3) Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx. \qquad (1.7)$$

4) Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int k f(x)dx = k\int f(x)dx, \qquad (1.8)$$

де $k - const$.

5) Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченної кількості функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від кожної з цих функцій:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx . \tag{1.9}$$

6) Якщо $\int f(x)d\,x = F(x) + C$ і $u = u(x)-$ довільна функція, яка має на деякому проміжку неперервну похідну $u'(x)$, то

$$\int f(u)\,du = F(u) + C \tag{1.10}$$

7) Якщо $u = ax + b$, то $a\int f(ax+b)d\,x = F(ax+b) + C$, отже

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C . \tag{1.11}$$

1.3 Таблиця найпростіших інтегралів

Доповнимо таблицю інтегралів, яку вивчали в школі (1)–(10), табличними інтегралами (11) –(24), які потрібні при вивченні курсу вищої математики:

1	$\int 0\,d\,x = C$	2	$\int 1\,d\,x = x + C$
3	$\int x^n d\,x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C ,\ n \neq -1$	3а	$\int \sqrt{x}\,d\,x = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C$
4	$\int \frac{dx}{x^{\mathrm{n}}} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + C\ , n \neq 1$	4а	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
4б	$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$	5	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$

6	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	6a	$\int e^x dx = e^x + C$
7	$\int \cos x dx = \sin x + C$	8	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg x + C$	10	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg x + C$
11	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C =$ $= \ln\left\|\frac{1}{\cos x} + tg x\right\| + C$	12	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg \frac{x}{2}\right\| + C =$ $= \ln\left\|\frac{1}{\sin x} - ctg x\right\| + C$
13	$\int tgx dx = -\ln\|\cos x\| + C$	14	$\int ctg x dx = \ln\|\sin x\| + C$
15	$\int chx dx = shx + C$	16	$\int shx dx = chx + C$
17	$\int \frac{dx}{ch^2 x} = th x + C$	18	$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$
19	$\int thx dx = \ln\|chx\| + C$	20	$\int cthx dx = \ln\|sh x\| + C$
21	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C =$ $= -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C$	21a	$\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C =$ $= -arcctg x + C$
22	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$	23	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arc\sin \frac{x}{a} + C =$ $= -arc\cos \frac{x}{a} + C$
24	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$	25	$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2} +$ $+ \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$

26	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = x \cdot \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

Зауваження 1.1 Кожна з формул таблиці слушна для тих значень змінної x, що належать області визначення підінтегральної функції $f(x)$.

1.4 Метод безпосереднього інтегрування

До ***безпосереднього інтегрування*** належать інтеграли, які є табличними або які за допомогою тотожних перетворень та властивостей невизначеного інтеграла легко зводяться до однієї або декількох формул табличних інтегралів.

Приклад 1. Знайти $\int \left(x^3 - 2x\right)^2 dx$.

Розв'язання.

$$I = \int \left(x^3 - 2x\right)^2 dx = \left[\text{Піднесемо до квадрата}\right] = \int \left(x^6 - 4x^4 + 4x^2\right) dx =$$

$$= \left[\text{Властивості } (1.9) \text{ і } (1.8)\right] = \int x^6\,dx - 4\int x^4\,dx + 4\int x^2\,dx =$$

$$= \left[\text{Формула 3}\right] = \frac{x^7}{7} - -4 \cdot \frac{x^5}{5} + 4 \cdot \frac{x^3}{3} + C\,.$$

Відповідь: $I = \frac{x^7}{7} - \frac{4}{5} \cdot x^5 + \frac{4}{3} \cdot x^3 + C$.

Приклад 2. Знайти $\int \frac{\sqrt{x} + x^{\frac{2}{3}} - 1}{x}\,dx$.

Розв'язання.

$$I=\int\frac{\sqrt{x}+x^{\frac{2}{3}}-1}{x}\,dx=\left[\text{Чисельник почленно ділимо на знаменник}\right]=$$

$$=\int\left(\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x}-\frac{1}{x}\right)dx=\left[\text{Властивість }(1.9)\right]=\int\frac{dx}{\sqrt{x}}+\int x^{-\frac{1}{3}}dx-\int\frac{dx}{x}=$$

$$=\left[\text{Формули }3{,}5\right]=2\sqrt{x}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}-\ln|\mathrm{x}|+C=2\sqrt{x}+\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{2}{3}}-\ln|\mathrm{x}|+C.$$

Відповідь: $I=2\sqrt{x}+\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{2}{3}}-\ln|\mathrm{x}|+C$.

Приклад 3. Знайти $\int\left(3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\cdot(x-1)\,dx$.

Розв'язання.

$$I=\int\left(3\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\cdot(x-1)\,dx=\left[\text{Розкриємо дужки}\right]=\int(3x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}-$$

$$-\sqrt[3]{x})dx=\int\left(3x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right)dx=\left[\text{Властивості }(1.9)\text{ і }(1.8)\right]=$$

$$=3\int x^{\frac{3}{2}}dx-3\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{4}{3}}dx-\int x^{\frac{1}{3}}dx=\left[\text{Формула }3\right]=3\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-$$

$$-3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C=\frac{6}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}-2\cdot x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{7}\cdot x^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{4}\cdot x^{\frac{4}{3}}+C=$$

$$=\frac{6}{5}\cdot x^{2}\sqrt{x}-2\cdot x\sqrt{x}+\frac{3}{7}\cdot x^{2}\sqrt[3]{x}-\frac{3}{4}\cdot x\sqrt[3]{x}+C.$$

Відповідь: $I = \frac{6}{5} \cdot x^2 \sqrt{x} - 2 \cdot x\sqrt{x} + \frac{3}{7} \cdot x^2 \sqrt[3]{x} - \frac{3}{4} \cdot x\sqrt[3]{x} + C$.

Приклад 4. Знайти $\int \frac{dx}{x^2 - 10}$.

Розв'язання.

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 10} = [\text{Формула } 22] = \int \frac{dx}{x^2 - \left(\sqrt{10}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln\left|\frac{x - \sqrt{10}}{x + \sqrt{10}}\right| + C$$

Відповідь: $I = \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln\left|\frac{x - \sqrt{10}}{x + \sqrt{10}}\right| + C$.

Приклад 5. Знайти $\int \frac{dx}{x^2 + 13}$.

Розв'язання.

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + 13} = [\text{Формула } 21] = \int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{13}} arctg \frac{x}{\sqrt{13}} + C$$

Відповідь: $I = \frac{1}{\sqrt{13}} arctg \frac{x}{\sqrt{13}} + C$.

Приклад 6. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5}}$.

Розв'язання.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5}} = [\text{Формула } 24] = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 + 5}\right| + C$$

Відповідь: $I = ln\left|x + \sqrt{x^2 + 5}\right| + C$.

Приклад 7. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 7}}$.

Розв'язання.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}=\left[\text{Формула 24}\right]=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}}=ln\left|x+\sqrt{x^2-7}\right|+C$$

Відповідь: $I=ln\left|x+\sqrt{x^2-7}\right|+C$.

Приклад 8. Знайти $\int\frac{dx}{\sqrt{10-x^2}}$.

Розв'язання.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{10-x^2}}=\left[\text{Формула 23}\right]=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2-x^2}}=arc\sin\frac{x}{\sqrt{10}}+C.$$

Відповідь: $I=arc\sin\frac{x}{\sqrt{10}}+C$.

Приклад 9. Знайти $\int\left(3e^x-\frac{2}{\sin^2 x}\right)dx$.

Розв'язання.

$$I=\int\left(3e^x-\frac{2}{\sin^2 x}\right)dx=\left[\text{Властивість }(1.9)\right]=\int 3e^x dx-\int\frac{2}{\sin^2 x}dx=$$

$$=\left[\text{Властивість }(1.8)\right]=3\int e^x dx-2\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\left[\text{Формули 6а і 10}\right]=3e^x-$$

$$-2(-ctg\,x)+C=3e^x+2ctg\,x+C.$$

Відповідь: $I=3e^x+2ctg\,x+C$.

Приклад 10. Знайти $\int 2^x\cdot 3^{x+1}dx$.

Розв'язання.

$$I=\int 2^x\cdot 3^{x+1}dx=\int 2^x\cdot 3^x\cdot 3\,dx=\left[\text{Властивість }(1.8)\text{ і } a^{\mathrm{x}}\cdot b^x=(a\cdot b)^x\right]=$$

$$=3\int 6^x dx=\left[\text{Формула 6}\right]=3\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+C.$$

Відповідь: $I = \frac{3}{\ln 6} \cdot 6^x + C$.

Приклад 11. Знайти $\int \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$.

Розв'язання.

$I = \int \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha\right] = \int \sin x dx = [\text{Формула } 8] =$

$= -\cos x + C$.

Відповідь: $I = -\cos x + C$.

Приклад 12. Знайти $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

Розв'язання.

$I = \int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \left[\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right] = \int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos x}{2} dx =$

$= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos x dx = [\text{Формули } 2, 7] = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C$.

Відповідь: $I = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C$.

Приклад 13. Знайти $\int \mathrm{tg}^2 x dx$.

Розв'язання.

$I = \int \mathrm{tg}^2 x dx = \left[1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1\right] = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} -\right.$

$\left. -1\right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = [\text{Формули } 2, 9] = \mathrm{tg} x - x + C$

Відповідь: $I = \mathrm{tg} x - x + C$.

Приклад 14. Знайти $\int \frac{dx}{\cos^2 x - 1}$.

Розв'язання.

$$I=\int\frac{dx}{\cos^2 x-1}=\left[\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha-1=-\sin^2\alpha\right]=-\int\frac{dx}{\sin^2 x}=$$
$$=\left[\text{Формула }10\right]=-(-ctg\,x)+C=ctg\,x+C\ .$$

Відповідь: $I=ctg\,x+C$.

Приклад 15. Знайти $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$.

Розв'язання.

$$I=\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx=\left[\text{Піднесемо до квадрата}\right]=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+\right.$$
$$\left.+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=\left[\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\ 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin2\alpha\right]=$$
$$=\int(1+\sin x)dx=\left[\text{Властивість }(1.9)\text{ і Формули }2,8\right]=\int dx+$$
$$+\int\sin x\,dx=x-\cos x+C\ .$$

Відповідь: $I=x-\cos x+C$.

Приклад 16. Знайти $\int\frac{2x^3-x^2+2x-3}{x^2+1}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є раціональним дробом, у чисельнику якого многочлен третього степеня, а у знаменнику – многочлен другого степеня. Маємо неправильний раціональний дріб. Виділимо цілу частину цього дробу шляхом ділення чисельника на знаменник у «стовпчик»:

$$\begin{array}{r|l} -\,2x^3-x^2+2x-3 & x^2+1 \\ \underline{2x^3+2x\qquad\quad} & \overline{2x-1} \\ -\,-x^2-3 & \\ \underline{-x^2-1} & \\ -2 & \end{array}$$

Підінтегральну функцію записуємо у вигляді:

$$\frac{2x^3 - x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} = 2x - 1 + \frac{-2}{x^2 + 1}.$$

Тоді $I = \int \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} dx = \int \left(2x - 1 + \frac{-2}{x^2 + 1} \right) dx = \Big[$Власти - вості $(1.9), (1.8)$ і Формули 2,3, 21а$\Big] = 2\int x dx - \int dx - 2\int \frac{dx}{x^2 + 1} = 2 \cdot \frac{x^2}{2} -$
$- x - 2\, arctg\, x + C$.

Відповідь: $I = x^2 - x - 2\, arctg\, x + C$.

Приклад 17. Знайти $\int \frac{2 - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

Розв'язання.

$I = \int \frac{2 - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \Big[$Чисельник почленно ділимо на знаменник$\Big] =$

$= \int \left(\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} - 1 \right) dx = \Big[$Властивості (1.9), (1.8) і Формули 2, 23$\Big] =$

$= \int \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} dx - \int dx = 2\, arc\sin x - x + C$.

Відповідь: $I = 2\, arc\sin x - x + C$.

<u>Зауваження 1.2</u> Інтегруючи алгебраїчну суму функцій, дістають кілька довільних сталих, але у відповідь записують лише одну загальну сталу – їхню алгебраїчну суму.

1.4.1 Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли

Завдання	Відповідь
1. $\int\left(3x-x^4\right)^2dx$	$3x^3-x^6+\frac{1}{9}x^9+C$
2. $\int\frac{3\sqrt{x}-x^{\frac{5}{6}}+1}{x}dx$	$6\sqrt{x}-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+\ln\lvert x\rvert+C$
3. $\int\left(2\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}\right)(x+1)dx$	$\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{4}{3}x\sqrt{x}-\frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x}-\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}+C$
4. $\int\frac{dx}{x^2-15}$	$\frac{1}{2\sqrt{15}}\ln\left\lvert\frac{x-\sqrt{15}}{x+\sqrt{15}}\right\rvert+C$
5. $\int\frac{dx}{x^2+5}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C$
6. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+4}\right\rvert+C$
7. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-4}\right\rvert+C$
8. $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$	$arc\sin\frac{x}{2}+C$
9. $\int\left(\frac{3}{\cos^2x}-2e^x\right)dx$	$3tgx-2e^x+C$
10. $\int\frac{2^{x-1}}{3^x}dx$	$\frac{1}{2\ln\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x+C$
11. $\int\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx$	$\sin x+C$
12. $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$	$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C$
13. $\int ctg^2xdx$	$-ctgx-x+C$

Завдання	Відповідь
14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 1}$	$C - tgx$
15. $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} \right)^2 dx$	$x + \cos x + C$
16. $\int \frac{3x^3 + x^2 - 12x - 6}{x^2 - 4} dx$	$\frac{3}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-2}{x+2}\right\| + C$
17. $\int \frac{3 + \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$	$3\ln\left\|x + \sqrt{x^2 + 4}\right\| + x + C$

1.4.2 Узагальнена таблиця найпростіших інтегралів та її застосування

На основі властивості (1.10) отримаємо узагальнену таблицю найпростіших інтегралів відносно функції $u = u(x)$:

1	$\int 0du = C$	2	$\int du = u + C$
3	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$	3а	$\int \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C$
4	$\int \frac{du}{u^{\mathrm{n}}} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{u^{n-1}} + C$	4а	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
4б	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	5	$\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + C$
6	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	6а	$\int e^u du = e^u + C$
7	$\int \cos u du = \sin u + C$	8	$\int \sin u\, du = -\cos u + C$
9	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$	10	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$

11	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\|tg\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C =$ $= \ln\left\|\frac{1}{\cos u} + tgu\right\| + C$	12	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\|tg\frac{u}{2}\right\| + C =$ $= \ln\left\|\frac{1}{\sin u} - ctg\,u\right\| + C$
13	$\int tgu\,du = -\ln\|\cos u\| + C$	14	$\int ctgu\,du = \ln\|\sin u\| + C$
15	$\int ch u du = sh u + C$	16	$\int sh u du = ch u + C$
17	$\int \frac{du}{ch^2 u} = th u + C$	18	$\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C$
19	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C =$ $= -\frac{1}{a} arcctg\frac{u}{a} + C$	19a	$\int \frac{du}{1+u^2} = arctg\,u + C$
20	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$	21	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arc\sin\frac{u}{a} + C =$ $= -arc\cos\frac{u}{a} + C$
22	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$	23	$\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = u \cdot \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{2} +$ $+ \frac{a^2}{2} arc\sin\frac{u}{a} + C$
24	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = u \cdot \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{2} \pm$ $\pm \frac{a^2}{2}\ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$	25	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\|f(x)\| + C$
		26	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C$

Вибираючи в різні способи функцію u, можемо суттєво розширити область застосування таблиці інтегралів.

<u>Зауваження 1.3</u> Таблицею інтегралів можна користуватись у випадку, коли аргумент підінтегральної функції і вираз під знаком диференціала однакові: $\int f(u)\,du = F(u) + C$.

<u>Зауваження 1.4</u> Слід пам'ятати, що $du = d(u \pm b)$, $du = ad\left(\frac{1}{a}u\right)$, $du = \frac{1}{a}d(au + b)$, де $a, b - const$, $a \neq 0$.

Приклад 18. Знайти $\int e^{-2x} d(-2x)$.

Розв'язання. $I = \int e^{-2x} d(-2x) = e^{-2x} + C$.

Відповідь: $I = e^{-2x} + C$.

Приклад 19. Знайти $\int (3x+5)^4 d(3x+5)$.

Розв'язання. $I = \int (3x+5)^4 d(3x+5) = \frac{(3x+5)^5}{5} + C$.

Відповідь: $I = \frac{(3x+5)^5}{5} + C$.

Приклад 20. Знайти $\int 2^{3-x} d(3-x)$.

Розв'язання. $I = \int 2^{3-x} d(3-x) = \frac{2^{3-x}}{\ln 2} + C$.

Відповідь: $I = \frac{2^{3-x}}{\ln 2} + C$.

Приклад 21. Знайти $\int \sin\frac{x}{5} d\left(\frac{x}{5}\right)$.

Розв'язання. $I = \int \sin\frac{x}{5} d\left(\frac{x}{5}\right) = -\cos\frac{x}{5} + C$.

Відповідь: $I=-\cos\frac{x}{5}+C$.

Приклад 22. Знайти $\int\frac{d\left(3+2x\right)}{3+2x}$.

Розв'язання. $I=\int\frac{d\left(3+2x\right)}{3+2x}=\ln\left|3+2x\right|+C$.

Відповідь: $I=\ln\left|3+2x\right|+C$.

Приклад 23. Знайти $\int\sin\left(4-3x\right)d\left(4-3x\right)$.

Розв'язання. $I=\int\sin\left(4-3x\right)d\left(4-3x\right)=-\cos\left(4-3x\right)+C$.

Відповідь: $I=-\cos\left(4-3x\right)+C$.

Приклад 24. Знайти $\int\frac{d\left(3x\right)}{9x^2+5}$.

Розв'язання.

$$I=\int\frac{d\left(3x\right)}{9x^2+5}=\int\frac{d\left(3x\right)}{(3x)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3x}{\sqrt{5}}+C\ .$$

Відповідь: $I=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3x}{\sqrt{5}}+C$.

Приклад 25. Знайти $\int\frac{d\left(5x\right)}{25x^2-3}$.

Розв'язання.

$$I=\int\frac{d\left(5x\right)}{25x^2-3}=\int\frac{d\left(5x\right)}{(5x)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{5x-\sqrt{3}}{5x+\sqrt{3}}\right|+C\ .$$

Відповідь: $I=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{5x-\sqrt{3}}{5x+\sqrt{3}}\right|+C$.

Приклад 26. Знайти $\int \frac{d(2x-1)}{\sqrt{4x-4x^2}}$.

Розв'язання. $I=\int \frac{d(2x-1)}{\sqrt{4x-4x^2}}=\Big[4x-4x^2=-\left(4x^2-4x\right)=$

$=-\left(4x^2-4x+1-1\right)=-\left((2x-1)^2-1\right)=1-(2x-1)^2\Big]=\int \frac{d(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}=$

$=\arcsin(2x-1)+C$.

Відповідь: $I=\arcsin(2x-1)+C$.

Приклад 27. Знайти $\int \frac{d(\sin x)}{\cos(\sin x)}$.

Розв'язання. $I=\int \frac{d(\sin x)}{\cos(\sin x)}=\ln\left|tg\left(\frac{\sin x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$.

Відповідь: $I=\ln\left|tg\left(\frac{\sin x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$.

Приклад 28. Знайти $\int \frac{d\left(2x^2+1\right)}{\cos^2\left(2x^2+1\right)}$.

Розв'язання. $I=\int \frac{d\left(2x^2+1\right)}{\cos^2\left(2x^2+1\right)}=tg\left(2x^2+1\right)+C$.

Відповідь: $I=tg\left(2x^2+1\right)+C$.

Приклад 29. Знайти $\int \frac{d\left(e^x\right)}{e^{2x}+7}$.

Розв'язання. $I=\int \frac{d\left(e^x\right)}{e^{2x}+7}=\int \frac{d\left(e^x\right)}{\left(e^x\right)^2+\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{7}}\,arctg\frac{e^x}{\sqrt{7}}+C$.

Відповідь: $I = \frac{1}{\sqrt{7}} arctg \frac{e^x}{\sqrt{7}} + C$.

Приклад 30. Знайти $\int \cos^5 3x\, d\left(\cos 3x\right)$.

Розв'язання. $I = \int \cos^5 3x\, d\left(\cos 3x\right) = \frac{\cos^6 3x}{6} + C$.

Відповідь: $I = \frac{\cos^6 3x}{6} + C$.

Приклад 31. Знайти $\int \frac{d\left(\ln x\right)}{\sqrt{\ln x}}$.

Розв'язання. $I = \int \frac{d\left(\ln x\right)}{\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln x} + C$.

Відповідь: $I = 2\sqrt{\ln x} + C$.

Приклад 32. Знайти $\int \frac{d\left(\cos x\right)}{\cos x}$.

Розв'язання. $I = \int \frac{d\left(\cos x\right)}{\cos x} = \ln\left|\cos x\right| + C$.

Відповідь: $I = \ln\left|\cos x\right| + C$.

Приклад 33. Знайти $\int ctg^4 x\, d\left(ctg\ x\right)$.

Розв'язання. $I = \int ctg^4 x\, d\left(ctg\ x\right) = \frac{ctg^5 x}{5} + C$.

Відповідь: $I = \frac{ctg^5 x}{5} + C$.

Приклад 34. Знайти $\int \sqrt[5]{arc\mathrm{tg} 2x}\, d\left(arc\mathrm{tg}\, 2x\right)$.

Розв'язання.

$$I=\int\sqrt[5]{arc\text{tg}\,2x}\,d\left(arc\text{tg}\,2x\right)=\int\left(arc\text{tg}\,2x\right)^{\frac{1}{5}}d\left(arc\text{tg}\,2x\right)=$$

$$=\frac{\left(arc\text{tg}\,2x\right)^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}+C=\frac{5}{6}\left(arc\text{tg}\,2x\right)^{\frac{6}{5}}+C=\frac{5}{6}arc\text{tg}\,2x\sqrt[5]{arc\text{tg}\,2x}+C.$$

Відповідь: $I=\frac{5}{6}arc\text{tg}\,2x\sqrt[5]{arc\text{tg}\,2x}+C$.

Приклад 35. Знайти $\int\frac{d\left(tg\,3x\right)}{tg^4 3x}$.

Розв'язання. $I=\int\frac{d\left(tg\,3x\right)}{tg^4 3x}=\int\left(tg\,3x\right)^{-4}d\left(tg\,3x\right)=$

$$=\frac{tg^{-3}3x}{-3}+C=-\frac{1}{3tg^3 3x}+C.$$

Відповідь: $I=-\frac{1}{3tg^3 3x}+C$.

1.4.3 Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли

Завдання	Відповідь
1. $\int\left(4x+5\right)^5 d\left(4x+5\right)$	$\frac{\left(4x+5\right)^6}{6}+C$
2. $\int e^{\frac{1}{3}x}d\left(\frac{1}{3}x\right)$	$e^{\frac{1}{3}x}+C$
3. $\int 5^{4-3x}d\left(4-3x\right)$	$\frac{5^{4-3x}}{\ln 5}+C$
4. $\int\sin\frac{2x}{3}d\left(\frac{2x}{3}\right)$	$-\cos\frac{2x}{3}+C$

Завдання	Відповідь
5. $\int \frac{d(6x-5)}{6x-5}$	$\ln\lvert 6x-5\rvert + C$
6. $\int \cos(5x-4)d(5x-4)$	$\sin(5x-4)+C$
7. $\int \frac{d(2x)}{4x^2+9}$	$\frac{1}{3}arctg\frac{2x}{3}+C$
8. $\int \frac{d(\sqrt{5}x)}{5x^2-6}$	$\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left\lvert\frac{\sqrt{5}x-\sqrt{6}}{\sqrt{5}x+\sqrt{6}}\right\rvert+C$
9. $\int \frac{d(3x-1)}{\sqrt{6x-9x^2}}$	$I = arc\sin(3x-1)+C$
10. $\int \frac{d(e^x)}{\sin(e^x)}$	$\ln\left\lvert tg\frac{e^x}{2}\right\rvert+C$
11. $\int \frac{d(2x^2+1)}{\cos^2(2x^2+1)}$	$tg(2x^2+1)+C$
12. $\int e^{\cos x}\, d(\cos x)$	$e^{\cos x}+C$
13. $\int \frac{d(4^x)}{4^{2x}+9}$	$\frac{1}{3}arctg\frac{4^x}{3}+C$
14. $\int \sin^3 2x\, d(\sin 2x)$	$\frac{\sin^4 2x}{4}+C$
15. $\int \frac{d(\cos 2x)}{\sqrt{\cos 2x}}$	$2\sqrt{\cos 2x}+C$
16. $\int \frac{d(\ln x)}{\ln x}$	$\ln\lvert\ln x\rvert+C$
17. $\int tg^3 x\, d(tg\, x)$	$\frac{tg^4 x}{4}+C$
18. $\int \sqrt[3]{arc\cos x}\, d(arc\cos x)$	$\frac{3}{4}arc\cos x\sqrt[3]{arc\cos x}+C$

Завдання	Відповідь
19. $\int \frac{d\left(ctg\,x\right)}{ctg\,x}$	$\ln\left\|ctg\,x\right\| + C$
20. $\int \frac{d\left(\sin 2x\right)}{\sin^5 2x}$	$-\frac{1}{4\sin^4 2x} + C$

1.5 Метод внесення під знак диференціала

Якщо в підінтегральній функції можна виділити таку її частину, яка при внесенні її під знак диференціала дозволяє отримати табличний інтеграл, то такий прийом інтегрування називають методом ***внесення під знак диференціала*** деякої частини підінтегральної функції. У цьому випадку використовують формулу:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))\,d\varphi(x), \qquad (1.12)$$

де $d\varphi(x) = \varphi'(x)dx$.

Приклад 36. Знайти $\int \frac{x^2dx}{5x^6 - 4}$.

Розв'язання. $I = \int \frac{x^2dx}{5x^6 - 4} = \int \frac{x^2dx}{\left(\sqrt{5}x^3\right)^2 - 2^2} =$

$$= \left[\left(\sqrt{5}x^3\right)' = \sqrt{5}\cdot 3x^2\right] = \frac{1}{3\sqrt{5}}\int \frac{3\sqrt{5}x^2dx}{\left(\sqrt{5}x^3\right)^2 - 2^2} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\int \frac{d\left(\sqrt{5}x^3\right)}{\left(\sqrt{5}x^3\right)^2 - 2^2} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{5}x^3 - 2}{\sqrt{5}x^3 + 2}\right| + C = \frac{\sqrt{5}}{60}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{5}x^3 - 2}{\sqrt{5}x^3 + 2}\right| + C .$$

Відповідь: $I = \frac{\sqrt{5}}{60}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{5}x^3 - 2}{\sqrt{5}x^3 + 2}\right| + C$.

Приклад 37. Знайти $\int 2^{-\frac{x^2}{3}} x\,d\,x$.

Розв'язання. $I = \int 2^{-\frac{x^2}{3}} x\,d\,x = \left[\left(-\frac{x^2}{3} \right)' = -\frac{2x}{3} \right] =$

$$= -\frac{3}{2} \int 2^{-\frac{x^2}{3}} \left(-\frac{2x}{3} \right) d\,x = -\frac{3}{2} \int 2^{-\frac{x^2}{3}} \, d\left(-\frac{x^2}{3} \right) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2^{-\frac{x^2}{3}}}{\ln 2} + C .$$

Відповідь: $I = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2^{-\frac{x^2}{3}}}{\ln 2} + C$.

Приклад 38. Знайти $\int \frac{e^{2x} d\,x}{e^{4x} + 9}$.

Розв'язання. $I = \int \frac{e^{2x} d\,x}{e^{4x} + 9} = \int \frac{e^{2x} d\,x}{\left(e^{2x}\right)^2 + 3^2} = \left[\left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x} \right] =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2e^{2x} d\,x}{\left(e^{2x}\right)^2 + 3^2} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d\left(e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}\right)^2 + 3^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} arctg \frac{e^{2x}}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot arctg \frac{e^{2x}}{3} + C .$$

Відповідь: $I = \frac{1}{6} \cdot arctg \frac{e^{2x}}{3} + C$.

Приклад 39. Знайти $\int \frac{\cos 3x d\,x}{\sin 3x + 2}$.

Розв'язання.

$$I = \int \frac{\cos 3x d\,x}{\sin 3x + 2} = \left[(\sin 3x)' = 3\cos 3x \right] = \frac{1}{3} \int \frac{3\cos 3x d\,x}{\sin 3x + 2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(\sin 3x)}{\sin 3x + 2} =$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(\sin 3x+2\right)}{\sin 3x+2}=\frac{1}{3}\ln\left|\sin 3x+2\right|+C.$$

Відповідь: $I=\frac{1}{3}\ln\left|\sin 3x+2\right|+C$.

Приклад 40. Знайти $\int\frac{d\,x}{arc\cos^2 3x\cdot\sqrt{1-9x^2}}$.

Розв'язання.

$$I=\int\frac{d\,x}{arc\cos^2 3x\cdot\sqrt{1-9x^2}}=\int\left(arc\cos 3x\right)^{-2}\frac{d\,x}{\sqrt{1-9x^2}}=$$

$$=\left[\left(arc\cos 3x\right)'=-\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}\right]=-\frac{1}{3}\int\left(arc\cos 3x\right)^{-2}\frac{-3\,d\,x}{\sqrt{1-9x^2}}=$$

$$=-\frac{1}{3}\int\left(arc\cos 3x\right)^{-2}d\left(arc\cos 3x\right)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(arc\cos 3x\right)^{-1}}{-1}+C=$$

$$=\frac{1}{3\,arc\cos 3x}+C.$$

Відповідь: $I=\frac{1}{3\,arc\cos 3x}+C$.

Приклад 41. Знайти $\int\frac{d\,x}{\cos^2 3x\cdot\sqrt[3]{tg^5 3x}}$.

Розв'язання. $I=\int\frac{d\,x}{\cos^2 3x\cdot\sqrt[3]{tg^5 3x}}=\int\left(tg 3x\right)^{-\frac{5}{3}}\frac{d\,x}{\cos^2 3x}=$

$$=\left[\left(tg 3x\right)'=\frac{3}{\cos^2 3x}\right]=\frac{1}{3}\int\left(tg 3x\right)^{-\frac{5}{3}}\frac{3\,d\,x}{\cos^2 3x}=\frac{1}{3}\int\left(tg 3x\right)^{-\frac{5}{3}}d\left(tg 3x\right)=$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(tg3x)^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + C = -\frac{1}{2}(tg3x)^{-\frac{2}{3}} + C.$$

Відповідь: $I = -\frac{1}{2}(tg3x)^{-\frac{2}{3}} + C$.

1.5.1 Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли

Завдання	Відповідь
1. $\int e^{-x^3} x^2 dx$	$-\frac{1}{3}e^{-x^3} + C$
2. $\int \frac{x dx}{3x^4 + 4}$	$\frac{1}{4\sqrt{3}} arctg \frac{\sqrt{3}x^2}{2} + C$
3. $\int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[3]{\sin 3x - 4}}$	$\frac{1}{2}\sqrt[3]{(\sin 3x - 4)^2} + C$
4. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x \cdot \sqrt[5]{ctg^2 5x}}$	$-\frac{1}{3}\sqrt[5]{ctg^3 5x} + C$
5. $\int \frac{\sqrt[3]{arctg^2 3x} dx}{1 + 9x^2}$	$\frac{1}{5}\sqrt[3]{arctg^5 3x} + C$
6. $\int \frac{e^{3x} dx}{5 + e^{3x}}$	$\frac{1}{3}\ln\left(5 + e^{3x}\right) + C$
7. $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^2 x + 5}$	$-\ln\left(\cos^2 x + 5\right) + C$
8. $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$	$\frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2} + C$

Завдання	Відповідь
9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$	$arc\sin(\ln x)+C$
10. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2+5}}$	$-\ln\left|\cos x+\sqrt{\cos^2+5}\right|+C$
11. $\int \frac{ch\ xdx}{sh^7 x}$	$-\frac{1}{6\,sh^6 x}+C$
12. $\int \frac{sh\,2xdx}{5+ch^2 2x}$	$\frac{1}{2\sqrt{5}}arctg\frac{ch2x}{\sqrt{5}}+C$

1.6 Метод заміни змінної (метод підстановки)

Метод заміни змінної застосовують у тих випадках, коли безпосередньо (за допомогою таблиці) не вдається знайти інтеграл. Суть цього методу полягає у введенні нової змінної інтегрування, що дозволяє спростити підінтегральний вираз і звести інтеграл до лінійної комбінації табличних інтегралів. Цей метод складається з двох прийомів.

1.6.1 Метод заміни змінної (пряма підстановка)

Згідно з цим методом вводять нову змінну інтегрування. Незалежну змінну x замінюють функцією $x=\varphi(t)$, яка визначена та диференційована на проміжку $(\alpha;\beta)$ і $x\in(a;b)$. Тоді слушна формула:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (1.13)$$

Її називають ***формула заміни змінної*** у невизначеному інтегралі. Підстановки підбирають так, щоб одержані після перетворення нові інтеграли були табличними або зводились до них. Після знаходження невизначеного інтеграла у результаті інтегрування треба зробити зворотній перехід від змінної t до початкової змінної x. Для цього необхідно з рівності $x=\varphi(t)$ знайти змінну

t, тобто функція $x=\varphi(t)$ повинна мати обернену функцію $t=\psi(x)$).

Приклад 42. Знайти $\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Розв'язання. $I=\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\left[\begin{array}{c} x=t^3 \\ dx=3t^2dt \\ t=\sqrt[3]{x} \end{array}\right]=\int \frac{\sin t\cdot 3t^2dt}{t^2}=$

$=3\int \sin t\,dt=-3\cos t+C=-3\cos\sqrt[3]{x}+C$.

Відповідь: $I=-3\cos\sqrt[3]{x}+C$.

Приклад 43. Знайти $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$.

Розв'язання. $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}=\left[\begin{array}{c} x=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \\ t=\frac{1}{x} \end{array}\right]=\int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{4-\left(\frac{1}{t}\right)^2}}=$

$$=\int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\frac{\sqrt{4t^2-1}}{t}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}}=-\frac{1}{2}\int \frac{2dt}{\sqrt{(2t)^2-1}}=-\frac{1}{2}\int \frac{d(2t)}{\sqrt{(2t)^2-1}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|2t+\sqrt{(2t)^2-1}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|2\cdot\frac{1}{x}+\sqrt{\left(2\cdot\frac{1}{x}\right)^2-1}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+C.$$

Відповідь: $I=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+C$.

1.6.2 Метод підстановки (обернена підстановка)

Якщо заданий інтеграл має вигляд $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, то доцільно зробити підстановку $\varphi(x)=u$. Тоді матимемо

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\begin{bmatrix}\varphi(x)=u\\ \varphi'(x)dx=du\end{bmatrix}=\int f(u)du \tag{1.14}$$

Після знаходження останнього інтеграла треба повернутись до змінної x, використовуючи рівність $u=\varphi(x)$.

Приклад 44. Знайти $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-9}}$.

Розв'язання. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-9}}=\begin{bmatrix}\sqrt{e^x-9}=u,\ e^x-9=u^2\\ e^x=u^2+9, x=\ln\left(u^2+9\right)\\ dx=\dfrac{2u\,du}{u^2+9}\end{bmatrix}=$

$=\int\frac{1}{u}\cdot\frac{2u\,du}{u^2+9}=2\int\frac{du}{u^2+9}=2\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{u}{3}+C=\frac{2}{3}arctg\frac{\sqrt{e^x-9}}{3}+C$.

Відповідь: $I=\frac{2}{3}arctg\frac{\sqrt{e^x-9}}{3}+C$.

Приклад 45. Знайти $\int\frac{dx}{e^{2x}-1}$.

Розв'язання. $I = \int \frac{dx}{e^{2x}-1} = \left[\begin{array}{c} e^{2x}-1=u,\ e^{2x}=u+1 \\ 2x=\ln(u+1), x=\frac{1}{2}\ln(u+1) \\ dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{du}{u+1} \end{array} \right] =$

$$= \int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{du}{u+1} = \frac{1}{2}\int\frac{1}{u(u+1)}du = \frac{1}{2}\int\frac{1+u-u}{u(u+1)}du = \frac{1}{2}\left(\int\frac{du}{u} - \int\frac{du}{u+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|u| - \ln|u+1|\right) + C = \frac{1}{2}\left(\ln\left|e^{2x}-1\right| - \ln\left|e^{2x}-1+1\right|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}-1\right| -$$

$$- \frac{1}{2}\ln e^{2x} + C = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}-1\right| - \frac{1}{2}\cdot 2x + C = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}-1\right| - x + C.$$

Відповідь: $I = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}-1\right| - x + C$.

Приклад 46. Знайти $\int \frac{arc\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

Розв'язання.

$$I = \int \frac{arc\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \left[\begin{array}{c} arc\sin\sqrt{x} = t \\ dt = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}dx \end{array} \right] =$$

$$= 2\int t\,dt = 2\frac{t^2}{2} + C = arc\sin^2\sqrt{x} + C.$$

Відповідь: $I = arc\sin^2\sqrt{x} + C$.

Приклад 47. Знайти $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

Розв'язання.

$$I = \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^2-2}} = \left[\begin{array}{c} \sqrt{x^2-2} = t,\ x^2-2=t^2 \\ x^2 = t^2+2,\ x\,dx = t\,dt \end{array} \right] = \int \frac{\left(t^2+2\right)^2}{t} t\,dt =$$

$$=\int\left(t^4+4t^2+4\right)dt=\frac{t^5}{5}+4\frac{t^3}{3}+4t+C=\frac{\left(\sqrt{x^2-2}\right)^5}{5}+$$

$$+4\frac{\left(\sqrt{x^2-2}\right)^3}{3}+4\sqrt{x^2-2}+C=\sqrt{x^2-2}\left(\frac{\left(x^2-2\right)^2}{5}+\right.$$

$$\left.+4\frac{x^2-2}{3}+4\right)+C=\sqrt{x^2-2}\left(\frac{x^4}{5}+\frac{8}{15}x^2+\frac{32}{15}\right)+C\,.$$

Відповідь: $I=\sqrt{x^2-2}\left(\dfrac{x^4}{5}+\dfrac{8}{15}x^2+\dfrac{32}{15}\right)+C$.

1.6.3 Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли

Завдання	Заміна	Відповідь
1. $\int\frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$	$\sqrt[3]{x}=t$	$3e^{\sqrt[3]{x}}+C$
2. $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{x-1}$	$\sqrt{x}=t$	$2\sqrt{x}+\ln\left\|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right\|+C$
3. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-6x+1}}$	$x=\frac{1}{t}$	$\ln\left\|\frac{x}{1-3x+\sqrt{x^2-6x+1}}\right\|+C$
4. $\int\frac{e^{tg\,2x}}{\cos^2 2x}dx$	$tg\,2x=t$	$\frac{1}{2}e^{tg\,2x}+C$
5. $\int 3^{\sin x}\cos x\,dx$	$\sin x=t$	$\frac{3^{\sin x}}{\ln 3}+C$
6. $\int x^{-3}e^{\frac{1}{x^2}}dx$	$\frac{1}{x^2}=t$	$C-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x^2}}$

Завдання	Заміна	Відповідь
7. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4} dx$	$\sin x = t$	$\frac{1}{2} arctg \frac{\sin x}{2} + C$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$	$\sqrt{e^x + 1} = t$	$\ln \left\| \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} \right\| + C$
9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 1}}$	$\ln x = t$	$\ln \left\| \ln x + \sqrt{\ln^2 x + 1} \right\| + C$

1.7 Метод інтегрування частинами

Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають на деякому проміжку неперервні похідні. Диференціал добутку цих функцій визначається формулою: $d(uv) = v\,du + u\,dv$. Розв'яжемо рівняння відносно udv і інтегруючи отримане рівняння, матимемо формулу:

$$\int udv = uv - \int vdu \, . \qquad (1.15)$$

Її називають ***формула інтегрування частинами***.

При застосуванні цієї формули підінтегральний вираз $f(x)dx$ розглядають як два множники: u і dv. При цьому: а) dx треба віднести до dv; б) dv повинен бути таким, щоб інтегруванням легко знайти v (константу C не записують).

Зауваження 1.5 При застосуванні методу інтегрування частинами інколи доводиться формулу інтегрування частинами застосовувати декілька разів.

Розглянемо найпоширеніші випадки застосування формули (1.15). Умовно їх можна розділити на такі:

а) $\left[\begin{array}{l}\int P_n(x)\sin(\alpha x+b)\,dx,\ \int P_n(x)\cos(\alpha x+b)\,dx,\\ \int P_n(x)\,a^{cx+d}\,dx,\ \int P_n(x)e^{cx+d}\,dx,\\ \int \dfrac{ax+b}{\cos^2(cx+d)}\,dx,\ \int \dfrac{ax+b}{\sin^2(cx+d)}\,dx\end{array}\right.$, (1.16)

де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня, α, b, c, d – дійсні числа.

В цих інтегралах через u позначаємо $P_n(x)$ або $(ax+b)$, а через dv – один із виразів $\cos(\alpha x+b)dx$, $\sin(\alpha x+b)dx$, $a^{cx+d}dx$, $e^{cx+d}dx$, $\dfrac{dx}{\cos^2(cx+d)}$, $\dfrac{dx}{\sin^2(cx+d)}$.

<u>Зауваження 1.6</u> Якщо многочлен $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня, то формулу інтегрування частинами застосовують n разів.

Приклад 48. Знайти $\int \dfrac{3x-2}{\sin^2(2x+3)}dx$.

Розв'язання.

$$I=\int \frac{3x-2}{\sin^2(2x+3)}dx=\left[\begin{array}{c|c} u=3x-2 & du=3\,dx \\ dv=\dfrac{dx}{\sin^2(2x+3)} & v=-\dfrac{1}{2}ctg(2x+3)\end{array}\right]=$$

$$=(3x-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)ctg(2x+3)-\int\left(-\frac{1}{2}ctg(2x+3)\right)\cdot 3\,dx=$$

$$=-\frac{3x-2}{2}ctg(2x+3)+\frac{3}{2}\int ctg(2x+3)dx=-\frac{3x-2}{2}ctg(2x+3)+$$

$$+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\sin(2x+3)\right|+C=-\frac{3x-2}{2}ctg(2x+3)+\frac{3}{4}\ln\left|\sin(2x+3)\right|+C.$$

Відповідь: $I=-\dfrac{3x-2}{2}ctg(2x+3)+\dfrac{3}{4}\ln\left|\sin(2x+3)\right|+C$.

Приклад 49. Знайти $\int(3-2x)\cos(4x+5)dx$.

Розв'язання.

$$I=\int(3-2x)\cos(4x+5)dx=\left[\begin{array}{c|c} u=3-2x & du=-2dx \\ dv=\cos(4x+5)dx & v=\dfrac{1}{4}\sin(4x+5)\end{array}\right]=$$

$$=\frac{3-2x}{4}\sin(4x+5)+\frac{1}{2}\int\sin(4x+5)dx=\frac{3-2x}{4}\sin(4x+5)-$$

$$-\frac{1}{8}\cos(4x+5)+C.$$

Відповідь: $I=\dfrac{3-2x}{4}\sin(4x+5)-\dfrac{1}{8}\cos(4x+5)+C$.

Приклад 50. Знайти $\int(5+4x)e^{7-5x}dx$.

Розв'язання.

$$I=\int(5+4x)e^{7-5x}dx=\left[\begin{array}{c|c} u=5+4x & du=4dx \\ dv=e^{7-5x}dx & v=-\dfrac{1}{5}e^{7-5x}\end{array}\right]=$$

$$=(5+4x)\cdot\left(-\frac{1}{5}e^{7-5x}\right)-\int\left(-\frac{1}{5}e^{7-5x}\right)4dx=-\frac{5+4x}{5}e^{7-5x}+$$

$$+\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{5}e^{7-5x}\right)+C=-\frac{5+4x}{5}e^{7-5x}-\frac{4}{25}e^{7-5x}+C.$$

Відповідь: $I=-\dfrac{5+4x}{5}e^{7-5x}-\dfrac{4}{25}e^{7-5x}+C$.

$$\text{б)}\ \left[\begin{array}{l}\int P_n(x)arcsin(kx)dx,\ \int P_n(x)arccos(kx)dx,\\ \int P_n(x)\ln(x)dx,\ \int P_n(x)\,arctg(kx)dx,\\ \int P_n(x)arcctg(kx)dx,\ \int P_n(x)\log_a(x)dx\end{array}\right.,\qquad(1.17)$$

де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня (n може дорівнювати нулю), k – дійсне число.

В цих інтегралах через u позначаємо один із виразів $arc\sin(kx)$, $arc\cos(kx)$, $a\mathrm{rctg}(kx)$, $a\mathrm{rcctg}(kx)$, $\ln(x)$, $\log_a(x)$, а через dv – $P_n(x)dx$.

Приклад 51. Знайти $\int x\ln(x+3)dx$.

Розв'язання.

$$I=\int x\ln(x+3)dx=\left[\begin{array}{c|c} u=\ln(x+3) & du=\dfrac{1}{x+3}dx \\ dv=xdx & v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right]=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x+3)-$$

$$-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x+3}dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x+3)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+3}dx=\left[\begin{array}{l|l} -x^2 & x+3 \\ \underline{x^2+3x} & \overline{x-3} \\ -\ -3x & \\ \quad\underline{-3x-9} & \\ \qquad 9 & \end{array}\right]=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x+3)-\frac{1}{2}\int\left(x-3+\frac{9}{x+3}\right)dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x+3)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-3x+\right.$$

$$\left.+9\ln|x+3|\right)=\frac{1}{2}\left(\left(x^2-9\right)\ln|x+3|-\frac{x^2}{2}+3x\right)+C.$$

Відповідь: $I=\dfrac{1}{2}\left(\left(x^2-9\right)\ln|x+3|-\dfrac{x^2}{2}+3x\right)+C$.

Приклад 52. Знайти $\int\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання. $I=\int\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\left[\begin{array}{c|c} u=\ln x & du=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=\dfrac{dx}{\sqrt{x}} & v=2\sqrt{x} \end{array}\right]=$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - \int 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\left(\sqrt{x}\ln x - 2\sqrt{x}\right) + C =$$

$$= 2\sqrt{x}\left(\ln x - 2\right) + C .$$

Відповідь: $I = 2\sqrt{x}\left(\ln x - 2\right) + C$.

Приклад 53. Знайти $\int x arcctg(3x)dx$.

Розв'язання.

$$I = \int x arcctg(3x)dx = \left[\begin{array}{c|c} u = arcctg(3x) & du = -\dfrac{3}{1+(3x)^2}dx \\ dv = x\,dx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{x^2}{2}arcctg(3x) + \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{3}{1+9x^2}dx = \frac{x^2}{2}arcctg(3x) + \frac{1}{6}\int\frac{9x^2+1-1}{1+9x^2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}arcctg(3x) + \frac{1}{6}\int\left(1 - \frac{1}{1+9x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}arcctg(3x) + \frac{1}{6}\left(x - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}arcctg(3x)\right) + C = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{18}\right)arcctg(3x) + \frac{1}{6}x + C .$$

Відповідь: $I = \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{18}\right)arcctg(3x) + \dfrac{1}{6}x + C$.

в) циклічні інтеграли:

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx, \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx, \int\sin(\ln x)dx, \int\cos(\ln x)dx , \quad (1.18)$$

де $\alpha, \beta \in R$.

При обчисленні цих інтегралів байдуже, який саме співмножник приймати за u, а який за dv. Після двократного застосування формули інтегрування частинами утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла, який знаходять, розв'язуючи це рівняння.

Приклад 54. Знайти інтеграл $\int e^{\alpha x}\sin\ \beta x\, dx$.

Розв'язання.

$$I=\int e^{\alpha x}\sin\ \beta x\,dx=\left[\begin{array}{c|c} u=e^{\alpha x} & du=\alpha e^{\alpha x}dx \\ dv=\sin\beta x\,dx & v=-\dfrac{1}{\beta}\cos\beta x\end{array}\right]=-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+$$

$$+\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx=\left[\begin{array}{c|c} u=e^{\alpha x} & du=\alpha e^{\alpha x}dx \\ dv=\cos\beta x dx & v=\dfrac{1}{\beta}\sin\beta x\end{array}\right]=-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+$$

$$+\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx\right)=-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\sin\beta x-$$

$$-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx\,.$$

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx=\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x\,.$$

$$\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx=\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x\,.$$

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx=\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x\right)+C\,.$$

Відповідь: $\displaystyle\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x\right)+C$.

Аналогічно обчислюється $\int e^{\alpha x}\cos\ \beta x\ dx$:

Відповідь: $\displaystyle\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x\right)+C$

Приклад 55. Знайти інтеграл $\int\cos\left(\ln x\right)dx$.

Розв'язання.

$$I=\int\cos(\ln x)dx=\left[\begin{array}{c|c} u=\cos(\ln x) & du=-\dfrac{\sin(\ln x)}{x}dx \\ dv=dx & v=x \end{array}\right]=x\cdot\cos(\ln x)-$$

$$-\int x\cdot\left(-\frac{\sin(\ln x)}{x}\right)dx=x\cdot\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)dx=\left[\begin{array}{c|c} u=\sin(\ln x) & du=\dfrac{\cos(\ln x)}{x}dx \\ dv=dx & v=x \end{array}\right]=x\cdot\cos(\ln x)+x\cdot\sin(\ln x)-\int x\cdot\frac{\cos(\ln x)}{x}dx=$$

$$=x\cdot\cos(\ln x)+x\cdot\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx.$$

$$2\int\cos(\ln x)dx=x\cdot\cos(\ln x)+x\cdot\sin(\ln x).$$

Відповідь: $\int\cos(\ln x)dx=\dfrac{x}{2}(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+C$.

Аналогічно обчислюється $\int\sin(\ln x)dx$:

Відповідь: $\int\sin(\ln x)dx=\dfrac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C$.

в) існують інші типи інтегралів, для знаходження яких застосовують метод інтегрування частинами.

Приклад 56. Знайти інтеграл $\int\dfrac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx$.

Розв'язання.

$$I=\int\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx=\left[\begin{array}{l} u=\ln(\cos x),\ du=\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)dx=-tgxdx \\ dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x},\ v=tgx \end{array}\right]=$$

$$=tgx\cdot\ln(\cos x)-\int tgx\cdot(-tgx)dx=tgx\cdot\ln(\cos x)+\int tg^2xdx=$$

$$=\left[1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}-1\right]=tgx\cdot\ln(\cos x)+$$

$$+\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=tg\,x\cdot\ln(\cos x)+\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=tg\,x\cdot\ln(\cos x)+$$
$$+tg\,x-x+C\,.$$

Відповідь: $I=tg\,x\cdot\ln(\cos x)+tg\,x-x+C$.

Приклад 57. Знайти інтеграл $\int \ln^2 x\,dx$.

Розв'язання.

$$I=\int \ln^2 x\,dx=\left[\begin{array}{l} u=\ln^2 x,\ du=2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx \\ dv=dx,\ v=x\end{array}\right]=x\cdot\ln^2 x-\int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=x\cdot\ln^2 x-2\int \ln x\,dx=\left[\begin{array}{l} u=\ln x,\ du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx,\ v=x\end{array}\right]=x\cdot\ln^2 x-2\Big(x\cdot\ln x-$$

$$-\int x\cdot\frac{1}{x}dx\Big)=x\cdot\ln^2 x-2x\cdot\ln x+2\int dx=x\cdot\ln^2 x-2x\cdot\ln x+2x+C=$$

$$=x\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)+C\,.$$

Відповідь: $I=x\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)+C$.

Приклад 58. Знайти інтеграл $\int\sqrt{1-x}\;arc\cos\sqrt{x}\,dx$.

Розв'язання. $I=\int\sqrt{1-x}\;arc\cos\sqrt{x}\,dx=\left[\begin{array}{l} u=arc\cos\sqrt{x}\ , \\ dv=\sqrt{1-x}\ dx,\end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{l} du=-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ v=-\frac{2\sqrt{(1-x)^3}}{3}=-\frac{2(1-x)\sqrt{1-x}}{3}\end{array}\right]=-\frac{2\sqrt{(1-x)^3}}{3}\cdot arc\cos\sqrt{x}-$$

$$-\int\left(-\frac{2(1-x)\sqrt{1-x}}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=-\frac{2\sqrt{(1-x)^3}}{3}\cdot arc\cos\sqrt{x}-$$

$$-\frac{1}{3}\int\cdot\frac{(1-x)}{\sqrt{x}}dx=\frac{2(x-1)\sqrt{1-x}}{3}\cdot arc\cos\sqrt{x}+\frac{1}{3}\int\sqrt{x}dx-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{2(x-1)\sqrt{1-x}}{3}\cdot arc\cos\sqrt{x}+\frac{1}{3}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{x}=\frac{2(x-1)\sqrt{1-x}}{3}\cdot$$

$$\cdot arc\cos\sqrt{x}+\frac{1}{3}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{x}=\frac{2(x-1)\sqrt{1-x}}{3}\cdot arc\cos\sqrt{x}+\frac{2}{9}\sqrt{x^3}-$$

$$-\frac{2}{3}\sqrt{x}+C\,.$$

Відповідь: $I=\frac{2(x-1)\sqrt{1-x}}{3}\cdot arc\cos\sqrt{x}+\frac{2}{9}\sqrt{x^3}-\frac{2}{3}\sqrt{x}+C$

Приклад 59. Знайти інтеграл $\int\frac{arc\sin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$.

Розв'язання.

$$I=\int\frac{arc\sin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx=\begin{bmatrix} u=arc\sin\sqrt{x},\ du=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ dv=\frac{dx}{\sqrt{1-x}},\ v=-2\sqrt{1-x} \end{bmatrix}=$$

$$=-2\sqrt{1-x}\,arc\sin\sqrt{x}-\int\left(-2\sqrt{1-x}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=-2\sqrt{1-x}\,\cdot$$

$$\cdot arc\sin\sqrt{x}+\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=-2\sqrt{1-x}\,arc\sin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C\,.$$

Відповідь: $I=-2\sqrt{1-x}\,arc\sin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$.

Приклад 60. Знайти інтеграл $\int x\,arctg^2x\,dx$.

Розв'язання.

$$I=\int x\,arctg^2x\,dx=\left[\begin{array}{l} u=arctg^2x,\ du=2\,arctgx\cdot\dfrac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv=x\,dx,\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right]=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctg^2x-\int\frac{x^2}{2}\cdot 2\,arctgx\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{x^2}{2}arctg^2x-$$

$$-\int arctgx\cdot\frac{x^2}{1+x^2}\,dx=\left[\begin{array}{l} u=arctgx,\ du=\dfrac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv=\dfrac{x^2}{1+x^2}dx=\dfrac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx,\ v=x-arctgx \end{array}\right]=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctg^2x-arctg\,x\left(x-arctgx\right)+\int\left(x-arctgx\right)\frac{1}{1+x^2}\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctg^2x-x\,arctgx+arctg^2x+\int\frac{x}{1+x^2}\,dx-\int\frac{arctgx}{1+x^2}\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctg^2x-x\,arctgx+arctg^2x+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}-$$

$$-\int arctgx\,d\left(arctgx\right)=\frac{x^2}{2}arctg^2x-x\,arctgx+arctg^2x+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|-$$

$$-\frac{arctg^2x}{2}=\frac{x^2}{2}arctg^2x-x\,arctgx+arctg^2x+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|-\frac{arctg^2x}{2}+$$

$$+C=\frac{x^2}{2}arctg^2x-x\,arctgx+\frac{arctg^2x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C=$$

$$=\frac{x^2+1}{2}arctg^2x-x\,arctgx+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C\,.$$

Відповідь: $I=\dfrac{x^2+1}{2}arctg^2x-x\,arctgx+\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C\,.$

Приклад 61. Знайти інтеграл $\int e^{arc\sin x}\,dx$.

Розв'язання.

$$I=\int e^{\arcsin x}\,dx=\begin{bmatrix}\arcsin x=t,\ x=\sin t\\ dx=\cos t\,dt\end{bmatrix}=\int e^{t}\cos t\,dt=$$

$$=\left[\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)+C,\left\{\begin{matrix}x=t\\ \alpha=1,\beta=1\end{matrix}\right\}\right]=$$

$$=\frac{e^{t}}{2}(\cos t+\sin t)+C=\frac{e^{\arcsin x}}{2}\left(\cos(\arcsin x)+\sin(\arcsin x)\right)+C=$$

$$=\begin{bmatrix}\sin(\arcsin x)=x\\ \cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}\end{bmatrix}=\frac{e^{\arcsin x}}{2}\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)+C.$$

Відповідь: $I=\dfrac{e^{\arcsin x}}{2}\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)+C$.

Приклад 62. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$.

Розв'язання.

$$I=\int\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx=\begin{bmatrix}\operatorname{arctg} x=t\\ x=\operatorname{tg}t\end{bmatrix},\ dx=\frac{dt}{\cos^2 t}\Bigg]=\int\frac{e^{t}}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^{\frac{3}{2}}}\frac{dt}{\cos^2 t}=$$

$$=\int\frac{e^{t}}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{dt}{\cos^2 t}=\int\frac{e^{t}\cos^3 t}{\cos^2 t}dt=\int e^{t}\cos t\,dt=$$

$$=\left[\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)+C,\left\{\begin{matrix}x=t\\ \alpha=1,\beta=1\end{matrix}\right\}\right]=$$

$$=\frac{e^{t}}{2}(\cos t+\sin t)+C=\left[\operatorname{tg}t=x,\ \cos t=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ \sin t=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]=$$

$$=\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C=\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{2}\cdot\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

Відповідь: $I = \dfrac{e^{arctg\,x}}{2} \cdot \dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

<u>Зауваження 1.7</u> Метод інтегрування частинами має, можливо, вужчу область застосування, ніж метод інтегрування заміною змінної. Однак слід мати на увазі, що деякі типи інтегралів не можуть бути обчислені жодним іншим способом, крім як методом інтегрування частинами.

1.7.1 Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли.

Завдання	Відповідь
1. $\int (x-2)e^{2x}\,dx$	$\dfrac{2x-5}{4}e^{2x} + C$
2. $\int (2x-3)\sin\dfrac{x}{4}\,dx$	$4(3-2x)\cos\dfrac{x}{4} + 32\sin\dfrac{x}{4} + C$
3. $\int (x^2+3)e^{-x}\,dx$	$C - e^{-x}(x^2+2x+5)$
4. $\int \dfrac{x+3}{\cos^2 2x}\,dx$	$\dfrac{x+3}{2}tg\,2x + \dfrac{1}{4}\ln\lvert\cos 2x\rvert + C$
5. $\int (x^2+x)\sin x\,dx$	$C - (x^2+x-2)\cos x + (2x+1)\sin x$
6. $\int x\ln(2x+1)\,dx$	$C - \dfrac{x^2-x}{4} + \dfrac{4x^2-1}{8}\ln(2x+1)$
7. $\int x\,arcctg\,x\,dx$	$\dfrac{x^2}{2}arcctg\,x + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}arcctg\,x + C$
8. $\int arc\cos 2x\,dx$	$x\,arc\cos 2x - \dfrac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$
9. $\int x^2\,arctg\,x\,dx$	$\dfrac{x^3}{3}arctg\,x - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{1}{6}\ln(x^2+1) + C$
10. $\int \ln(3x+5)\,dx$	$x\ln(3x+5) - x + \dfrac{5}{3}\ln(3x+5) + C$

Завдання	Відповідь
11. $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$	$\frac{e^{2x}}{13}\left(2\sin 3x-3\cos 3x\right)+C$
12. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$	$C-\frac{\ln x+1}{x}$
13. $\int \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}dx$	$C-ctg\,x\ln(\cos x)-x$
14. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$	$x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C$
15. $\int x\ln\frac{1-x}{1+x}dx$	$\frac{x^2}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}-x-\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}+C$
16. $\int\sqrt{1-x}\,arc\sin\sqrt{x}\,dx$	$\frac{2}{3}\sqrt{x}-\frac{2}{9}\sqrt{x^3}-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}\,arc\sin\sqrt{x}+C$

1.8 Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен у знаменнику

До цих інтегралів належать:

$$\text{а) }\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},\ \text{б) }\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\ \text{в) }\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx,\ \text{г) }\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx. \quad (1.19)$$

Для інтегралів $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ або $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ необхідно виділити повний квадрат у квадратному тричлені:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$. Заміна $x + \frac{b}{2a} = u$ приводить інтеграл до табличного інтеграла.

Для інтеграла $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ маємо табличний інтеграл:

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C \text{ або } \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C .$$

Для інтеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ маємо табличний інтеграл:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arc\sin \frac{u}{a} + C \text{ або } \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C .$$

Для інтегралів $\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$ або $\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ необхідно у чисельнику виділити похідну квадратного тричлена, який знаходиться у знаменнику, і чисельник почленно поділити на знаменник. Отримаємо два інтеграли, перший з яких знаходимо за таблицею інтегралів: для інтеграла типу в) за формулою $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$, а для інтеграла типу г) за формулою $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$. Другий інтеграл є інтегралом типу а) або б) відповідно.

Наприклад,

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \left[\begin{array}{l} 1)\left(ax^2+bx+c\right)' = 2ax+b \\ 2)\, Ax+B = A\left(x+\frac{B}{A}\right) = \frac{A}{2a}\left(2ax+2a\frac{B}{A}\right) = \\ = \frac{A}{2a}\left(2ax+2a\frac{B}{A}+b-b\right) = \frac{A}{2a}\left(2ax+b\right) + \\ + \frac{2aB-Ab}{2a} \\ 3)\, ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{\frac{A}{2a}\left(2ax+b\right)+\frac{2aB-Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}\left(2ax+b\right)}{ax^2+bx+c}dx + \int \frac{\frac{2aB-Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{\left(2ax+b\right)}{ax^2+bx+c}dx + \frac{2aB-Ab}{2a^2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}} =$$

$$= \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \frac{2aB-Ab}{2a^2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

Аналогічні дії робимо для знаходження інтеграла г):

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} +$$

$$+ \frac{2aB-Ab}{2a^2}\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}}}.$$

Приклад 63. Знайти інтеграл $\int \frac{4}{x^2+3x+4}dx$.

Розв’язання. $I=\int\frac{4}{x^2+3x+4}dx=\Bigg[x^2+3x+4=x^2+$

$$+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+4=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\Bigg]=$$

$$=4\int\frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\left[d\left(x+\frac{3}{2}\right)=dx\right]=4\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}arctg\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+$$

$$+C=\frac{8}{\sqrt{7}}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+C\,.$$

Відповідь: $I=\frac{8}{\sqrt{7}}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+C$.

Приклад 64. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{5-4x-x^2}$.

Розв’язання. $I=\int\frac{dx}{5-4x-x^2}=-\int\frac{dx}{x^2+4x-5}=$

$$=\left[x^2+4x-5=x^2+2\cdot 2x+4-4-5=(x+2)^2-9\right]=$$

$$=-\int\frac{dx}{(x+2)^2-9}=\left[d\left(x+2\right)=dx\right]=-\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x+2-3}{x+2+3}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+C\,.$$

Відповідь: $I=-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+C$.

Приклад 65. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

Розв’язання. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}=\Big[x^2+2x+3=x^2+2x+1-$

$-1+3=(x+1)^2+2\Big]=\int\frac{d\,x}{\sqrt{(x+1)^2+2}}=\left[d(x+1)=d\,x\right]=$

$=\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+2}\right|+C=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$.

Відповідь: $I=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$.

Приклад 66. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$.

Розв’язання. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}=\Big[4x-x^2=-\left(x^2-4x+4-4\right)=$

$=-\left(x^2-4x+4-4\right)=-\left((x-2)^2-4\right)=4-(x-2)^2\Big]=\int\frac{d\,x}{\sqrt{4-(x-2)^2}}=$

$=\int\frac{d\,x}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}}=arc\sin\frac{x-2}{2}+C$.

Відповідь: $I=arc\sin\frac{x-2}{2}+C$.

Приклад 67. Знайти інтеграл $\int\frac{5x+1}{x^2+6x+13}dx$.

Розв’язання. $I=\int\frac{5x+1}{x^2+6x+13}dx=$

$$=\left[\begin{array}{l}1)(x^2+6x+13)'=2x+6\\ 2)\ 5x+1=5\left(x+\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{2}\left(2x+\frac{2}{5}\right)=2{,}5\left(2x+6-6+\frac{2}{5}\right)=\\ =2{,}5(2x+6)-14\\ 3)\ x^2+6x+13=x^2+2\cdot 3x+9-9+13=(x+3)^2+4\end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{2{,}5(2x+6)-14}{x^2+6x+13}dx=2{,}5\int\frac{2x+6}{x^2+6x+13}dx-14\int\frac{dx}{(x+3)^2+4}=$$

$$=2{,}5\ln\left(x^2+6x+13\right)-14\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{x+3}{2}+C=2{,}5\ln\left(x^2+6x+13\right)-$$

$$-7arctg\frac{x+3}{2}+C\,.$$

Відповідь: $I==2{,}5\ln\left(x^2+6x+13\right)-7arctg\dfrac{x+3}{2}+C$.

Приклад 68. Знайти інтеграл $\int\dfrac{3x-4}{\sqrt{4-2x-x^2}}dx$.

Розв'язання. $I=\int\dfrac{3x-4}{\sqrt{4-2x-x^2}}dx=$

$$=\left[\begin{array}{l}1)(4-2x-x^2)'=-2-2x\\ 2)\ 3x-4=3\left(x-\frac{4}{3}\right)=-1{,}5\left(-2x+\frac{8}{3}\right)=-1{,}5\left(-2x-2+2+\frac{8}{3}\right)=\\ =-1{,}5(-2x-2)-7\\ 3)\ 4-2x-x^2=-\left(x^2+2x-4\right)=-\left(x^2+2x+1-1-4\right)=-(x+1)^2+5\end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{-1{,}5(-2x-2)-7}{\sqrt{4-2x-x^2}}dx=-1{,}5\int\frac{-2x-2}{\sqrt{4-2x-x^2}}dx-7\int\frac{dx}{\sqrt{5-(x+1)}^2}=$$

$$=-1{,}5\cdot 2\sqrt{4-2x-x^2}-7\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{5}}+C=-3\sqrt{4-2x-x^2}-$$

$$-7 arc\sin\frac{x+1}{\sqrt{5}}+C.$$

Відповідь: $I=-3\sqrt{4-2x-x^2}-7 arc\sin\frac{x+1}{\sqrt{5}}+C$.

<u>Зауваження 1.8</u> Оскільки квадратний тричлен $x^2+px+q>0$ при $D<0$, його можна логарифмувати й опускати знак модуля в записі $\ln\left(x^2+px+q\right)$.

1.8.1 Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли

Завдання	Відповідь
1. $\int\frac{dx}{2x^2+2x+5}$	$\frac{1}{3} arctg\,\frac{2x+1}{3}+C$
2. $\int\frac{dx}{2x^2+4x-5}$	$\frac{1}{2\sqrt{14}}\ln\left\lvert\frac{2x+2-\sqrt{14}}{2x+2+\sqrt{14}}\right\rvert+C$
3. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left\lvert x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right\rvert+C$
4. $\int\frac{dx}{\sqrt{18x-3x^2-15}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} arc\sin\frac{x-3}{2}+C$
5. $\int\frac{x+4}{2x^2+6x-8}dx$	$\frac{1}{4}\ln\left\lvert 2x^2+6x-8\right\rvert+\frac{1}{4}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+4}\right\rvert+C$
6. $\int\frac{2x+1}{5x^2+2x+10}dx$	$\frac{1}{5}\ln\left\lvert 5x^2+6x+10\right\rvert+\frac{3}{35} arctg\,\frac{5x+1}{7}+C$
7. $\int\frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+15}}dx$	$3\sqrt{x^2+6x+15}-5\ln\left\lvert x+3+\sqrt{x^2+6x+15}\right\rvert+C$
8. $\int\frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx$	$3 arc\sin\frac{2x-1}{3}-4\sqrt{2+x-x^2}+C$

Завдання	Відповідь
9. $\int \frac{2x+3}{9x^2+12x+20}dx$	$\frac{1}{9}\ln\left(9x^2+12x+20\right)+\frac{5}{36}arctg\,\frac{3x+2}{4}+C$
10. $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{7-4x^2+12x}}$	$-\frac{3}{4}\sqrt{7-4x^2+12x}+\frac{13}{4}arc\sin\frac{2x-3}{4}+C$

1.9 Інтегрування дробово-раціональних функцій

Дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називають раціональним, якщо чисельник $P_n(x)$– многочлен n-го степеня і знаменник $Q_m(x)$– многочлен m-го степеня. Якщо $n<m$, то раціональний дріб називають правильним, а якщо $n \geq m$, то раціональний дріб є неправильним.

Якщо раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ неправильний, то треба поділити чисельник на знаменник (за правилом ділення многочленів «кутом») і одержати заданий дріб у вигляді суми многочлена $S(x)$ – частка цього ділення (ціла частина) та правильного дробу $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ (степінь многочлена $R(x)$ менший за m), тобто

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q_m(x)}, \tag{1.20}$$

де $R(x)$– остача від ділення.

Теорема 1.2 Будь-який правильний раціональний дріб розкладається на суму найпростіших раціональних дробів вигляду:

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{B}{(x-a)^k},\ \frac{Cx+D}{x^2+px+q},\ \frac{Ex+F}{\left(x^2+px+q\right)^r}, \tag{1.21}$$

де $k, r \in N$, $A, B, a, p, q \in R$, а квадратний тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів ($p^2 - 4q < 0$).

При інтегруванні найпростіших раціональних дробів можемо мати такі інтеграли:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + C, \tag{1.22}$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \cdot \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C, \tag{1.23}$$

$\int \frac{A}{x^2 + px + q} d\,x$, $\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} d\,x$ – розглянуті в **1.8**,

$$\int \frac{A}{x^2 + a^2} dx = \frac{A}{a} arctg \frac{x}{a} + C. \tag{1.24}$$

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + a^2} d\,x = \frac{A}{2} \ln\left|x^2 + a^2\right| + \frac{B}{a} arctg \frac{x}{a} + C \tag{1.25}$$

$$\int \frac{Ax + B}{\left(x^2 + px + q\right)^r} d\,x = \frac{A}{2(1-r)(x^2 + px + q)^{r-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^r}, \tag{1.26}$$

де $t = x + \frac{p}{2}$, $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$.

$$\int \frac{d\,x}{(x^2 + a^2)^{r+1}} = \frac{1}{2ra^2} \left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^r} + (2r-1) \int \frac{d\,x}{(x^2 + a^2)^r} \right) \tag{1.27}$$

Інтегрування неправильного раціонального дробу зводиться до інтегрування многочлена $S(x)$ та правильного раціонального дробу $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$.

Розглянемо інтегрування правильного раціонального дробу $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$, якщо він не є найпростішим дробом, тобто знаменник $Q_m(x)$ можна розкласти на множники.

Будь-який правильний раціональний дріб можна представити у вигляді суми скінченного числа найпростіших раціональних дробів (1.21). Будемо вважати, що коефіцієнт у старшому члені многочлена $Q_m(x)$ дорівнює одиниці.

<u>Теорема 1.3</u> Многочлен $Q_m(x)$ з дійсними коефіцієнтами розкладається (і притому єдиним способом) на добуток лінійних і квадратичних множників, коефіцієнти яких також дійсні.

$$Q_m(x)=(x-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_s)^{k_s}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{r_1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_lx+q_l\right)^{r_l}$$

де $a_1,\ldots,a_s,p_1,\ldots,p_l,q_1,\ldots,q_l$ – дійсні числа $\left(p_i^{\,2}-4q_i<0,\ 1\le i\le l\right)$, $k_1,\ldots,k_s,r_1,\ldots,r_l$ – натуральні числа.

<u>Зауваження 1.9</u> Вигляд найпростіших дробів визначається коренями знаменника $Q_m(x)$.

Можливі такі випадки.

1. Корені знаменника дійсні та різні, тобто

$$Q_m(x)=(x-a_1)\cdot(x-a_2)\ldots\cdot(x-a_{\mathrm{m}}).$$

У цьому випадку дріб $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів типу $\dfrac{A}{x-a}$:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_m}{x - a_m}. \qquad (1.28)$$

2. Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні, наприклад,

$$Q_m(x) = (x - a) \cdot (x - b)^k, \; m = k + 1.$$

Тоді дріб $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів типів $\frac{A}{x - a}$ та $\frac{B}{(x - a)^k}$:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B_1}{x - b} + \frac{B_2}{(x - b)^2} + \cdots + \frac{B_k}{(x - b)^k}. \qquad (1.29)$$

3. Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні, крім того знаменник містить квадратний тричлен $x^2 + px + q$, який не розкладається на множники ($p^2 - 4q < 0$), або корені якого $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ містять ірраціональність:

$$Q_m(x) = (x - a) \cdot (x - b)^k \cdot \left(x^2 + px + q\right), \; m = k + 3.$$

В цьому випадку дріб $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів типів $\frac{A}{x - a}$, $\frac{B}{(x - a)^k}$ та $\frac{Cx + D}{x^2 + px + q}$:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B_1}{x - b} + \frac{B_2}{(x - b)^2} + \cdots + \frac{B_k}{(x - b)^k} + \frac{Cx + D}{x^2 + px + q} \qquad (1.30)$$

4. Знаменник дробу розкладається на множники:

$$Q_m(x) = (x-a)\cdot(x-b)^k \cdot \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)\cdot\left(x^2 + p_2 x + q_2\right)^r,$$
$$m = k + 3 + 2r$$

Тоді дріб $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів типів $\dfrac{A}{x-a}$, $\dfrac{B}{(x-a)^k}$, $\dfrac{Cx+D}{x^2+px+q}$ та $\dfrac{Ex+F}{\left(x^2+px+q\right)^r}$:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_k}{(x-b)^k} +$$
$$+ \frac{Cx+D}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{E_1x+F_1}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{E_2x+F_2}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^2} + \cdots + \qquad (1.31)$$
$$+ \frac{E_r x+F_r}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^r}$$

Після розкладання правильного раціонального дробу $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ на суму найпростіших раціональних дробів з невідомими буквеними коефіцієнтами, застосовують *метод невизначених коефіцієнтів* або *метод окремих значень аргументу* для знаходження невідомих коефіцієнтів розкладання.

<u>Зауваження 1.10</u> Суть *методу невизначених коефіцієнтів* така. Зводимо праву частину рівності розкладання правильного раціонального дробу на суму найпростіших раціональних дробів до спільного знаменника. Прирівнюємо многочлени чисельників правої і лівої частини, а потім прирівнюємо відповідні коефіцієнти при однакових степенях x обох чисельників, оскільки якщо два многочлени рівні між собою, то вони мають рівні коефіцієнти при x в однакових степенях. Отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язки її є коефіцієнтами розкладу.

<u>Зауваження 1.11</u> За *методом окремих значень аргументу* можна знайти невідомі коефіцієнти після того як у рівняння рівності многочленів чисельників правої і лівої частини підставити числові значення змінної x. Система рівнянь значно спрощується, коли змінній x надавати значення дійсних коренів знаменника $Q_m(x)$. Цей метод ефективний, якщо знаменник правильного раціонального дробу має лінійні множники.

Для знаходження невідомих коефіцієнтів можна одночасно застосовувати обидва методи – *комбінований метод*.

Приклад 69. Знайти інтеграл $\int \frac{x^3+x^2-3x+7}{x^2+x-2}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб. Виділимо цілу частину, поділивши многочлен чисельника на многочлен знаменника за правилом «кута»:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} x^3+x^2-3x+7 \\ x^3+x^2-2x \\ \hline -x+7 \end{array} & \begin{array}{l} x^2+x-2 \\ \hline x \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Матимемо

$$I=\int \frac{x^3+x^2-3x+7}{x^2+x-2}dx=\int\left(x+\frac{-x+7}{x^2+x-2}\right)dx=\int x\,dx+\int\frac{-x+7}{x^2+x-2}dx$$

Перший інтеграл є табличним: $\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C_1$, а другий знайдемо, розклавши підінтегральну функцію на суму найпростіших раціональних дробів. Корені знаменника $x_1=-2$ і $x_2=1$. Тоді $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$. Отримаємо інтеграл

$$\int\frac{-x+7}{(x+2)(x-1)}dx=\left[\frac{-x+7}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}=\right.$$

$$=\frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}\Rightarrow -x+7=A(x-1)+B(x+2)$$

$$\begin{array}{r|l} x=-2 & -(-2)+7=A(-2-1)+B(-2+2)\Rightarrow 9=-3A;\, A=-3 \\ x=1 & -1+7=A(1-1)+B(1+2)\Rightarrow 6=3B;\, B=2 \end{array}.$$

Коефіцієнти розкладання знайдені. Заданий інтеграл від правильного раціонального дробу перетворюється до суми двох інтегралів від найпростіших дробів і дорівнює:

$$\int\frac{-x+7}{(x+2)(x-1)}dx=\int\frac{-3}{x+2}dx+\int\frac{2}{x-1}dx=-3\ln|x+2|+2\ln|x-1|+C_2$$

Цей інтеграл можна було знайти за **1.8**. Але при виділенні повного квадрата у квадратному тричлені маємо дробові коефіцієнти.

Оскільки $C_1+C_2=C$, то $I=\dfrac{x^2}{2}-3\ln|x+2|+2\ln|x-1|+C$.

Відповідь: $I=\dfrac{x^2}{2}-3\ln|x+2|+2\ln|x-1|+C$.

Приклад 70. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{x+2}{x^3-x^2-2x}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція – правильний раціональний дріб. Розкладемо знаменник дробу на лінійні множники. Виносячи за дужку загальний множник x, матимемо

$$x^3-x^2-2x=x\left(x^2-x-2\right).$$

Звідси випливає, що один із коренів знаменника $x_1=0$. Корені квадратного тричлена x^2+px+q знайдемо за теоремою Вієта: $\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=q \end{cases}$ або за формулою: $x_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

У нашому випадку $x_2=-1$ і $x_3=2$. Тоді

$$x^3-x^2-2x=x(x+1)(x-2).$$

Представимо правильний раціональний дріб у вигляді суми найпростіших дробів із невизначеними коефіцієнтами:

$$\frac{x+2}{x(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}.$$

Зводимо праву частину рівності до спільного знаменника (спільний знаменник – це знаменник заданого правильного раціонального дробу: $x(x+1)(x-2)$). Отримаємо

$$\frac{x+2}{x(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}=\frac{A(x+1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)}$$

Прирівнюємо многочлени чисельників правої і лівої частини:

$$x+2=A(x+1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+1).$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів застосуємо метод *окремих значень аргументу*, підставляючи в праву і ліву частини рівності по черзі значення $x_1=0$, $x_2=-1$ і $x_3=2$.

$$\begin{array}{l|l} x=0 & 0+2=A(0+1)(0-2)+B\cdot 0\cdot(0-2)+C\cdot 0\cdot(0+1)\Rightarrow 2=-2A;\ A=-1 \\ x=-1 & -1+2=A(-1+1)(-1-2)+B(-1)(-1-2)+C(-1)(-1+1)\Rightarrow 1=3B;\ B=\frac{1}{3} \\ x=2 & 2+2=A(2+1)(2-2)+B\cdot 2\cdot(2-2)+C\cdot 2\cdot(2+1)\Rightarrow 4=6C;\ C=\frac{2}{3} \end{array}$$

Коефіцієнти розкладання знайдені. Заданий інтеграл від правильного раціонального дробу перетвориться до суми трьох інтегралів від найпростіших дробів і дорівнює:

$$I=\int\frac{x+2}{x(x+1)(x-2)}dx=\int\frac{-1}{x}dx+\int\frac{\frac{1}{3}}{x+1}dx+\int\frac{\frac{2}{3}}{x-2}dx=-\ln|\mathrm{x}|+$$

$$+\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{2}{3}\ln|x-2|+C.$$

Відповідь: $I==-\ln|\mathrm{x}|+\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{2}{3}\ln|x-2|+C$.

Приклад 71. Знайти інтеграл $\int\frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція – правильний раціональний дріб. Знаменник дробу розкладений на лінійний і квадратний множники. Представимо правильний раціональний дріб у вигляді суми двох найпростіших дробів із невизначеними коефіцієнтами. Виконаємо дії як у попередньому прикладі. Невизначені коефіцієнти знайдемо *комбінованим методом*.

$$I=\int\frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)}dx=\left[\frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\right.$$

$$=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{x^2(A+B)+x(2B+C)+A+2C}{(x+2)(x^2+1)}.$$

$$x+1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x+2)=x^2(A+B)+x(2B+C)+A+2C.$$

$$\begin{array}{l|l} x=-2 & -2+1=A((-2)^2+1)+(B(-2)+C)(-2+2)\Rightarrow -1=5A;\ A=-0{,}2 \\ x^2 & 0=A+B;\ B=0{,}2 \\ x & 1=2B+C;\ C=1-0{,}4=0{,}6 \end{array}$$

$$\left.\frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{-0{,}2}{x+2}+\frac{0{,}2x+0{,}6}{x^2+1}\right]=\int\frac{-0{,}2}{x+2}dx+\int\frac{0{,}2x+0{,}6}{x^2+1}dx=$$

$$=-0{,}2\int\frac{dx}{x+2}+0{,}2\int\frac{xdx}{x^2+1}+0{,}6\int\frac{dx}{x^2+1}=-0{,}2\ln|x+2|+0{,}1\int\frac{2xdx}{x^2+1}+$$

$$+0{,}6arctg\,x+C=-0{,}2\ln|x+2|+0{,}1\ln|x^2+1|+0{,}6\,arctg\,x+C.$$

Відповідь: $I=-0{,}2\ln|x+2|+0{,}1\ln|x^2+1|+0{,}6\,arctg\,x+C$.

Приклад 72. Знайти інтеграл $\int\frac{3dx}{(x-1)^2(x+1)}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція – правильний раціональний дріб. Знаменник дробу розкладений на лінійні множники, причому один з них має кратність два. Представимо правильний раціональний дріб у вигляді суми найпростіших дробів із невизначеними коефіцієнтами. Виконаємо дії як у попередньому прикладі. Невизначені коефіцієнти знайдемо *комбінованим методом*.

$$I=\int\frac{3dx}{(x-1)^2(x+1)}=\left[\frac{3}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}=\right.$$

$$= \frac{A(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} =$$

$$= \frac{x^2(B+C)+x(A-2C)+A-B+C}{(x-1)^2(x+1)}.$$

$$3 = A(x+1)+B\left(x^2-1\right)+C(x-1)^2 = x^2(B+C)+x(A-2C)+A-B+C$$

$$\begin{array}{l|l} x=-1 & 3 = A(-1+1)+B\left((-1)^2-1\right)+C(-1-1)^2 \Rightarrow 3=4C;\ C=0{,}75 \\ x=1 & 3 = A(1+1)+B\left((1)^2-1\right)+C(1-1)^2 \Rightarrow 3=2A;\ A=1{,}5 \\ x^2 & 0 = B+C \Rightarrow B=-0{,}75 \end{array}$$

$$\left.\frac{3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{1{,}5}{(x-1)^2}+\frac{-0{,}75}{x-1}+\frac{0{,}75}{x+1}\right] = \int\frac{1{,}5}{(x-1)^2}dx+\int\frac{-0{,}75}{x-1}dx+$$

$$+\int\frac{0{,}75}{x+1}dx = -\frac{1{,}5}{x-1}-0{,}75\ln|x-1|+0{,}75\ln|x+1|+C.$$

Відповідь: $I = -\frac{1{,}5}{x-1}-0{,}75\ln|x-1|+0{,}75\ln|x+1|+C$.

Приклад 73. Знайти інтеграл

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2}dx.$$

Розв’язання. Підінтегральна функція – правильний раціональний дріб. Розкладемо знаменник правильного раціонального дробу за методом групування:

$$x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2 = x^4(x-2)+2x^2(x-2)+(x-2) = (x-2)\cdot$$

$$\cdot\left(x^4+2x^2+1\right) = (x-2)\left(x^2+1\right)^2$$

Підінтегральна функція має вигляд:

$$\frac{2x^2+2x+13}{x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2} = \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}.$$

У розкладанні правильного раціонального дробу на суму найпростіших дробів буде три доданка, оскільки знаменник дробу містить один лінійний множник $x-2$ (йому відповідає один доданок) і кратний квадратичний $\left(x^2+1\right)^2$ (йому відповідають два доданки):

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Зводимо праву частину рівності до спільного знаменника (спільний знаменник – це знаменник заданого правильного раціонального дробу: $(x-2)\left(x^2+1\right)^2$). Отримаємо

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A\left(x^2+1\right)^2+(Bx+C)(x-2)\left(x^2+1\right)+(Dx+E)(x-2)}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}$$

Прирівнюємо многочлени чисельників правої і лівої частини:

$$2x^2+2x+13=A\left(x^2+1\right)^2+(Bx+C)(x-2)\left(x^2+1\right)+(Dx+E)(x-2)$$

або

$$2x^2+2x+13=(A+B)x^4+(C-2B)x^3+(2A+B-2C+D)x^2+$$
$$+(C-2B-2D+E)x+(A-2C-2E)$$

Невизначені коефіцієнти знайдемо *комбінованим методом*: підставимо в праву і ліву частини рівності $x=2$ і прирівняємо відповідні коефіцієнти при степенях x^4, x^3, x^2 правої і лівої частин рівності:

$$\begin{array}{r|l} x=2 & 25=25A\Rightarrow A=1 \\ x^4 & 0=A+B\Rightarrow B=-1 \\ x^3 & 0=C-2B\Rightarrow C=-2 \\ x^2 & 2=2A+B-2C+D\Rightarrow D=-3 \\ x & 2=C-2B-2D+E\Rightarrow E=-4 \end{array}$$

Коефіцієнти розкладання знайдені. Заданий інтеграл від правильного раціонального дробу перетвориться до суми трьох інтегралів від найпростіших дробів і дорівнює:

$$I=\int\frac{2x^2+2x+13}{x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2}dx=\int\frac{1}{x-2}dx+\int\frac{-x-2}{x^2+1}dx+$$

$$+\int\frac{-3x-4}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{x}{x^2+1}dx-2\int\frac{dx}{x^2+1}-3\int\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx-$$

$$-4\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\Bigg[2x\,dx=d\left(x^2+1\right),\ \text{за формулою }(1.27)$$

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}\right)\Bigg]=\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}-$$

$$-2\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{3}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}-4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}\right)=\ln|\mathrm{x}-2|-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|-2\,arctg\,x-\frac{3}{2}\frac{\left(x^2+1\right)^{-1}}{-1}-\frac{2x}{x^2+1}-2\,arctg\,x+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}-4\,arctg\,x+\frac{3-4x}{2\left(x^2+1\right)}+C.$$

Відповідь: $I=\ \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}-4\,arctg\,x+\frac{3-4x}{2\left(x^2+1\right)}+C.$

1.9.1 Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли

Завдання	Відповідь
1. $\int\frac{3x^3-8}{x^3-4x}dx$	$3x+2\ln\left\lvert\frac{x^2-2x}{(x+2)^2}\right\rvert+C$
2. $\int\frac{5x^2-5x-3}{x^3-3x+2}dx$	$2\ln\lvert x-1\rvert+\frac{1}{x-1}+3\ln\lvert x+2\rvert+C$
3. $\int\frac{24}{x^3-2x^2+4x-8}dx$	$3\ln\lvert x-2\rvert-\frac{3}{2}\ln\left(x^2+4\right)-3\,arctg\,\frac{x}{2}+C$
4. $\int\frac{6x+14}{(x-1)\left(x^2+3\right)}dx$	$5\ln\lvert x-1\rvert-2{,}5\ln\left(x^2+3\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+C$

Завдання	Відповідь
5. $\int \frac{x^2+9}{(x+2)(x^2-2x+5)}dx$	$\ln\lvert x+2\rvert + arctg\frac{x-1}{2}+C$
6. $\int \frac{32-4x}{(x-2)(x^2-4x+8)}dx$	$6\ln\lvert x-2\rvert - 3\ln(x^2-4x+8) - 2arctg\frac{x-2}{2}+C$
7. $\int \frac{3x^2+21x}{(x+3)(x^2+6x-3)}dx$	$3\ln\lvert x+3\rvert + \frac{\sqrt{3}}{4}\ln\left\lvert\frac{x+3-2\sqrt{3}}{x+3+2\sqrt{3}}\right\rvert + C$
8. $\int \frac{4x}{(x+3)(x^2+2x+3)}dx$	$\ln\left\lvert\frac{x^2+2x+3}{(x+3)^2}\right\rvert + C$
9. $\int \frac{12x-24}{(x+1)(x^2-2x+3)}dx$	$\ln\frac{(x^2-2x+3)^3}{(x+1)^6}+C$
10. $\int \frac{27x-9}{x^4+9x^2}dx$	$3\ln\lvert x\rvert + \frac{1}{x} - \frac{3}{2}\ln(x^2+9) + \frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}+C$
11. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$	$\frac{2-x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C$
12. $\int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}dx$	$\frac{x-1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\ln\lvert x+1\rvert + \frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C$
13. $\int \frac{x+2}{(x^2+2x+2)^3}dx$	$\frac{3}{8}arctg(x+1) + \frac{3(x+1)}{8(x^2+2x+2)} +$ $+\frac{x}{4(x^2+2x+2)^2}+C$
14. $\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx$	$\frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)} + \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)+$ $+7{,}5arctg(x-2)+C$

1.10 Інтегрування тригонометричних функцій

При інтегруванні тригонометричних функцій важливо вміти використовувати тригонометричні формули, які у багатьох випадках дозволяють привести інтеграл до табличного. В інших, складніших, випадках необхідно застосовувати методи заміни або підстановки, що дозволяє звести інтеграл до табличного.

Розглянемо деякі види інтегралів, для яких існують правила знаходження.

1.10.1 Інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Розрізняють такі випадки:

1) якщо m і n – цілі числа, а один із показників m чи n є непарним додатним числом, то інтеграл визначається за допомогою метода підстановки. Наприклад, якщо $m = 2k+1$ – ціле додатне непарне число, а $n = 2l$ – ціле додатне парне число, то використовується підстановка $\cos x = t$:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \sin x \cos^n x dx =$$

$$= \int \left(\sin^2 x\right)^k \cos^n x \sin x dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^k \cos^n x \sin x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{bmatrix} = -\int \left(1 - t^2\right)^k t^n dt .$$

У випадку, коли n – ціле додатне непарне число, а m – ціле додатне парне число, використовується підстановка $\sin x = t$.

Приклад 74. Знайти інтеграл $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

Розв'язання. $I = \int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx =$

$$= \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{bmatrix} = \int t^2 \left(1 - t^2\right) dt = \int \left(t^2 - t^4\right) dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C .$$

Відповідь: $I = \dfrac{\sin^3 x}{3} - \dfrac{\sin^5 x}{5} + C$.

<u>Зауваження 1.12</u> Якщо m і n цілі непарні, то можна застосовувати будь-яку з підстановок, але краще для меншого з показників: $m < n \Rightarrow \cos x = t$ і $m > n \Rightarrow \sin x = t$.

Приклад 75. Знайти інтеграл $\int \sin^5 x \cos^3 x dx$.

Розв'язання. Маємо $m = 5$ і $n = 3$. Застосовуємо підстановку $\sin x = t$:

$$I = \int \sin^5 x \cos^3 x dx = \int \sin^5 x \cos^2 x \cos x \, dx = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{bmatrix} =$$

$$= \int t^5 \left(1 - t^2\right) dt = \int t^5 \, dt - \int t^7 \, dt = \frac{t^6}{6} - \frac{t^8}{8} + C = \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + C .$$

Відповідь: $I = \dfrac{\sin^6 x}{6} - \dfrac{\sin^8 x}{8} + C$.

2) якщо обидва показники m і n цілі додатні парні числа, то застосовують формули зниження степеня і подвійного кута:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right), \ \sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right), \ \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x .$$

Приклад 76. Знайти інтеграл $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Розв'язання.

$$I = \int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int \left(\sin x \cos x\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(1 - \cos 4x\right) dx = \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C .$$

Відповідь: $I = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$.

3) підстановку $tg\, x = t$ або $ctg\, x = t$ застосовують у випадках, коли: а) m і n – цілі парні числа, але хоч одне з них від'ємне; б) m і n – цілі непарні й від'ємні числа; в) $m + n = -2k$ – парне від'ємне число, k – ціле; г) $m + n = 0$, m і n – цілі. Тоді

$$x = arctg\, t,\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx = \frac{1}{1+t^2}dt\ .$$

Приклад 77. Знайти інтеграл $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}d\,x$.

Розв'язання. *Перший спосіб.*

$$I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}d\,x = \left[\begin{array}{c} tgx = t,\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array}\right] = \int \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4}\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{t^2\left(1+t^2\right)^2}{1+t^2}\frac{d\,t}{1+t^2} = \int t^2 d\,t = \frac{t^3}{3} + C = \frac{tg^3 x}{3} + C\ .$$

Другий спосіб. Скористуємося тим, що

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = tg^2 x \qquad \frac{d\,x}{\cos^2 x} = d\left(tgx\right).$$

$$I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}d\,x = \int tg^2 x\frac{d\,x}{\cos^2 x} = \int tg^2 x\, d\left(tgx\right) = \frac{tg^3 x}{3} + C\ .$$

Відповідь: $I = \frac{tg^3 x}{3} + C$.

Приклад 78. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

Розв'язання.

$$I=\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}=\left[\begin{array}{c} tgx=t,\ \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx=\frac{dt}{1+t^2} \end{array}\right]=$$

$$=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^5}=\int \frac{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3\left(\sqrt{1+t^2}\right)^5}{t^3\left(1+t^2\right)}dt=\int \frac{\left(1+t^2\right)^3}{t^3}dt=$$

$$=\int \frac{\left(1+t^2\right)^3}{t^3}dt==\int \frac{1+3t^2+3t^4+t^6}{t^3}dt=\int\left(t^{-3}+\frac{3}{t}+3t+t^3\right)dt=$$

$$=\frac{t^{-2}}{-2}+3\ln|\mathrm{t}|+3\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}+C=-\frac{(tgx)^{-2}}{2}+3\ln|tgx|+\frac{3}{2}tg^2x+\frac{1}{4}tg^4x+$$

$$+C=-\frac{1}{2tg^2x}+3\ln|tgx|+\frac{3}{2}tg^2x+\frac{1}{4}tg^4x+C$$

Відповідь: $I=-\frac{1}{2tg^2x}+3\ln|tgx|+\frac{3}{2}tg^2x+\frac{1}{4}tg^4x+C$.

Приклад 79. Знайти інтеграл $\int tg^2 x dx$.

Розв'язання.

$$I=\int tg^2 x dx=\left[tgx=t, dx=\frac{dt}{1+t^2}\right]=\int t^2\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt=$$

$$=\int dt+\int\frac{-1}{1+t^2}dt=t-arctg\,t+C=tg\,x-arctg(tg\,x)+C=tg\,x-x+C$$

Відповідь: $I=tg\,x-x+C$.

1.10.2 Інтеграли вигляду $\int \sin mx \cdot \cos nx\,dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx\,dx$, $\int \cos mx \cdot \cos nx\,dx$

Ці інтеграли зводяться до табличних застосуванням формул перетворення добутку тригонометричних функцій в суму:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right), \qquad (1.32)$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right), \qquad (1.33)$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right) \qquad (1.34)$$

Приклад 80. Знайти інтеграл $\int \cos 3x \cdot \sin 2x\,dx$.

Розв'язання.

$I = \int \cos 3x \cdot \sin 2x\,dx = \int \sin 2x \cdot \cos 3x\,dx = [\sin 2x \cdot \cos 3x =$

$= \frac{1}{2}\left(\sin(2x-3x) + \sin(2x+3x)\right) = \frac{1}{2}\left(\sin(-x) + \sin 5x\right) = \frac{1}{2}(-\sin x +$

$+ \sin 5x)] = -\frac{1}{2}\int \sin x dx + \frac{1}{2}\int \sin 5x dx = -\frac{1}{2}(-\cos x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cos 5x + C =$

$= -0{,}1\cos 5x + 0{,}5\cos x + C$.

Відповідь: $I = -0{,}1\cos 5x + 0{,}5\cos x + C$

Приклад 81. Знайти інтеграл $\int \cos 7x \cdot \cos^2 3x\,dx$.

Розв'язання. Спочатку знизимо степінь косинуса, а потім, скориставшись властивостями невизначеного інтеграла і формулою, що перетворює добуток тригонометричних функцій на суму, дістанемо:

$$I = \int \cos 7x \cdot \cos^2 3x\,dx = \left[\cos^2 3x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 6x\right)\right] =$$

$$=\frac{1}{2}\int\cos 7x(1+\cos 6x)dx=\frac{1}{2}\left(\int\cos 7x dx+\int\cos 7x\cdot\cos 6x dx\right)=$$

$$=\left[\cos 7x\cos 6x=\frac{1}{2}(\cos(7x-6x)+\cos(7x+6x))=\frac{1}{2}(\cos x+\cos 13x)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\cos 7x dx+\frac{1}{2}\left(\int\cos x dx+\int\cos 13x dx\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\sin 7x+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\sin x+\frac{1}{13}\sin 13x\right)\right)=\frac{1}{14}\sin 7x+\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{52}\sin 13x+C\ .$$

Відповідь: $I=\frac{1}{14}\sin 7x+\frac{1}{4}\sin x+\frac{1}{52}\sin 13x+C$.

1.10.3 Інтеграли вигляду $\int\frac{dx}{\sin^n x}$ і $\int\frac{dx}{\cos^n x}$

1) Якщо n парне число, то від підінтегральної функції відокремлюють множник $\frac{1}{\sin^2 x}$ (або $\frac{1}{\cos^2 x}$) і враховують те, що $\frac{1}{\sin^2 x}dx=-d(ctgx)$ чи $\frac{1}{\cos^2 x}dx=d(tgx)$. Для підінтегральної функції $\frac{1}{\sin^{n-2} x}$ (або $\frac{1}{\cos^{n-2} x}$) застосовують тотожне перетворення $\frac{1}{\sin^2 x}=1+ctg^2 x$ чи $\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2 x$.

2) Якщо n непарне число, то застосовують універсальну підстановку

$$tg\frac{x}{2}=t,\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\ .$$

Інтеграл $\int \frac{dx}{\cos^n x}$ за допомогою формули зведення $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ і підстановки $\frac{\pi}{2} + x = t$ приводять до інтеграла $\int \frac{dt}{\sin^n t}$.

Приклад 82. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

Розв'язання.

$$I = \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(1 + tg^2 x\right) d(tg x) = \int d(tg x) +$$

$$+ \int tg^2 x d(tg x) = tg x + \frac{tg^3 x}{3} + C.$$

Відповідь: $I = tg x + \frac{tg^3 x}{3} + C$.

Приклад 83. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Розв'язання. *Перший спосіб*. Застосовуємо універсальну підстановку.

$$I = \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \left[tg\frac{x}{2} = t, \ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \right] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3} =$$

$$= \int \frac{\left(1+t^2\right)^3}{8t^3} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \frac{1}{4}\int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^3} dt = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t\right) dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^{-2}}{-2} + \right.$$

$$+2\ln|t|+\frac{t^2}{2}\Bigg)+C=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2tg^2\frac{x}{2}}+2\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{tg^2\frac{x}{2}}{2}\right)+C.$$

Відповідь: $I=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2tg^2\frac{x}{2}}+2\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{tg^2\frac{x}{2}}{2}\right)+C$.

Другий спосіб. Враховуючи непарність степеня підінтегральної функції, можна скористатися заміною $\cos x=t$, тоді:

$$I=\int\frac{dx}{\sin^3 x}=\int\frac{\sin x}{\sin^4 x}dx=\int\frac{\sin x}{\left(1-\cos^2 x\right)^2}dx=\left[dt=-\sin x dx\right]=$$

$$=-\int\frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2}=\left[\frac{1}{\left(1-t^2\right)^2}=\frac{1}{(1-t)^2(1+t)^2}=\frac{A}{(1-t)^2}+\frac{B}{1-t}+\frac{C}{(1+t)^2}+\right.$$

$$+\frac{D}{1+t}=\frac{A(1+t)^2+B(1-t)(1+t)^2+C(1-t)^2+D(1+t)(1-t)^2}{(1-t)^2(1+t)^2}=$$

$$1=A(1+t)^2+B(1-t)(1+t)^2+C(1-t)^2+D(1+t)(1-t)^2.$$

$$\begin{array}{c|l} t=1 & 1=4A\Rightarrow A=0{,}25 \\ t=-1 & 1=4C\Rightarrow C=0{,}25 \\ t^3 & 0=-B+D \\ t^0 & 1=A+B+C+D \end{array}\Rightarrow\begin{cases} A=0{,}25 \\ C=0{,}25 \\ 0=-B+D \\ 0{,}5=B+D \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=0{,}25 \\ C=0{,}25 \\ B=0{,}25 \\ D=0{,}25 \end{cases}.$$

$$\left.\frac{1}{(1-t)^2(1+t)^2}=\frac{0{,}25}{(1-t)^2}+\frac{0{,}25}{1-t}+\frac{0{,}25}{(1+t)^2}+\frac{0{,}25}{1+t}\right]=-\int\frac{0{,}25}{(1-t)^2}dt+$$

$$-\int\frac{0{,}25}{1-t}dt-\int\frac{0{,}25}{(1+t)^2}dt-\int\frac{0{,}25}{1+t}dt=-\frac{0{,}25}{1-t}+0{,}25\ln|1-t|+\frac{0{,}25}{1+t}-$$

$$-0{,}25\ln|1+t|+C=-\frac{0{,}5t}{1-t^2}+0{,}25\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C=-\frac{0{,}5\cos x}{1-\cos^2 x}+$$

$$+0{,}25\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C=-\frac{0{,}5\cos x}{\sin^2 x}+0{,}25\ln\left|tg^2\frac{x}{2}\right|+C=$$

$$=-0{,}5\frac{\cos x}{\sin^2 x}+0{,}5\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

Відповідь: $I=-0{,}5\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}+0{,}5\ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right|+C$.

Третій спосіб. Введемо в чисельнику тригонометричну одиницю і виконаємо почленне ділення. Застосуємо метод інтегрування частинами.

$$I=\int\frac{dx}{\sin^3 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x}dx=\int\frac{dx}{\sin x}+\int\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx=$$

$$=\left[\begin{array}{c}u=\cos x,\ du=-\sin x dx\\ dv=\dfrac{\cos x}{\sin^3 x}dx,\ v=-\dfrac{1}{2\sin^2 x}\end{array}\right]=\int\frac{dx}{\sin x}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x}=$$

$$=-0{,}5\frac{\cos x}{\sin^2 x}+0{,}5\int\frac{dx}{\sin x}=-0{,}5\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+0{,}5\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

Відповідь: $I=-0{,}5\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}+0{,}5\ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right|+C$.

<u>Зауваження 1.13</u> Як бачимо, при застосуванні різних способів інтегрування маємо відповіді, які на перший погляд не збігаються. Але вони зводяться одна до одної внаслідок тотожних перетворень і застосування тригонометричних формул.

1.10.4 Інтеграли вигляду $\int R(\sin x,\cos x)dx$

Будь-який інтеграл $\int R(\sin x,\cos x)dx$, де $R(\sin x,\cos x)$ – раціональна функція від $\sin x$ і $\cos x$, за допомогою «універсальної» тригонометричної підстановки $tg\frac{x}{2}=t$ зводиться до інтеграла від раціональної функції. При цьому

$$x=2\,arctg\,t, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}. \qquad (1.35)$$

<u>Зауваження 1.14</u> Підстановку $tg\frac{x}{2}=t$ доцільно застосовувати до інтегралів вигляду

$$\int\frac{dx}{a+b\sin x+c\cos x}.$$

<u>Зауваження 1.15</u> За допомогою «універсальної» тригонометричної підстановки можна проінтегрувати практично будь-яку функцію вигляду $R(\sin x,\cos x)$. Однак на практиці вона досить часто призводить до занадто громіздких раціональних функцій. Тому в тих випадках, де це можливо, намагаються використовувати інші прийоми інтегрування.

Розглянемо випадки застосування інших підстановок, які спрощують знаходження інтегралів:

1) якщо функція $R(\sin x,\cos x)$ непарна відносно $\cos x$, тобто $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то застосовуємо підстановку $\sin x=t$. При цьому

$$x=arc\sin t, \cos x=\sqrt{1-t^2}, dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}; \qquad (1.36)$$

2) якщо функція $R(\sin x,\cos x)$ непарна відносно $\sin x$, тобто $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, то застосовуємо підстановку $\cos x=t$. При цьому

$$x = \arccos t,\ \sin x = \sqrt{1-t^2},\ dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}; \tag{1.37}$$

3) якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ парна відносно $\sin x$ і $\cos x$, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то застосовуємо підстановку $tgx = t$. При цьому

$$x = arctgt,\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ dx = \frac{1}{1+t^2}dt. \tag{1.38}$$

<u>Зауваження 1.16</u> Підстановку $tg\,x = t$ доцільно застосовувати до інтегралів вигляду

$$\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x}.$$

Приклад 84. Знайти інтеграл $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція непарна відносно $\cos x$. Застосовуємо підстановку $\sin x = t$.

$$I = \int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}dx = \left[\begin{array}{ll} \sin x = t, & \\ \cos x = \sqrt{1-t^2}, & dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{array}\right] = \int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^5}{t^4}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^4}dt = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^4}dt = \int\left(\frac{1}{t^4} - \frac{2}{t^2} + 1\right)dt = \frac{t^{-3}}{-3} - 2\left(-\frac{1}{t}\right) +$$

$$+ t + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x + C.$$

Відповідь: $I = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x + C$.

Приклад 85. Знайти інтеграл $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$. Застосовуємо підстановку $\cos x = t$.

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} dx = \left[\begin{array}{c} \cos x = t, \ x = arc\cos t \\ \sin x = \sqrt{1-t^2}, dx = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{array} \right] =$$

$$= -\int \frac{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3}{1+t^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{t^2-1}{1+t^2} dt = \int \frac{t^2+1-2}{1+t^2} dt = \int dt + \int \frac{-2}{1+t^2} dt =$$

$$= t - 2arctg t + C = \cos x - 2arctg(\cos x) + C.$$

Відповідь: $I = \cos x - 2\, arctg(\cos x) + C$.

Приклад 86. Знайти інтеграл $\int \dfrac{dx}{\sin x \cos^2 x}$.

Розв'язання. *Перший спосіб*. Скористаємося тим, що функція $\sin x$ входить у підінтегральний вираз у непарному степені. Помножимо чисельник і знаменник дробу на $\sin x$ і виконаємо заміну: $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$. Матимемо

$$I = \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin x dx}{\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x} = -\int \frac{dt}{\left(1-t^2\right)t^2} =$$

$$= -\int \frac{1-t^2+t^2}{\left(1-t^2\right)t^2} dt = -\int \frac{1-t^2}{\left(1-t^2\right)t^2} dt - \int \frac{t^2}{\left(1-t^2\right)t^2} dt = -\int \frac{1}{t^2} dt -$$

$$-\int \frac{1}{1-t^2} dt = -\frac{t^{-1}}{-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\text{t - 1}}{\text{t} + 1}\right| + C = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C.$$

Відповідь: $I = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C$.

Другий спосіб. У чисельнику підінтегральної функції записуємо тригонометричну одиницю: $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ і виконаємо почленне ділення чисельника на знаменник. Матимемо суму двох інтегралів. Для знаходження першого враховуємо, що $\sin x\,dx = -d\cos x$, а другий інтеграл є табличним. У результаті маємо:

$$I = \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} + \int \frac{1}{\sin x} dx =$$

$$= -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin x} = -\frac{(\cos x)^{-1}}{-1} + \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C = \frac{1}{\cos x} + \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

Відповідь: $I = \dfrac{1}{\cos x} + \ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$.

На перший погляд, відповіді не збігаються. Насправді вони зводяться одна до одної внаслідок тотожних перетворень і застосування формули $\left|tg\dfrac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

<u>Зауваження 1.17</u> Подібний штучний прийом, пов'язаний із застосуванням тригонометричної одиниці, досить часто практикується при інтегруванні тригонометричних функцій.

<u>Зауваження 1.18</u>. Інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$ за допомогою заміни $\sin x = t$ зводяться до інтеграла від диференціального бінома $\int t^m \left(1-t^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dt$, який за допомогою *підстановок Чебишова* зводиться до інтегрування раціональної функції однієї змінної лише у таких випадках:

$\dfrac{n-1}{2}$ – ціле, тобто n – непарне;

$\dfrac{m+1}{2}$ – ціле, тобто m – непарне;

$\dfrac{m+1}{2} + \dfrac{n-1}{2}$ – ціле, тобто $m+n$ – парне.

Приклад 87. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x \cos^{11} x}}$.

Розв'язання. Записуємо інтеграл у вигляді:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x \cos^{11} x}} = \int \sin^{-\frac{1}{3}} x \cdot \cos^{-\frac{11}{3}} x d x .$$

Маємо $m = -\frac{1}{3}$ і $n = -\frac{11}{3}$. Їх сума $m + n = -\frac{1}{3} - \frac{11}{3} = -\frac{12}{3} = -4$ – парне від'ємне число. Зробимо заміну $tgx = t$.

$$I = \int \sin^{-\frac{1}{3}} x \cdot \cos^{-\frac{11}{3}} x d x = \left[\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \right.$$

$$\left. dx = \frac{dt}{1+t^2} \right] = \int \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right)^{-\frac{11}{3}} \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \left(1+t^2\right)^{\frac{1}{6}} \left(1+t^2\right)^{\frac{11}{6}} t^{-\frac{1}{3}} \left(1+t^2\right)^{-1} dt = \int \left(1+t^2\right) t^{-\frac{1}{3}} dt =$$

$$\int t^{-\frac{1}{3}} dt + \int t^{\frac{5}{3}} dt = \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \frac{t^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + C = \frac{3}{2} (tgx)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{8} (tgx)^{\frac{8}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt[3]{tg^2 x} + \frac{3}{8} \sqrt[3]{tg^8 x} + C = \frac{3}{8} \sqrt[3]{tg^2 x} \left(4 + tg^2 x\right) + C .$$

Відповідь: $I = \frac{3}{8} \sqrt[3]{tg^2 x} \left(4 + tg^2 x\right) + C$.

Приклад 88. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$.

Розв'язання. *Перший спосіб*. Підінтегральна функція парна відносно $\sin x$ і $\cos x$. Застосовуємо підстановку $tgx = t$.

$$I=\int\frac{dx}{\sin^2 x+3\cos^2 x}=\left[\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},dx=\frac{dt}{1+t^2}\right]=$$

$$=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2+3\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}+3\frac{1}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t^2+3}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{tg\,x}{\sqrt{3}}+C=\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{\sqrt{3}tg\,x}{3}+C.$$

Другий спосіб. Чисельник і знаменник підінтегральної функції розділимо на $\cos^2 x$. Врахуємо, що $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=tg^2x$ і $\frac{dx}{\cos^2 x}=d(tgx)$. Маємо

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x+3\cos^2 x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+3}=\int\frac{d(tgx)}{tg^2x+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{tgx}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{\sqrt{3}\,tgx}{3}+C.$$

Відповідь: $I=\frac{\sqrt{3}}{3}arctg\frac{\sqrt{3}\,tgx}{3}+C$.

Приклад 89. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{3-\cos x}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція загального вигляду. Застосовуємо підстановку $tg\frac{x}{2}=t$.

$$I=\int\frac{dx}{3-\cos x}=\left[tg\,\frac{x}{2}=t,\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2}\right]=$$

$$=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2-1+t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{4t^2+2}=\frac{2}{4}\int\frac{dt}{t^2+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}arctg\,\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{2}}}+C=\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\left(\sqrt{2}\,t\right)+C=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\left(\sqrt{2}\,tg\,\frac{x}{2}\right)+C\,.$$

Відповідь: $I=\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\left(\sqrt{2}\,tg\,\frac{x}{2}\right)+C$.

<u>Зауваження 1.19</u> Інтеграли від гіперболічних функцій обчислюються аналогічно до інтегралів від тригонометричних функцій. При інтегруванні використовуються основні співвідношення між гіперболічними функціями:

$$sh\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ ch\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ thx=\frac{sh\,x}{chx},\ cthx=\frac{ch\,x}{shx},$$

$$ch^2x-sh^2\,x=1,\ ch\,2x=ch^2x+sh^2\,x,\ sh\,2x=2\,sh\,x\cdot ch\,x,$$

$$ch^2x=\frac{ch2x+1}{2},\ sh^2\,x=\frac{ch2x-1}{2},\ \frac{1}{ch^2x}=1-th^2x,$$

$$\frac{1}{sh^2x}=cth^2x-1,\ sh\left(x\pm y\right)=sh\,x\cdot ch\,y\pm ch\,x\cdot shy,$$

$$ch\left(x\pm y\right)=ch\,x\cdot ch\,y\pm sh\,x\cdot shy\,.$$

Інтеграли, що раціонально залежать від гіперболічних функцій $sh\,x$ і $ch\,x$, підстановкою $th\frac{x}{2}=t$ зводяться до інтеграла від раціонального дробу. При цьому

$$sh\,x=\frac{2t}{1-t^2},\quad ch\,x=\frac{1+t^2}{1-t^2},\quad d\,x=\frac{2}{1-t^2}dt,\quad -1<t<1\,.$$

Приклад 90. Знайти $\int\frac{ch\,3xd\,x}{sh^2 3x+2}$.

Розв'язання.

$$I=\int\frac{ch\,3xd\,x}{sh^2 3x+2}=\left[(sh\,3x)'=3ch\,3x\right]=\frac{1}{3}\int\frac{3ch\,3xd\,x}{sh^2 3x+2}=\frac{1}{3}\int\frac{d\,(sh\,3x)}{sh^2 3x+2}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{sh\,3x}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{3\sqrt{2}}arctg\frac{sh\,3x}{\sqrt{2}}+C\,.$$

Відповідь: $I=\frac{1}{3\sqrt{2}}arctg\frac{sh\,3x}{\sqrt{2}}+C$.

Приклад 91. Знайти інтеграл $\int th^3 xdx$.

Розв'язання.

$$I=\int th^3 xdx=\int\left(1-\frac{1}{ch^2 x}\right)thxdx=\int thxdx-\int thx\frac{1}{ch^2 x}dx=$$

$$=\int thxdx-\int thx\,d\,(thx)=\ln|chx|-\frac{th^2 x}{2}+C\,.$$

Відповідь: $I=\ln|chx|-\frac{th^2 x}{2}+C$.

Приклад 92. Знайти інтеграл $\int\frac{chx}{1+sh^2 x}dx$.

Розв'язання. $I=\int\frac{chx}{1+sh^2 x}dx=\int\frac{d\,(sh\,x)}{1+sh^2 x}=arctg(sh\,x)+C$.

Відповідь: $I=arctg(sh\,x)+C$.

Приклад 93. Знайти інтеграл $\int \frac{shx}{3+2chx}dx$.

Розв'язання. $I = \int \frac{shx}{3+2chx}dx = \int \frac{d(chx)}{3+2chx} = \frac{1}{2}\ln|3+2chx| + C$.

Відповідь: $I = \frac{1}{2}\ln|3+2chx| + C$.

Приклад 94. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{shx+2chx}$.

Розв'язання.

$$I = \int \frac{dx}{shx+2chx} = \left[th\frac{x}{2} = t,\, sh\,x = \frac{2t}{1-t^2},\, ch\,x = \frac{1+t^2}{1-t^2},\, dx = \frac{2dt}{1-t^2} \right] =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{2t}{1-t^2} + 2\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2}} \cdot \frac{2dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2\,th\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Відповідь: $I = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2\,th\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}} + C$.

<u>Зауваження 1.20</u> У диференціальному численні похідна від будь-якої елементарної функції є функцією елементарною. Інша справа – операція інтегрування. Існують такі елементарні функції, інтегрування яких не може бути виконане в скінченному вигляді. Необхідно, однак, зауважити, що не всяка первісна $F(x)$

навіть тоді, коли вона існує, виражається в кінцевому вигляді через елементарні функції. Інтеграли від таких функцій називають такими, що не інтегруються в елементарних функціях або просто такими, що не беруться. До їх числа належать, наприклад, такі:

$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int \frac{e^x}{x}dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}dx,\quad \int \frac{\cos x}{x}dx,\quad \int \frac{dx}{\ln x},\quad \int \sin\left(x^2\right)dx,$$

$$\int \cos\left(x^2\right)dx,\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}},\qquad \int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx,$$

$$\int \frac{dx}{\left(1+a\sin^2 x\right)\sqrt{1-k^2\sin^2 x}},\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\cos^2 x}}$$ та інші.

Ці інтеграли (як і чимало інших) реально існують. Усі вони добре вивчені, табульовані і широко використовуються в різних випадках. Для зазначених інтегралів первісні функції являють собою нові функції, які не є комбінацією елементарних функцій.

1.10.5 Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли

Завдання	Відповідь
1. $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$	$\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C$
2. $\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx$	$2arctg(\sin x)-\sin x+C$
3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos x}$	$\ln\left\vert tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\vert-\frac{1}{\sin x}+C$
4. $\int \sin^3 x\cos^5 x\,dx$	$\frac{\cos^8 x}{8}-\frac{\cos^6 x}{6}+C$
5. $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$	$\frac{1}{16}x-\frac{\sin 2x+\sin 4x}{64}+\frac{1}{192}\sin 6x+C$

Завдання	Відповідь
6. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$	$C - \frac{ctg^3 x}{3}$
7. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}$	$C - \frac{ctg^4 x}{4} - \frac{3ctg^2 x}{2} + 3\ln\lvert tgx\rvert + \frac{tg^2 x}{2}$
8. $\int ctg^2 x\, dx$	$C - ctgx - x$
9. $\int tg^3 x\, dx$	$\frac{tg^2 x}{2} + \ln\lvert\cos x\rvert + C$
10. $\int \sin 3x \sin 5x\, dx$	$\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$
11. $\int \sin 5x \cos^2 2x\, dx$	$C - \frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{36}\cos 9x - \frac{1}{4}\sin x$
12. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$	$C - ctgx - \frac{ctg^3 x}{3}$
13. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$	$\frac{1}{4}\ln\left\lvert\frac{\sin x + 1}{1 - \sin x}\right\rvert + \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + C$
14. $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}$	$C - \frac{2}{tg\frac{x}{2} + 3}$
15. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 9\cos^2 x}$	$\frac{1}{3} arctg\left(\frac{tgx}{3}\right) + C$
16. $\int \frac{dx}{3 - \sin^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{6}} arctg\left(\frac{\sqrt{6}\cdot tgx}{3}\right) + C$
17. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \sin 2x - 3\cos^2 x}$	$\frac{1}{4}\ln\left\lvert\frac{tgx - 1}{tgx + 3}\right\rvert + C$
18. $\int \frac{sh\, x}{1 + ch^2 x} dx$	$arctg(ch\, x) + C$
19. $\int sh^2 x dx$	$\frac{1}{4} sh 2x - \frac{x}{2} + C$

Завдання	Відповідь
20. $\int th^2 x dx$	$x - thx + C$

1.11 Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграл від будь-якої раціональної функції, як було показано вище, завжди береться в скінченному вигляді, чого не можна сказати про інтеграл від функції ірраціональної. До ірраціональних функцій належать функції, що містять радикали. Однак можна вказати на деякі підкласи ірраціональних функцій, інтеграли від яких беруться у скінченному вигляді. За допомогою відповідної заміни змінної в ряді випадків інтегрування їх зводять до інтегрування раціонального дробу. Таке перетворення інтеграла прийнято називати його раціоналізацією.

Розглянемо деякі з них.

1) Інтеграл вигляду $\int R\left(x, \sqrt[m_1]{x^{n_1}}, \sqrt[m_2]{x^{n_2}}, ..., \sqrt[m_k]{x^{n_k}}\right) dx$, де R – раціональна функція, n_i, m_i – цілі додатні числа $\left(i = \overline{1, k}\right)$. Даний інтеграл раціоналізується за допомогою підстановка $x = t^s$, де s – найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}, ..., \frac{n_k}{m_k}$ ($s = HCK\left(m_1, m_2, \ldots, m_k\right)$). Ця заміна приводить до інтеграла від раціональної функції аргументу t.

Приклад 95. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$.

Розв'язання. $I = \int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} = \left[\begin{matrix} x = t^6 ; t = \sqrt[6]{x} \\ dx = 6t^5 dt \end{matrix}\right] = \int \frac{t^3 \cdot 6t^5 dt}{t^2 + t^3} =$

$= 6\int \frac{t^8}{t^2 (t+1)} dt = 6\int \frac{t^6}{t+1} dt =$

$$
=\left[\begin{array}{l|l}
\;\;t^6 & t+1 \\
-\underline{t^6+t^5} & \overline{t^5-t^4+t^3-t^2+t-1} \\
\qquad -t^5 & \\
\qquad -\underline{-t^5-t^4} & \\
\qquad\qquad t^4 & \\
\qquad\qquad -\underline{t^4+t^3} & \\
\qquad\qquad\qquad -t^3 & \\
\qquad\qquad\qquad -\underline{-t^3-t^2} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad t^2 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -\underline{t^2+t} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -t & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\underline{-t-1} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 &
\end{array}\right]=
$$

$$
=6\int\left(t^5-t^4+t^3-t^2+t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=6\left(\frac{t^6}{6}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-\right.
$$

$$
\left.t+\ln|t+1|\right)+C=6\left(\frac{x}{6}-\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}-\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}+\right.
$$

$$
\left.+\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|\right)+C.
$$

Відповідь: $I=6\left(\frac{x}{6}-\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}-\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}-\sqrt[6]{x}+\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|\right)+C$

2) Інтеграл вигляду $\int R\left(\sqrt[m_1]{ax+b},\sqrt[m_2]{ax+b},\ldots,\sqrt[m_k]{ax+b}\right)dx$, де R – раціональна функція, m_i – цілі додатні числа $\left(i=\overline{1,k}\right)$. У цьому випадку доцільно зробити підстановку $ax+b=t^s$, де s – найменше спільне кратне: $s=HCK\left(m_1,m_2,\ldots,m_k\right)$.

Приклад 96. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x-2}-\sqrt[3]{x-2}}$.

Розв'язання.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x-2}-\sqrt[3]{x-2}}=\left[\begin{array}{l} s=HCK(2,3)=6\Rightarrow x-2=t^6 \\ x=t^6+2,\, dx=6t^5dt,\, t=\sqrt[6]{x-2}\end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{6t^5dt}{\sqrt{t^6}-\sqrt[3]{t^6}}=6\int\frac{t^5dt}{t^3-t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t-1}=6\int\frac{\left(t^3-1\right)+1}{t-1}dt=$$

$$=6\left(\int\frac{(t-1)\left(t^2+t+1\right)}{t-1}dt+\int\frac{1}{t-1}dt\right)=6\left(\int\left(t^2+t+1\right)dt+\int\frac{1}{t-1}dt\right)=$$

$$=6\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C=6\left(\frac{\left(\sqrt[6]{x-2}\right)^3}{3}+\frac{\left(\sqrt[6]{x-2}\right)^2}{2}+\sqrt[6]{x-2}+\right.$$

$$\left.+\ln\left|\sqrt[6]{x-2}-1\right|\right)+C=6\left(\frac{\sqrt{x-2}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x-2}}{2}+\sqrt[6]{x-2}+\ln\left|\sqrt[6]{x-2}-1\right|\right)+C$$

Відповідь: $I=6\left(\frac{\sqrt{x-2}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x-2}}{2}+\sqrt[6]{x-2}+\ln\left|\sqrt[6]{x-2}-1\right|\right)+C$.

3) Інтеграл вигляду

$$\int R\left(\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_1}{m_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_2}{m_2}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{n_k}{m_k}}\right)dx,$$

де $n_i, m_i\ \left(i=\overline{1,k}\right)$ – цілі додатні числа, a,b,c,d – дійсні числа і $ad-bc\neq 0$. Заміна: $\frac{ax+b}{cx+d}=t^s$, де s є найменше спільне кратне знаменників дробів $\frac{n_1}{m_1},\frac{n_2}{m_2},\ldots,\frac{n_k}{m_k}$ ($s=HCK\left(m_1,m_2,\ldots,m_k\right)$), приводить до інтеграла від раціональної функції аргументу t.

Приклад 97. Знайти інтеграл $\int\frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$.

Розв'язання. $I=\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx=$

$$=\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}=\mathrm{t}\Rightarrow \frac{2-x}{2+x}=t^3,\ x=\frac{2-2t^3}{1+t^3} \\ dx=\frac{-12t^2}{\left(1+t^3\right)^2}dt,\ 2-x=2-\frac{2-2t^3}{1+t^3}=\frac{4t^3}{1+t^3} \end{array}\right]=$$

$$=-\int \frac{2\left(1+t^3\right)^2\cdot t\cdot 12t^2}{16t^6\left(1+t^3\right)^2}\,dt=-\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^3}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+C=\frac{3}{4t^2}+C=$$

$$=\frac{3}{4\left(\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\right)^2}+C=\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C.$$

Відповідь: $I=\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C$.

4) Інтеграли вигляду $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ і $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ розглянуті в **1.8**.

5) Інтеграли вигляду $\int \frac{dx}{(x-a)^{\mathrm{n}}\sqrt{ax^2+bx+c}}$, де n – натуральне число, a,b,c – дійсні числа (і водночас не дорівнюють нулю) зводяться до інтеграла від раціональної функції аргументу t за допомогою підстановки $x-a=\frac{1}{t}$.

Приклад 98. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$.

Розв'язання. $I=\int\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}=$

$$=\left[\begin{array}{l}x-1=\frac{1}{t},\ x=\frac{1}{t}+1,\ 1+2x-x^2=1+\frac{2}{t}+\\+2-\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}-1=2-\frac{1}{t^2},\ dx=-\frac{1}{t^2}dt\end{array}\right]=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{2-\frac{1}{t^2}}}=$$

$$=-\int\frac{t}{\sqrt{2t^2-1}}dt=\left[d\left(2t^2-1\right)=4t\,dt\right]=-\frac{1}{4}\int\frac{4t\,dt}{\sqrt{2t^2-1}}=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{d\left(2t^2-1\right)}{\sqrt{2t^2-1}}=-\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{2t^2-1}+C=-\frac{1}{2}\sqrt{2t^2-1}+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{(x-1)^2}-1}+C=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1+2x-x^2}{(x-1)^2}}+C\,.$$

Відповідь: $I=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1+2x-x^2}{(x-1)^2}}+C\,.$

6) Інтеграли вигляду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ раціоналізуються за допомогою підстановок Ейлера:

а) якщо $a>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x\pm t$, причому знаки можна брати в будь-якій комбінації.;

б) якщо $c>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$;

с) якщо x_1, x_2 – корені тричлена ax^2+bx+c, тобто $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-x_i)t,\ i=\overline{1,2}\,.$$

Або ці інтеграли за допомогою підстановки $x=t-\frac{b}{2a}$

зводяться до одного з інтегралів: $\int R\left(t, \sqrt{m^2 t^2 - n^2}\right)dt$, $\int R\left(t, \sqrt{m^2 t^2 + n^2}\right)dt$, $\int R\left(t, \sqrt{n^2 - m^2 t^2}\right)dt$.

Приклад 99. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Розв'язання. Маємо $a = 1 > 0$, тому застосовуємо першу підстановку: $\sqrt{x^2 + x + 1} = -x + t$. Звідси $x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t}$, $dx = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(1 + 2t)^2} dt$. Підставимо отримані вирази в інтеграл.

$$I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{2t^2 + 2t + 2}{t(1 + 2t)^2} dt = \left[\frac{2t^2 + 2t + 2}{t(1 + 2t)^2} = \frac{A}{(1 + 2t)^2} + \right.$$

$$+ \frac{B}{1 + 2t} + \frac{C}{t} = \frac{At + Bt(1 + 2t) + C(1 + 2t)^2}{t(1 + 2t)^2},$$

$$2t^2 + 2t + 2 = At + Bt(1 + 2t) + C(1 + 2t)^2.$$

$$\begin{array}{l|l} t = 0 & 2 = C \Rightarrow C = 2 \\ t = -0{,}5 & 1{,}5 = A(-0{,}5) \Rightarrow A = -3 \\ t^2 & 2 = 2B + 4C \Rightarrow B = -3 \end{array}.$$

$$\left. \frac{2t^2 + 2t + 2}{t(1 + 2t)^2} = \frac{-3}{(1 + 2t)^2} + \frac{-3}{1 + 2t} + \frac{2}{t} \right] = \int \frac{-3}{(1 + 2t)^2} dt + \int \frac{-3}{1 + 2t} dt +$$

$$+ \int \frac{2}{t} dt = -\frac{3}{2} \frac{(1 + 2t)^{-1}}{-1} - \frac{3}{2} \ln|1 + 2t| + 2\ln|t| + C = \frac{3}{2(1 + 2t)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \ln \frac{t^4}{|1 + 2t|^3} + C = \frac{3}{2\left(1 + 2x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}\right)} +$$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)^4}{\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right|^3}+C.$$

Відповідь:

$$I=\frac{3}{2\left(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right)}+\frac{1}{2}\ln\frac{\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)^4}{\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right|^3}+C.$$

Приклад 100. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Розв'язання. Маємо $c=1>0$, тому застосовуємо другу підстановку: $\sqrt{1-2x-x^2}=xt-1$. Звідси $x=\frac{2(t-1)}{t^2+1}$, $dx=2\cdot\frac{-t^2+2t+1}{\left(t^2+1\right)^2}dt$. Підставимо отримані вирази в інтеграл.

$$I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=\int\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)\left(t^2+1\right)}dt=\left[\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)\left(t^2+1\right)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\right.$$

$$+\frac{Ct+D}{t^2+1}=\frac{A(t-1)\left(t^2+1\right)+Bt\left(t^2+1\right)+(Ct+D)t(t-1)}{t(t-1)\left(t^2+1\right)},$$

$$-t^2+2t+1=A(t-1)\left(t^2+1\right)+Bt\left(t^2+1\right)+(Ct+D)t(t-1).$$

$$\begin{array}{c|l} t=0 & 1=-A\Rightarrow A=-1 \\ t=1 & 2=2B\Rightarrow B=1 \\ t^3 & 0=A+B+C\Rightarrow C=0 \\ t & 2=A+B-D\Rightarrow D=-2 \end{array}.$$

$$\left.\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)}=\frac{-1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{-2}{t^2+1}\right]=\int\frac{-1}{t}dt+\int\frac{1}{t-1}dt+\int\frac{-2}{t^2+1}dt=$$

$$=-\ln|t|+\ln|t-1|-2\,arctg\,t+C=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|-2\,arctg\,t+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-x+1}{\sqrt{1-2x-x^2}+1}\right|-2\,arctg\frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x}+C\,.$$

Відповідь:

$$I=\ln\left|\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-x+1}{\sqrt{1-2x-x^2}+1}\right|-2\,arctg\frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x}+C\,.$$

Приклад 101. Знайти інтеграл $\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$.

Розв'язання. Оскільки $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$, то застосовуємо третю підстановку: $\sqrt{x^2+3x+2}=t(x+1)$. Звідси $x^2+3x+2=t^2(x+1)^2 \Rightarrow (x+1)\cdot(x+2)=t^2(x+1)^2$. Скорочуємо на $(x+1)$ і розв'язуємо відносно x. Маємо $x=\frac{2-t^2}{t^2-1}$, $dx=-\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt$. Підставимо отримані вирази в інтеграл.

$$I=\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx=\int\frac{-2t^2-4t}{(t-1)(t-2)(t+1)^3}dt=$$

$$=\left[\frac{-2t^2-4t}{(t-1)(t-2)(t+1)^3}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t-2}+\frac{C}{(t+1)^3}+\frac{D}{(t+1)^2}+\frac{E}{t+1}=\right.$$

$$=\frac{At+Bt-2A-B}{(t-1)(t-2)}+\frac{C+D(t+1)+E(t+1)^2}{(t+1)^3}=$$

$$=\frac{(At+Bt-2A-B)(t+1)^3+\left(C+D(t+1)+E(t+1)^2\right)(t-1)(t-2)}{(t-1)(t-2)(t+1)^3}.$$

$$-2t^2-4t=(A+B)t(t+1)^3-(2A+B)(t+1)^3+C(t-1)(t-2)+$$

$$+D(t+1)(t-1)(t-2)+E(t+1)^2(t-1)(t-2).$$

$$\begin{array}{c|l}
t=1 & -6=8(A+B)-8(2A+B)\Rightarrow -6=-8A\Rightarrow A=0{,}75 \\
t=2 & -16=54(A+B)-27(2A+B)\Rightarrow -16=27B\Rightarrow B=-16/27 \\
t=-1 & \quad 2=6C\Rightarrow c=1/3 \\
t^4 & \quad 0=A+B+E\Rightarrow E=-17/108 \\
t^3 & \quad 0=3(A+B)-(2A+B)+D-E\Rightarrow D=5/18
\end{array}.$$

$$\left.\frac{-2t^2-4t}{(t-1)(t-2)(t+1)^3}=\frac{0.75}{t-1}+\frac{-16/27}{t-2}+\frac{1/3}{(t+1)^3}+\frac{5/18}{(t+1)^2}+\frac{-17/108}{t+1}\right]=$$

$$=\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{16}{27}\int\frac{dt}{t-2}+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(t+1)^3}+\frac{5}{18}\int\frac{dt}{(t+1)^2}-\frac{17}{108}\int\frac{dt}{t+1}=$$

$$=\frac{3}{4}\ln|t-1|-\frac{16}{27}\ln|t-2|+\frac{1}{3}\frac{(t+1)^{-2}}{-2}+\frac{5}{18}\frac{(t+1)^{-1}}{-1}-\frac{17}{108}\ln|t+1|+C=$$

$$=\frac{3}{4}\ln|t-1|-\frac{16}{27}\ln|t-2|-\frac{17}{108}\ln|t+1|-\frac{1}{6(t+1)^2}-\frac{5}{18(t+1)}+C,\ \text{де}$$

$$t=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}.$$

Відповідь:

$$I=\frac{3}{4}\ln|t-1|-\frac{16}{27}\ln|t-2|-\frac{17}{108}\ln|t+1|-\frac{1}{6(t+1)^2}-\frac{5}{18(t+1)}+C,$$

де $t=\dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$.

Зауваження 1.20. Підстановки Ейлера зазвичай приводять до громіздких викладок, тому їх застосовують у випадках, якщо інтеграл не може бути знайдений простішим способом.

7) Інтеграли вигляду $\int R\left(x,\sqrt{m^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{x^2+m^2}\right)dx$, $\int R\left(x,\sqrt{x^2-m^2}\right)dx$ зводяться до інтегралів від раціональної відносно $\sin x$ і $\cos x$ функції за допомогою відповідної тригонометричної підстановки.

а) для $\int R\left(x,\sqrt{m^2-x^2}\right)dx$ підстановка $x=m\cos t$ або $x=m\sin t$:

$$\begin{array}{l} dx=-m\sin t dt,\ \sqrt{m^2-x^2}=m\sin t,\ t=arc\cos\dfrac{x}{m} \\ dx=m\cos t dt,\ \sqrt{m^2-x^2}=m\cos t,\ t=arc\sin\dfrac{x}{m} \end{array};$$

б) для $\int R\left(x,\sqrt{x^2+m^2}\right)dx$ підстановка $x=m\,tgt$ або $x=m\,ctgt$:

$$\begin{array}{l} dx=\dfrac{m}{\cos^2 t}dt,\ \sqrt{m^2+x^2}=\dfrac{m}{\cos t},\ t=arctg\dfrac{x}{m} \\ dx=-\dfrac{m}{\sin^2 t}dt,\ \sqrt{m^2+x^2}=\dfrac{m}{\sin t},\ t=arcctg\dfrac{x}{m} \end{array};$$

с) для $\int R\left(x,\sqrt{x^2-m^2}\right)dx$ підстановка $x=\dfrac{m}{\cos t}$ або $x=\dfrac{m}{\sin t}$:

$$\begin{array}{l} dx=\dfrac{m\sin t}{\cos^2 t}dt,\ \sqrt{x^2-m^2}=\dfrac{m\sin t}{\cos t},\ t=arc\cos\dfrac{m}{x} \\ dx=-\dfrac{m\cos t}{\sin^2 t}dt,\ \sqrt{x^2-m^2}=\dfrac{m\cos t}{\sin t},\ t=arc\sin\dfrac{m}{x} \end{array}.$$

Приклад 102. Знайти інтеграл $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx$

Розв'язання.

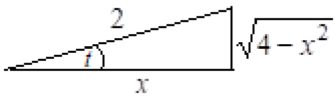
$$I=\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx=\left[\begin{array}{l} x=2\cos t,\ dx=-2\sin t dt \\ \sqrt{4-x^2}=2\sin t \end{array}\right]=\int \frac{8\cos^3 t}{2\sin t}(-2)\sin t dt=$$

$$=-8\int \cos^3 t dt=-8\int \cos^2 t\cdot \cos t dt=-8\int \left(1-\sin^2 t\right)d\sin t=$$

$$=-8\left(\int d\sin t-\int \sin^2 t\, d\sin t\right)=-8\left(\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right)+C=$$

$$=\left[t=arc\cos\frac{x}{2}\right]=-8\left(\sin\left(arc\cos\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{3}\sin^3\left(arc\cos\frac{x}{2}\right)\right)+C\ .$$

Відповідь можна спростити, якщо розглянути прямокутний трикутник з гострим кутом t, прилеглим катетом x, гіпотенузою рівною 2 і протилежним катетом $\sqrt{4-x^2}$, відповідно до зробленої заміни: $x=2\cos t \Rightarrow\ \cos t=\frac{x}{2},\ \sin t=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$.



Підставимо отримане значення $\sin t$ у відповідь. Матимемо

$$I=-8\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)^3\right)+C=\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{3}-4\sqrt{4-x^2}+C\ .$$

Відповідь: $I=\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{3}-4\sqrt{4-x^2}+C$.

Приклад 103. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\left(x^2-3\right)\sqrt{x^2-3}}$.

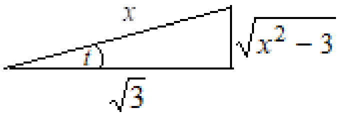
Розв'язання.

$$I=\int\frac{dx}{\left(x^2-3\right)\sqrt{x^2-3}}=\left[\begin{array}{c} x=\frac{\sqrt{3}}{\cos t},\ dx=\frac{\sqrt{3}\sin t}{\cos^2 t}dt \\ \sqrt{x^2-3}=\frac{\sqrt{3}\sin t}{\cos t}, t=arc\cos\frac{\sqrt{3}}{x}\end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{\frac{\sqrt{3}\sin t}{\cos^2 t}dt}{\frac{3\sin^2 t}{\cos^2 t}\cdot\frac{\sqrt{3}\sin t}{\cos t}}=\frac{1}{3}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=\left[d\sin t=\cos t\,dt\right]=\frac{1}{3}\int\frac{d\sin t}{\sin^2 t}=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sin t}+C=-\frac{1}{3\sin\left(arc\cos\frac{\sqrt{3}}{x}\right)}+C$$ або спростимо відповідь,

як у попередньому прикладі:



Тоді $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{x},\ \sin t=\frac{\sqrt{x^2-3}}{x}$. Матимемо $I=-\frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}+C$.

Відповідь: $I=-\frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}+C$.

Приклад 104. Знайти інтеграл $\int\frac{x+3}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+4}}dx$.

Розв'язання.

$$I=\int\frac{x+3}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+4}}dx=\left[\begin{array}{c} x=2tgt,\ dx=\frac{2}{\cos^2 t}dt \\ \sqrt{x^2+4}=\frac{2}{\cos t},\ t=arctg\frac{x}{2}\end{array}\right]=$$

$$= \int \frac{2tgt+3}{\left(4tg^2 t+3\right)\cdot \dfrac{2}{\cos t}} \cdot \frac{2}{\cos^2 t}\, dt = \int \frac{2\dfrac{\sin t}{\cos t}+3}{\left(4\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}+3\right)\cdot \cos t}\, dt =$$

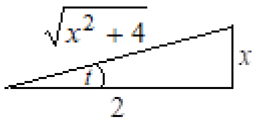
$$= \int \frac{2\sin t + 3\cos t}{4\sin^2 t + 3\cos^2 t}\, dt = 2\int \frac{\sin t}{4\sin^2 t+3\cos^2 t}\, dt +$$

$$+3\int \frac{\cos t}{4\sin^2 t + 3\cos^2 t}\, dt = \begin{bmatrix} 4\sin^2 t + 3\cos^2 t = 4-\cos^2 t \\ 4\sin^2 t + 3\cos^2 t = \sin^2 t + 3 \end{bmatrix} =$$

$$= 2\int \frac{\sin t}{4-\cos^2 t}\, dt + 3\int \frac{\cos t}{\sin^2 t+3}\, dt = \begin{bmatrix} d\cos t = -\sin t\, dt \\ d\sin t = \cos t\, dt \end{bmatrix} =$$

$$= 2\int \frac{d\cos t}{\cos^2 t - 4} + 3\int \frac{d\sin t}{\sin^2 t + 3} = 2\cdot \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\cos t - 2}{\cos t + 2}\right| + \frac{3}{\sqrt{3}}\, arctg\, \frac{\sin t}{\sqrt{3}} +$$

$$+ C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos\left(arctg\, \dfrac{x}{2}\right)-2}{\cos\left(arctg\, \dfrac{x}{2}\right)+2}\right| + \sqrt{3}arctg\, \frac{\sin\left(arctg\, \dfrac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}} + C\,.$$

Спростимо відповідь: 

Тоді $\cos t = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+4}}$,

$\sin t = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Матимемо $I = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{x^2+4}}-2}{\dfrac{2}{\sqrt{x^2+4}}+2}\right| +$

$$+\sqrt{3}arctg\, \frac{x}{\sqrt{3\left(x^2+4\right)}} + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{x^2+4}}{1+\sqrt{x^2+4}}\right| +$$

$$+\sqrt{3}arctg\, \frac{x}{\sqrt{3\left(x^2+4\right)}} + C$$

Відповідь: $I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{x^2+4}}{1+\sqrt{x^2+4}}\right|+\sqrt{3}arctg\frac{x}{\sqrt{3(x^2+4)}}+C$.

8) Інтеграли від диференціальних біномів.

Вираз $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, в якому $a,b\in R$ і $m,n,p\in Q$ називається ***диференціальним біномом***.

Інтеграли від диференціальних біномів $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ знаходяться за допомогою *підстановок Чебишова* до інтегрування раціональної функції однієї змінної лише у таких випадках:

а) якщо число p – ціле, то застосовується підстановка $x=t^s$, де s – найменше спільне кратне знаменників дробів m і n;

б) якщо число $\frac{m+1}{n}$ – ціле, то застосовується підстановка $a+bx^n=t^s$, де s – знаменник дробу p;

с) якщо число $\frac{m+1}{n}+p$ – ціле, то застосовується підстановка $a+bx^n=t^s x^n \Rightarrow ax^{-n}+b=t^s$, де s – знаменник дробу p.

Якщо умови інтегрованості біноміального диференціала не виконуються, тобто жодне із трьох указаних чисел не є цілим, то інтеграл від біноміального диференціала в скінченному вигляді не обчислюється.

Приклад 105. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+2\right)^3}$

Розв'язання. Записуємо інтеграл у вигляді $\int x^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt[4]{x}+2\right)^{-3}dx$. Маємо інтеграл від диференціального бінома. Оскільки $p=-3$ – ціле, то маємо перший випадок інтегрованості диференціального бінома і застосовуємо підстановку $x=t^4$, де число 4 є найменшим спільним кратним знаменників дробів $\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{4}$, $\left(t=\sqrt[4]{x}\right)$. Тоді $dx=4t^3dt$ і шуканий інтеграл зводиться до інтеграла від правильного раціонального дробу:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+2\right)^3}=\int\frac{4t^3\,dt}{t^2(t+2)^3}=4\int\frac{t}{(t+2)^3}dt=4\int\frac{t+2-2}{(t+2)^3}dt=$$

$$=4\left(\int\frac{dt}{(t+2)^2}-2\int\frac{dt}{(t+2)^3}\right)=4\left(-\frac{1}{t+2}-2\left(-\frac{1}{2(t+2)^2}\right)\right)+C=$$

$$=-\frac{4}{\sqrt[4]{x}+2}+\frac{4}{\left(\sqrt[4]{x}+2\right)^2}+C=-\frac{4\sqrt[4]{x}+4}{\left(\sqrt[4]{x}+2\right)^2}+C\,.$$

Відповідь: $I=-\dfrac{4\sqrt[4]{x}+4}{\left(\sqrt[4]{x}+2\right)^2}+C$.

Приклад 106. Знайти інтеграл $\int\frac{x^3dx}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}$.

Розв'язання. Записуємо інтеграл у вигляді $\int x^3\left(x^2+3\right)^{-\frac{3}{2}}dx$. Маємо інтеграл від диференціального бінома. Оскільки $m=3$, $n=2$ і $p=-\frac{3}{2}$, то $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2$ – ціле, то маємо другий випадок інтегрованості диференціального бінома і застосовуємо підстановку $x^2+3=t^2$, де число 2 – знаменник дробу $p=-\frac{3}{2}$ $\left(t=\sqrt{x^2+3}\right)$. Тоді $x=\sqrt{t^2-3}$, $dx=\frac{t}{\sqrt{t^2-3}}dt$ і шуканий інтеграл зводиться до інтеграла від правильного раціонального дробу:

$$I=\int\frac{x^3dx}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}=\int\frac{\left(\sqrt{t^2-3}\right)^3}{t^2\cdot t}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-3}}dt=\int\frac{t^2-3}{t^2}dt=$$

$$=\int dt-\int\frac{3}{t^2}dt=t-3\left(-\frac{1}{t}\right)+C=\sqrt{x^2+3}+\frac{3}{\sqrt{x^2+3}}+C=$$

$$=\frac{x^2+6}{\sqrt{x^2+3}}+C.$$

Відповідь: $I=\dfrac{x^2+6}{\sqrt{x^2+3}}+C$.

Приклад 107. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4\sqrt{2-x^2}}$.

Розв'язання. Записуємо інтеграл у вигляді $\int x^{-4}\left(2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$. Маємо інтеграл від диференціального бінома. Оскільки $m=-4$, $n=2$ і $p=-\dfrac{1}{2}$, то $\dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{-4+1}{2}-\dfrac{1}{2}=-2$ – ціле, то маємо третій випадок інтегрованості диференціального бінома і застосовуємо підстановку $2x^{-2}-1=t^2$, де число 2 – знаменник дробу $p=-\dfrac{1}{2}$ $\left(t=\sqrt{2x^{-2}-1}\right)$. Тоді $x=\sqrt{\dfrac{2}{t^2+1}}=\sqrt{2}\left(t^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}$, $dx=-\sqrt{2}\,t\left(t^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}dt$ і шуканий інтеграл зводиться до інтеграла від правильного раціонального дробу:

$$I=\int\frac{dx}{x^4\sqrt{2-x^2}}=\int\frac{-\sqrt{2}\,t\left(t^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}dt}{\left(\sqrt{2}\left(t^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^4\sqrt{2-\left(\sqrt{2}\left(t^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^2}}=$$

$$=\int\frac{-\sqrt{2}\,t\left(t^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}dt}{4\left(t^2+1\right)^{-2}\sqrt{2}t\left(t^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}}=\int\left(t^2+1\right)dt=\frac{t^3}{3}+t+C=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{2x^{-2}-1}\right)^3+\sqrt{2x^{-2}-1}+C=\sqrt{\frac{2-x^2}{x^2}}\left(\frac{2-x^2}{3x^2}+1\right)+C=$$

$$=\frac{\sqrt{2-x^2}}{x}\cdot\frac{2-x^2+3x^2}{3x^2}+C=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2+1}{x^3}\sqrt{2-x^2}+C\,.$$

Відповідь: $I=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2+1}{x^3}\sqrt{2-x^2}+C$.

1.11.1 Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли

Завдання	Відповідь
1. $\int\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$	$x+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+$ $+2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+4\,arctg\sqrt{x}+C$
2. $\int\frac{\sqrt{x-2}}{1+\sqrt[3]{x-2}}dx$	$\frac{6}{7}\sqrt[6]{\left(x-2\right)^7}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{\left(x-2\right)^5}+2\sqrt{x-2}-$ $-6\sqrt[6]{x-2}+6\,arctg\left(\sqrt[6]{x-2}\right)+C$
3. $\int\frac{1}{\left(1-x\right)^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$	$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C$

Завдання	Відповідь
4. $\int \frac{1}{(1+x)^2}\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$	$C-\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^4}$
5. $\int \frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{9-x^2}}$	$-\frac{1}{20}arctg\left(\frac{4x}{5\sqrt{9-x^2}}\right)+C$
6. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{x}{9\sqrt{x^2+9}}+C$
7. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^3}\,dx$	$\frac{1}{4}arc\cos\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{x^2-4}}{2x^2}+C$
8. $\int \frac{dx}{(x-2)^2\sqrt{2x^2-8x+10}}$	$C-\frac{\sqrt{x^2-4x+5}}{\sqrt{2}(x-2)}+C$
9. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx$	$\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-4\sqrt{x}+18\sqrt[6]{x}+\frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}-$ $-21arctg(\sqrt[6]{x})+C$
10. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$	$\frac{12}{7}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^7-3\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^4+C$
11. $\int \frac{x^3\,dx}{(1+2x^2)\sqrt{1+2x^2}}$	$\frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}+C$
12. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C$
13. $\int \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\,dx$	$\frac{1}{14}\sqrt[3]{\left(1+3\sqrt[3]{x^2}\right)^7}-\frac{1}{8}\sqrt[3]{\left(1+3\sqrt[3]{x^2}\right)^4}+C$

Завдання	Відповідь
14. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2+2x+2}}$	$\ln \frac{\left\|x-\sqrt{x^2+2x+2}\right\|}{\sqrt{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}}+$ $+\frac{1}{2\left(x+1-\sqrt{x^2+2x+2}\right)}+C$
15. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}\right)^5-\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}\right)^3+\right.$ $\left.+\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}\right)+C$

2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1 Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Задача про площу криволінійної трапеції

Нехай на відрізку $[a;b]$ задана неперервна невід’ємна функція $y=f(x)\geq 0$. Фігура, обмежена зверху графіком функції $y=f(x)$, знизу – віссю Ox, збоку – прямими $x=a$ і $x=b$, називається криволінійної трапецією.

Знайдемо площу цієї трапеції. Для цього відрізок $[a;b]$ розіб'ємо точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i\ldots<x_n=b$ на n часткових відрізків $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$, …, $[x_{n-1};x_n]$. Через кожну точку проведемо вертикальні прямі $x=x_i$, внаслідок чого криволінійна трапеція розіб’ється на n часткових криволінійних трапецій. У кожному частковому відрізку $[x_{i-1};x_i]$ $(i=1,\ldots,n)$

візьмемо довільну точку ζ_i. Через кожну вибрану точку проведемо вертикальні прямі. На кожному частковому відрізку побудуємо прямокутники, основою яких є часткові відрізки, а висоти дорівнюють значенню функції $f(\zeta_i)$ у довільних точках ζ_i. Внаслідок такої побудови отримаємо ступінчасту фігуру.

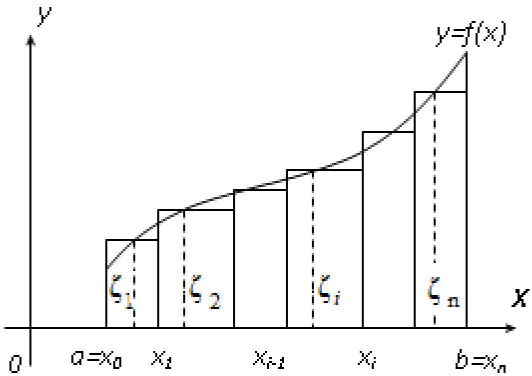


Рисунок 2.1

Помножимо значення функції $f(\zeta_i)$ на довжину відповідного часткового відрізка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Отриманий добуток $f(\zeta_i)\cdot \Delta x_i$ дорівнює площі i–прямокутника з основою Δx_i і висотою $f(\zeta_i)$.

Складемо суму всіх таких добутків:

$$S_n = f(\zeta_1)\Delta x_1 + f(\zeta_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\zeta_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i$$

Ця сума дорівнює площі S_n ступінчастої фігури і наближено дорівнює шуканій площі S криволінійної трапеції:

$$S \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i .$$

Зі зменшенням всіх величин Δx_i (очевидно, при цьому збільшується кількість часткових відрізків) точність наближення криволінійної трапеції ступінчастою фігурою зростає. Позначимо через λ довжину найбільшого часткового відрізка: $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$

Тому за точне значення площі S криволінійної трапеції приймається границя, до якої прямує площа ступінчастою фігури S_n, коли n необмежено зростає $(n \to \infty)$, а $\lambda \to 0$:

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i .$$

Ця границя не повинна залежати від способу розбиття відрізка на часткові відрізки та способу вибору довільних точок ζ_i в них.

Задача про обчислення шляху за відомою швидкістю

Нехай тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)$ (тобто швидкість може бути змінною, але є відомою в кожен момент часу). Поставимо задачу: обчислити шлях s, який пройде тіло між моментами часу $t = a$ і $t = b$.

Розіб’ємо відрізок $[a;b]$ точками $a = t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, t_n = b$.

На кожному частковому відрізку $[t_{i-1};t_i]$ $(i = 1,\ldots,n)$ будемо вважати, що швидкість стала, і дорівнює $v(\zeta_i)$, де ζ_i – довільна точка, $\zeta_i \in [t_{i-1};t_i]$. Тоді шлях, пройдений за цей проміжок часу, дорівнює $v(\zeta_i)\cdot \Delta t_i$, а сумарний шлях дорівнює $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} v(\zeta_i)\Delta t_i$.

Зрозуміло, що наше припущення трохи змінило швидкість, причому отримана похибка буде тим менша, чим менші відрізки $[t_{i-1};t_i]$. Щоб зробити похибку нульовою, варто спрямувати довжини вказаних відрізків до нуля. Позначимо через λ довжину найбільшого часткового відрізка: $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta t_i$. Тому за точне значення шляху s приймається границя, до якої прямує s_n, коли n необмежено зростає $(n \to \infty)$, а $\lambda \to 0$:

$$s = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to 0}} s_n = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to 0}} \sum_{i=1}^{n} v(\zeta_i) \Delta t_i .$$

2.2 Поняття інтегральної суми і визначеного інтеграла

Розглянемо тепер довільну функцію $y = f(x)$, визначену на відрізку $[a;b]$ і виконаємо ті ж самі дії. Сума вигляду $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i) \Delta x_i$ називається *n–інтегральною сумою* функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$, число $\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$ – довжиною найбільшого часткового відрізка.

<u>Означення 2.1</u> Якщо інтегральна сума S_n має границю S, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на часткові відрізки, ні від вибору довільних точок ζ_i в них, то ця границя називається *визначеним інтегралом* від функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається $\int_a^b f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i) \Delta x_i . \tag{2.1}$$

Числа a і b називаються відповідно *нижньою* і *верхньою межами інтегрування*, $f(x)$ – підінтегральною функцією, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, x – змінною інтегрування, відрізок $[a;b]$ – відрізком інтегрування.

Теорема 2.1 **(теорема Коші)** Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ існує (кажуть, що функція інтегровна на цьому відрізку).

Відзначимо, що неперервність підінтегральної функції є достатньою умовою існування визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$, проте такий інтеграл може існувати і для деяких розривних функцій. Зокрема, справедлива така теорема.

Теорема 2.2 Якщо функція є обмеженою на відрізку $[a;b]$ і неперервна на ньому скрізь, крім скінченної кількості точок, то вона інтегровна на цьому відрізку.

З цієї теореми випливає, що інтегровною на $[a;b]$ є будь-яка функція, що має на цьому відрізку лише скінченне число точок розриву першого роду. Більше того, справедливою є така теорема.

Теорема 2.3 Будь-яка обмежена і монотонна на відрізку функція є інтегровною на цьому відрізку.

Ця теорема значно розширює клас інтегрованих функцій, оскільки в умовах даної теореми монотонна функція може мати навіть нескінченну кількість точок розриву першого роду. Надалі при розгляді визначених інтегралів будемо розглядати інтеграли від неперервних функцій.

З означення визначеного інтеграла випливає, що *інтеграл від невід'ємної функції дорівнює площі криволінійної трапеції*

$$S=\lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx .$$

У цьому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла.

Шлях s, пройдений точкою за проміжок часу від моменту $t = a$ до $t = b$, дорівнює визначеному інтегралу від швидкості $v(t)$:

$$s = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} v(\zeta_i)\Delta t_i = \int_a^b v(t)dt .$$

2.3 Властивості визначеного інтеграла

1) Визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt . \qquad (2.2)$$

2) Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 . \qquad (2.3)$$

3) Визначений інтеграл від диференціала дорівнює різниці верхньої і нижньої меж інтегрування:

$$\int_a^b dx = b - a . \qquad (2.4)$$

4) При зміні місцями меж інтегрування, змінюється знак інтеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx . \qquad (2.5)$$

5) Сталий множник $k \neq 0 - const$ можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx\,. \qquad (2.6)$$

6) Якщо функція інтегрована на $[a;b]$ і $c \in (a;b)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,. \qquad (2.7)$$

7) Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на відрізку $[a;b]$, то

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx\,. \qquad (2.8)$$

8) Якщо функція $f(x) \geq 0$ і інтегрована на відрізку $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0\,. \qquad (2.9)$$

9) Якщо $f(x) \geq g(x)$ і вони інтегровані на відрізку $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx\,. \qquad (2.10)$$

10) Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a;b]$, $a < b$, то й функція $|f(x)|$ інтегрована на цьому відрізку, причому

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx\,. \qquad (2.11)$$

<u>Теорема 2.4</u> (про оцінку визначеного інтеграла). Якщо $m = \min\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ і $M = \max\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ відповідно найменше та найбільше значення функції $y=f(x)$, інтегрованої на відрізку $[a;b]$, то

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a). \qquad (2.12)$$

<u>Теорема 2.5</u> (про середнє в інтегральному обчисленні). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, $a<b$, то на цьому відрізку існує хоча б одна точка $c\in[a;b]$ така, що

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a). \qquad (2.13)$$

Геометрично це означає, що для невід'ємної неперервної функції існує така точка c, що площа криволінійної трапеції в точності дорівнює площі прямокутника висоти $f(c)$

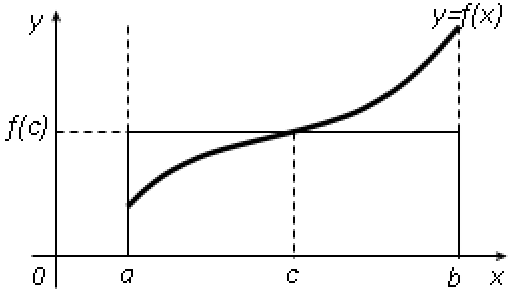


Рисунок 2.2

Число $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ – називають середнім значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

<u>Теорема 2.6</u> (про інтегрування в симетричних границях).

Якщо функція $f(x)$ парна на симетричному відрізку інтегрування $[-a;a]$, то слушно $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$.

Якщо функція $f(x)$ непарна на симетричному відрізку інтегрування $[-a;a]$, то слушно $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Теорема 2.7 (про похідну від інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування).

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, тоді функція $\Phi(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)dt$ диференційована в будь-якій точці відрізка $[a;b]$ і слушна рівність $\left(\int\limits_{a}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$.

Той факт, що інтеграл зі змінною верхньою межею є однією з первісних підінтегральної функції, дозволяє обчислювати визначений інтеграл за допомогою невизначеного:

Теорема 2.8 (*формула Ньютона-Лейбніца*).

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, а $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$, то слушна рівність

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a). \qquad (2.14)$$

Формулу (2.14) називають *формулою Ньютона-Лейбніца*. Вона встановлює зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами. Крім того, вона дає зручне правило обчислення визначеного інтеграла, оскільки звільняє при обчисленні визначеного інтеграла від складних операцій утворення інтегральної суми й переходу до границі.

2.4 Методи обчислення визначеного інтеграла.

Для знаходження первісної $F(x)$ при обчисленні визначеного інтеграла можна застосовувати табличні інтеграли та методи інтегрування для обчислення невизначених інтегралів. Розглянемо деякі з них.

2.4.1 Безпосереднє застосування формули Ньютона-Лейбніца

Згідно з формулою Ньютона-Лейбніца обчислення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ зводиться до знаходження первісної $F(x)$ і подальшого обчислення значення виразу $F(b)-F(a)$.

Приклад 108. Знайти інтеграл $\int_1^2 x^2 dx$.

Розв'язання. Знайдемо одну з первісних для функції $f(x)=x^2$: $\int x^2 dx=\frac{x^3}{3}+C$.

Маємо $F(x)=\frac{x^3}{3}$. Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца $\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2=\frac{1}{3}\left(2^3-1^3\right)=\frac{1}{3}(8-1)=\frac{7}{3}$. Розв'язання записують у вигляді: $I=\int_1^2 x^2 dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2=\frac{1}{3}\left(2^3-1\right)=\frac{7}{3}$.

Відповідь: $I=\frac{7}{3}$.

Приклад 109. Знайти інтеграл $\int_{-2}^{3}\left(x^2-3x+1\right)dx$.

Розв'язання. $I=\int_{-2}^{3}\left(x^2-3x+1\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+x\right)\right|_{-2}^{3}=9-$

$$-\frac{27}{2}+3+\frac{8}{3}+6+2=20-\frac{81-16}{6}=\frac{120-65}{6}=\frac{55}{6}.$$

Відповідь: $I=\frac{55}{6}$.

Приклад 110. Знайти інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 3x\,dx$.

Розв'язання. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 3x\,dx=-\frac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{3}\left(\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{4}\right)-\right.$

$\left.-\cos 0\right)=-\frac{1}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-\cos 0\right)=-\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)=\frac{\sqrt{2}+2}{6}$

Відповідь: $I=\frac{\sqrt{2}+2}{6}$.

Приклад 111. Знайти інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx$.

Розв'язання. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sqrt{\sin x}}\cos x\,dx=$

$=\left[\cos x\,dx=d\sin x\right]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{\sqrt{\sin x}}d\sin x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin x}{\sqrt{\sin x}}-$

$-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{\sin x}}d\sin x=2\sqrt{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{(\sin x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=2-\frac{2}{5}=\frac{8}{5}=1{,}6.$

Відповідь: $I=1{,}6$.

Приклад 112. Знайти інтеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{tgx}{\cos^2 x} dx$.

Розв'язання. $I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{tgx}{\cos^2 x} dx = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} tgx\, d\left(tgx\right) = \left.\frac{tg^2 x}{2}\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} =$

$$= \frac{1}{2}\left(tg^2 \frac{\pi}{4} - tg^2 \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $I = \frac{1}{3}$.

Приклад 113. Знайти інтеграл $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{x^2+1} dx$.

Розв'язання.

$$I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dx - \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x^2+1} dx =$$

$$= x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - arctg\, x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - arctg \frac{\pi}{4} + arctg\, 0 = \frac{\pi}{4} - 1.$$

Відповідь: $I = \frac{\pi}{4} - 1$.

Приклад 114. Знайти інтеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x\left(1 + 2\cos^2 x\right) dx$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція $f(x) = \sin^7 x\left(1 + 2\cos^2 x\right)$ – непарна, відрізок інтегрування $[-\pi; \pi]$ – симетричний, то $I = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x\left(1 + 2\cos^2 x\right) dx = 0$.

Відповідь: $I=0$.

Приклад 115. Знайти значення a, при якому виконується рівність $\int\limits_a^{\frac{\pi}{2}}\left(ctg^2x+ctg^4x\right)dx=\frac{1}{3}$.

Розв'язання. $a\in(0;\pi)$, тому що для функції $ctg\,x$ область визначення $x\neq\pi n, n\in Z$. Знайдемо ліву частину рівності:

$$\int\limits_a^{\frac{\pi}{2}}\left(ctg^2x+ctg^4x\right)dx=\int\limits_a^{\frac{\pi}{2}}\left(ctg^2x+ctg^2x\cdot ctg^2x\right)dx=$$

$$=\int\limits_a^{\frac{\pi}{2}}ctg^2x\left(1+ctg^2x\right)dx=\left[1+ctg^2x=\frac{1}{\sin^2x}\right]=\int\limits_a^{\frac{\pi}{2}}ctg^2x\cdot\frac{1}{\sin^2x}dx=$$

$$=\left[-\frac{1}{\sin^2x}dx=d\,ctg\,x\right]=-\int\limits_a^{\frac{\pi}{2}}ctg^2x\,d\,ctgx=-\left.\frac{ctg^3x}{3}\right|_a^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(ctg^3\frac{\pi}{2}-ctg^3a\right)=\frac{1}{3}ctg^3a.$$

За умовою $\frac{1}{3}ctg^3a=\frac{1}{3}$, звідки маємо $ctg^3a=1, a\in(0;\pi)$. Тоді $a=\frac{\pi}{4}$.

Відповідь: $a=\frac{\pi}{4}$.

Приклад 116. Знайти інтеграл $\int\limits_{-3}^{1}f(x)dx$, якщо

$$f(x)=\begin{cases}x^2, x\in(-\infty;-2)\\ x+6, x\in[-2;\infty)\end{cases}.$$

Розв'язання. Згідно з властивістю (2.7) маємо

$$I=\int_{-3}^{1} f(x)dx=\int_{-3}^{-2} x^2\,dx+\int_{-2}^{1}(x+6)dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-3}^{-2}+\left(\frac{x^2}{2}+6x\right)\Bigg|_{-2}^{1}=$$

$$=\frac{1}{3}(-8+27)+\left(\frac{1}{2}+6\right)-(2-12)=\frac{19}{3}+\frac{13}{2}+10=\frac{137}{6}=22\frac{5}{6}.$$

Відповідь: $I=22\frac{5}{6}$.

2.4.2 Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли

Завдання	Відповідь
1. $\int_{0}^{4}\left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx$	$4e$
2. $\int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$	$\frac{8}{3}$
3. $\int_{1}^{4}\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$	$3{,}75-4\ln 2$
4. $\int_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{x^6+4}}$	$\frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
5. $\int_{e}^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$	$\ln 2$
6. $\int_{1}^{e}\frac{\sin(\ln x)}{x}dx$	$1-\cos 1$
7. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$	$\frac{\pi}{4}$

Завдання	Відповідь
8. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tg\, x\, dx$	0
9. $\int_{0}^{1} \frac{x^4+3x^2-4}{(x+1)^2}dx$	$\frac{16}{3}-10\ln 2$
10. $\int_{0}^{1} \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$	$arctg\, e-\frac{\pi}{4}$
11. $\int_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}dx$	0
12. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-3\sin 3x\right)dx$	1
13. $\int_{-2}^{2} x^4\sin^5 x\, dx$	0
14. $\int_{a}^{\frac{\pi}{4}} \left(tg^2 x+tg^4 x\right)dx=\frac{1}{3},\ a-?$	$a=0$
15. $\int_{-2}^{3} f(x)dx,\ f(x)=\begin{cases} x+1,\ x\in(-\infty;1) \\ x^2+1,\ x\in[1;\infty) \end{cases}$	$12\frac{1}{6}$

2.4.3 Заміна змінної у визначеному інтегралі

<u>Теорема 2.9</u> Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Якщо функція $x=\varphi(t)$ задовольняє такі умови:

1) $\varphi(t)$ – диференційована монотонна функція, задана на відрізку $[\alpha;\beta]$;

2) $a=\varphi(\alpha)$ і $b=\varphi(\beta)$;

3) $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на відрізку $[\alpha;\beta]$,
то справедливою є формула заміни змінної (підстановки) у визначеному інтегралі:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,. \qquad (2.15)$$

При застосуванні формули (2.15) функція $x=\varphi(t)$ на відрізку $[a;b]$ повинна бути монотонною, тобто всі значення функції $\varphi(t)$ повинні розташовуватися на відрізку $[a;b]$.

При цьому, заміна змінної у визначеному інтегралі вимагає обережності й обов'язкового виконання всіх умов, накладених на функцію $x=\varphi(t)$.

При обчисленні визначеного інтеграла за формулою (2.15) не треба (на відміну від невизначеного інтеграла) повертатися до попередньої змінної, а досить лише перерахувати межі інтегрування для нової змінної: до рівності $x=\varphi(t)$ замість x підставляємо по черзі нижню межу a і верхню межу b інтегрування і розв'язуємо рівняння $a=\varphi(t)$ і $b=\varphi(t)$. Знайдені значення t і будуть відповідно нижньою α і верхньою β межами для нової змінної інтегрування. Якщо кожне з рівнянь $a=\varphi(t)$ і $b=\varphi(t)$ задовольняє не одне, а декілька значень t, то за α і β можна прийняти будь-яке з них. Однак вибір обмежується вимогою, щоб значення функції $\varphi(t)$ не виходили за межі відрізка $[a;b]$, на якому визначена й неперервна підінтегральна функція $f(x)$.

Поряд із формулою (2.15) можливий і такий варіант заміни змінної. Вводять нову змінну інтегрування u як функцію старої змінної x, тобто $\psi(x)=u$. Тоді $\psi'(x)dx=du$ і перетворення інтеграла здійснюється згідно з формулою

$$\int_a^b f(\psi(x))\psi'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du. \tag{2.16}$$

Нові межі інтегрування u_1 і u_2 знаходять, обчисливши відповідно $\psi(a)$ і $\psi(b)$, тобто $u_1 = \psi(a)$, $u_2 = \psi(b)$.

Приклад 117. Знайти інтеграл $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Розв'язання.

$$I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \left[\begin{array}{c|c} x = 2\sin t & dx = 2\cos t\,dt \\ a = 0; b = 2 & 0 = 2\sin\alpha, \alpha = 0;\ 2 = 2\sin\beta, \beta = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt = \left[\sqrt{4-4\sin^2 t} = 2|\cos t| = \cos t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right] =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - 0 -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\sin 0\right) = \pi.$$

Відповідь: $I = \pi$.

Приклад 118. Знайти інтеграл $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$.

Розв'язання.

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \left[\begin{array}{c|c} x = \cos t & 0 = \cos\alpha, \alpha = \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\beta, \beta = \dfrac{\pi}{6} \\ a = 0; b = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & dx = -\sin t dt \end{array}\right] =$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}\,(-\sin t)dt=\left[\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}=\sqrt{tg^2\frac{t}{2}}=\left|tg\frac{t}{2}\right|=tg\frac{t}{2},t\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]\right]=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}tg\frac{t}{2}\sin t\,dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\frac{t}{2}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos t)dt=$$

$$=(t-\sin t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}-1+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $I=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}$.

Приклад 119. Знайти інтеграл $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

Розв'язання.

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}=\left[\begin{matrix}\sqrt[3]{x+1}=t,x=t^3-1\\ a=-1,b=0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\alpha=0,\beta=1\\ dx=3t^2dt\end{matrix}\right]=\int_0^1\frac{3t^2dt}{1+t}=$$

$$=3\int_0^1\frac{t^2-1+1}{1+t}dt=3\int_0^1\frac{(t-1)(t+1)}{1+t}dt+3\int_0^1\frac{1}{1+t}dt=3\int_0^1(t-1)dt+$$

$$+3\int_0^1\frac{1}{1+t}dt=3\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\Bigg|_0^1+3ln|1+t|\Big|_0^1=3\left(\frac{1}{2}-1\right)+3\ln|2|=3\ln|2|-\frac{3}{2}$$

Відповідь: $I=3\ln|2|-\frac{3}{2}$.

Приклад 120. Знайти інтеграл $\int_1^2 x\cdot e^{x^2}dx$.

Розв'язання.

$$I=\int_1^2 x\cdot e^{x^2}\,dx=\left[\begin{array}{c|c} t=x^2 & dt=(x^2)'dx=2xdx\Rightarrow \dfrac{dt}{2}=xdx \\ a=1,b=2 & \alpha=1\ ,\beta=2^2=4 \end{array}\right]=$$

$$=\int_1^4 e^t\,\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\cdot e^t\Big|_1^4=\frac{1}{2}\left(e^4-e\right).$$

Відповідь: $I=\dfrac{1}{2}\left(e^4-e\right)$.

Приклад 121. Знайти інтеграл $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,d\,x}{2+\sin x}$.

Розв'язання.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,d\,x}{2+\sin x}=\left[\begin{array}{c} t=2+\sin x, a=0, b=\dfrac{\pi}{2}; dt=(2+\sin x)'dx=\cos xdx \\ \alpha=2+\sin 0=2+0=2;\ \beta=2+\sin\dfrac{\pi}{2}=2+1=3 \end{array}\right]=$$

$$=\int_2^3\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_2^3=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}.$$

Відповідь: $I=\ln\dfrac{3}{2}$.

2.4.4 Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли

Завдання	Відповідь
1. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{x^3+1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,d\,x$	$\dfrac{7}{6}\sqrt{3}-1$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\,x}{2+\cos x}$	$\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$

Завдання	Відповідь
3. $\int\limits_0^3 \sqrt{\frac{x}{6-x}}\,dx$	$1{,}5(\pi-2)$
4. $\int\limits_{-3}^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$	$\frac{81}{8}\pi$
5. $\int\limits_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$	$0{,}2\ln 112$
6. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$	$0{,}5\ln 1{,}5$
7. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$	$2-0{,}5\pi$
8. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$	$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$
9. $\int\limits_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+3}\,dx$	$8-1{,}5\sqrt{3}\pi$
10. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}}$	3
11. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$	$4-\pi$
12. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}$	$\frac{35}{16}\sqrt[5]{\frac{3}{4}}$
13. $\int\limits_3^8 \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}\,dx$	$\frac{14}{3}$

Завдання	Відповідь
14. $\int\limits_2^3 x(3-x)^7\,dx$	$\dfrac{19}{72}$

2.4.5 Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема 2.8 Нехай функції $u=u(x)$ і $v=v(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$ разом зі своїми похідними $u'(x)$ і $v'(x)$. Тоді слушна формула

$$\int\limits_a^b udv = u\cdot v\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu\,. \tag{2.17}$$

Приклад 122. Знайти інтеграл $\int\limits_1^e x\ln xdx$.

Розв'язання.

$$I=\int\limits_1^e x\ln xdx = \begin{bmatrix} u=\ln x, \quad du=(\ln x)'dx=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=xdx,\ v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e -$$

$$-\int\limits_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int\limits_1^e xdx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = (\frac{e^2}{2}\ln e -$$

$$-\frac{1}{2}\ln 1) - \frac{1}{4}(e^2-1) = (\frac{e^2}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 0) - \frac{1}{4}(e^2-1) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{2e^2-e^2+1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1)\,.$$

Відповідь: $I=\dfrac{1}{4}(e^2+1)$.

Приклад 123. Знайти інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx$.

Розв'язання.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx=\begin{bmatrix} u=x;\ dv=\sin x dx \\ du=dx;\ v=-\cos x \end{bmatrix}=-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=$$

$$=0+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

Відповідь: $I=1$.

Приклад 124. Знайти інтеграл $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція парна. Тому

$$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx=\begin{bmatrix} u=x;\ du=dx \\ dv=\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx;\ v=\frac{1}{\cos x} \end{bmatrix}=$$

$$=2\left(\frac{x}{\cos x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x}\right)=2\left(\frac{\pi}{3\cos\frac{\pi}{3}}-\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}\right)=$$

$$=2\left(\frac{2\pi}{3}-\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right|\right)=2\left(\frac{2\pi}{3}-\ln\left|tg\frac{5\pi}{12}\right|\right).$$

Відповідь: $I=2\left(\frac{2\pi}{3}-\ln\left|tg\frac{5\pi}{12}\right|\right)$.

Приклад 125. Знайти інтеграл $\int_0^{\frac{1}{3}} x\, arctg\, 3x d x$.

Розв'язання.

$$I=\int_0^{\frac{1}{3}} x\, arctg\, 3x d x=\begin{bmatrix} u=arctg\,3x,\ dv=x d x \\ d u=\frac{3d x}{1+9x^2},\ v=\frac{x^2}{2} \end{bmatrix}=\frac{x^2}{2}arctg\,3x\Bigg|_0^{\frac{1}{3}}-$$

$$-\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{3dx}{1+9x^2}=\frac{1}{18}arctg1-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9}\int_0^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{9x^2+1-1}{1+9x^2}dx=\frac{1}{18}\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{3}}dx+$$

$$+\frac{1}{18}\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{3}{1+9x^2}dx=\frac{1}{18}\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}x\Big|_0^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{18}arctg\,3x\Big|_0^{\frac{1}{3}}=\frac{\pi}{72}-\frac{1}{18}+\frac{1}{18}arctg1=$$

$$=\frac{\pi}{72}-\frac{1}{18}+\frac{1}{18}\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{36}-\frac{1}{18}.$$

Відповідь: $I=\frac{\pi}{36}-\frac{1}{18}$.

2.4.6 Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли

Завдання	Відповідь
1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+3)\sin x\,dx$	4
2. $\int_0^1 xe^{-x}dx$	$1-\frac{2}{e}$
3. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{xdx}{\sin^2 x}$	$\frac{\pi\left(9-4\sqrt{3}\right)}{36}+\frac{1}{2}\ln 1{,}5$
4. $\int_1^2(x-1)\ln x\,dx$	0,25
5. $\int_{1{,}5}^2 arctg(2x-3)dx$	$\frac{\pi}{8}-0{,}25\ln 2$
6. $\int_0^{\pi}(x+2)\cos\frac{x}{2}dx$	2π

Завдання	Відповідь
7. $\int\limits_{-0,5}^{0,5} arc\cos 2x\,dx$	$\frac{\pi}{2}$
8. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos x\,dx$	$-\frac{\pi}{2}$
9. $\int\limits_{0}^{1} x^3 e^{2x^2+1}dx$	$\frac{1}{8}e\left(e^2+1\right)$
10. $\int\limits_{0}^{e} \ln(3x+2)dx$	$\frac{3e+2}{3}\ln(3e+2)-e-\frac{2}{3}\ln 2$

2.5 Невласні інтеграли

Необхідною умовою існування визначеного інтеграла є обмеженість підінтегральної функції на відрізку між кінцевими межами інтегрування. Однак при розгляді теоретичних питань і вирішенні прикладних задач нерідко з'являється необхідність використовувати при інтегруванні необмежені функції і нескінченні проміжки. Інтеграли, що виникають при цьому, прийнято називати невласними.

2.5.1 Невласні інтеграли І роду (з нескінченими межами)

<u>Означення 2.2</u> Під невласним інтегралом з нескінченною верхньою межею інтегрування $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ від неперервної функції $f(x)$, визначеною для всіх значень $x \geq a$, розуміється границя інтеграла $\int\limits_{a}^{B} f(x)dx$, за умови, що верхня межа необмежено зростає:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty} \int\limits_{a}^{B} f(x)dx\,. \tag{2.18}$$

Аналогічно визначається невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею інтегрування $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ від неперервної функції $f(x)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_{A}^{b} f(x)dx . \qquad (2.19)$$

Невласний інтеграл з двома нескінченними межами інтегрування $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ визначається:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_{A}^{c} f(x)dx + \lim_{B\to+\infty}\int\limits_{c}^{B} f(x)dx =$$

$$= \lim_{A\to-\infty} F(x)\Big|_{A}^{c} + \lim_{B\to+\infty} F(x)\Big|_{c}^{B} == F(c) - \lim_{A\to-\infty} F(A) + \lim_{B\to+\infty} F(B) -$$

$$- F(c) = \lim_{B\to+\infty} F(B) - \lim_{A\to-\infty} F(A).$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty} F(B) - \lim_{A\to-\infty} F(A) \qquad (2.20)$$

Якщо границя, що стоїть в правій частині рівності (2.18), (2.19) існує і скінченна, то невласний інтеграл називається збіжним (до даної границі), в іншому випадку – розбіжним.

Якщо обидві границі в правій частині формули (2.20) існують і скінченні, то невласний інтеграл є збіжним. У протилежному випадку він – розбіжний.

Приклад 126. Дослідити збіжність невласного інтеграла $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{4+x^2}}$.

Розв’язання.

$$I=\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{4+x^2}}=\lim_{B\to\infty}\frac{1}{2}\int\limits_0^{B}\left(4+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(4+x^2\right)=\lim_{B\to\infty}\sqrt{4+x^2}\Big|_o^B=$$

$$=\lim_{B\to\infty}\left(\sqrt{4+B^2}-2\right)=\infty\ .$$

Відповідь: Інтеграл розбіжний.

Приклад 127. Дослідити збіжність невласного інтеграла $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Розв'язання. $I=\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{B\to\infty}\int\limits_0^{B}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{B\to\infty}arctg\,x\Big|_o^B=$

$$=\lim_{B\to\infty}arctg\,B-arctg\,0=\frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $I=\frac{\pi}{2}$; інтеграл збіжний.

Приклад 128. Дослідити збіжність невласного інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{0}\mathrm{x}\,e^x dx$.

Розв'язання. $I=\int\limits_{-\infty}^{0}\mathrm{x}\,e^x dx=\lim\limits_{A\to-\infty}\int\limits_A^0\mathrm{x}\,e^x dx=$

$$=\begin{bmatrix}u=x,du=d\,x\\ d\,v=e^x dx, v=e^x\end{bmatrix}=\lim_{A\to-\infty}\left(\mathrm{x}\,e^x\Big|_A^0-\int\limits_A^0 e^x dx\right)=$$

$$=\lim_{A\to-\infty}\left(-\,\mathrm{A}e^A-e^x\Big|_A^0\right)=\lim_{A\to-\infty}\left(-\,\mathrm{A}e^A-1+e^A\right)=-1\ .$$

Відповідь: $I=-1$; інтеграл збіжний.

Приклад 129. Дослідити збіжність невласного інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{0} \cos x\, dx$.

Розв'язання. $I = \int\limits_{-\infty}^{0} \cos x\, dx = \lim\limits_{A \to -\infty} \int\limits_{A}^{0} \cos x\, dx = \lim\limits_{A \to -\infty} \sin x \Big|_{A}^{0} =$

$= 0 - \lim\limits_{A \to -\infty} \sin A$. Границя не існує.

Відповідь: Інтеграл розбіжний.

Приклад 130. Дослідити збіжність невласного інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.

Розв'язання.

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int\limits_{-\infty}^{c} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} + \int\limits_{c}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} =$$

$$= \lim_{A \to -\infty} \int\limits_{A}^{c} \frac{dx}{(x+2)^2 + 1} + \lim_{B \to \infty} \int\limits_{c}^{B} \frac{dx}{(x+2)^2 + 1} = \lim_{A \to -\infty} arctg(x+2) \Big|_{A}^{c} +$$

$$+ \lim_{B \to \infty} arctg(x+2) \Big|_{c}^{B} = arctg(c+2) - \lim_{A \to -\infty} arctg(A+2) +$$

$$+ \lim_{B \to \infty} arctg(B+2) - arctg(c+2) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Відповідь: $I = \pi$; інтеграл збіжний.

Властивості збіжності невласних інтегралів I роду

У деяких випадках обчислення невласних інтегралів буває досить важко, тому для дослідження збіжності невласних інтегралів застосовують різні ознаки збіжності. Сформулюємо відповідні теореми для невласних інтегралів 1-го роду.

Теорема 2.9 Якщо первісна $F(x)$ для функції $f(x)$ має скінченну границю $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty)$, то існує й збігається невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a)$.

Якщо границя $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ не існує, то невласний інтеграл розбігається.

Теорема 2.10 (ознака порівняння). Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні на інтервалі $[a;+\infty)$ і $0 \le f(x) \le g(x)$ для $x \in [a;+\infty)$. Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збігається, то збігається і $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, причому $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \le \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$. Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається, то розбігається й інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

Іншими словами: якщо невласний інтеграл від більшої функції збігається, то інтеграл від меншої функції збігається тим більше; якщо невласний інтеграл від меншої функції розбігається, то інтеграл від більшої функції розбігається також.

Теорема 2.11 (гранична ознака порівняння). Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ інтегровані на будь-якому відрізку з інтервалу $[a;+\infty)$ і для усіх $x \in [a;+\infty)$ функції $f(x) > 0$ і $g(x) > 0$. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} \ne 0$, то невласні інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ та $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ водночас збігаються або розбігаються.

Зауваження 2.1 Для порівняння можна взяти такі невласні інтеграли I роду:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx - \begin{cases} \text{збіжний при } p>1 \\ \text{розбіжний при } p \le 1 \end{cases}. \qquad (2.21)$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx}\,dx - \begin{cases} \text{збіжний при } k>0 \\ \text{розбіжний при } k \le 1 \end{cases} \qquad (2.22)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \text{збіжний} \qquad (2.23)$$

Теорема 2.12 (про збіжність інтеграла від добутку функцій). Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $[a;+\infty)$, а функція $g(x)$ монотонна і має неперервну похідну для усіх $x \in [a;+\infty)$. Тоді справедливо: 1) якщо функція $F(A)=\int_a^A f(x)dx$ обмежена на інтервалі $[a;+\infty)$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ є збіжним; 2) якщо невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збіжний, а функція $g(x)$ обмежена на інтервалі $[a;+\infty)$, то $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ є збіжним.

Означення 2.3 Якщо функція $f(x)$ інтегрована на будь-якому відрізку $[a;b]$, що належить інтервалу $[a;+\infty)$, і невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ збіжний, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називається *абсолютно* *збіжним*. Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, а інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбігається, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називається *умовно збіжним*.

<u>Теорема 2.13</u> Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається абсолютно, то він збіжний.

<u>Зауваження 2.2</u> Із збіжності невласного інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ не випливає, що він абсолютно збіжний.

Геометричний зміст. Якщо функція $f(x)$ додатна й неперервна на інтервалі $[a;+\infty)$ і невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, то він обчислює площу нескінченної криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, прямою $x = a$ і віссю Ox, що слугує асимптотою.

Приклад 131. Дослідити збіжність невласного інтеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\left(1+3^x\right)}$.

Розв'язання. Скористаємося ознакою порівняння. Для $x \geq 1$ функція $f(x) = \frac{1}{x^2\left(1+3^x\right)} > 0$. Зробимо оцінку підінтегральної функції $0 < \frac{1}{x^2\left(1+3^x\right)} < \frac{1}{x^2}$. Функція $f(x)$ задовольняє умові

$0 < f(x) < g(x)$, де $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Згідно з формулою (2.21) інтеграл $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^2}$ є збіжним. Маємо $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^2(1+3^x)} < \int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^2}$. Тому збіжним є інтеграл $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^2(1+3^x)}$.

Відповідь: Інтеграл збіжний.

Приклад 132. Дослідити збіжність невласного інтеграла $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{4x^5 + 3x + 1}$.

Розв'язання. Скористаємося ознакою порівняння. Зробимо оцінку підінтегральної функції $f(x) = \dfrac{1}{4x^5 + 3x + 1}$: $0 < \dfrac{1}{4x^5 + 3x + 1} < \dfrac{1}{4x^5} < \dfrac{1}{x^5}$. Функція $f(x)$ задовольняє умові: $0 < f(x) < g(x)$, де $g(x) = \dfrac{1}{x^5}$. Згідно з формулою (2.21) інтеграл $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^5}$ є збіжним. Маємо $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{4x^5 + 3x + 1} < \int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^5}$. Тому інтеграл $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{4x^5 + 3x + 1}$ – збіжний

Відповідь: Інтеграл збіжний.

Приклад 133. Дослідити збіжність невласного інтеграла $\int\limits_1^\infty \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^4 - 1}}$.

Розв'язання. Скористаємося ознакою порівняння. Для $x \geq 1$ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^4 - 1}} > \dfrac{x}{\sqrt{x^4}} = \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x} = g(x)$. Згідно з формулою (2.21) інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}$ є розбіжним. Маємо $\int\limits_1^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}}>\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}$. Тому інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^4-1}}$ – розбіжний.

Відповідь: Інтеграл розбіжний.

Приклад 134. Дослідити збіжність невласного інтеграла $\int\limits_1^{\infty}\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$.

Розв'язання. Скористаємося граничною ознакою порівняння. Підінтегральна функція $f(x)=\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}$. Нехай функція $g(x)=\frac{1}{x^2}$. Інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ є збіжним. Знайдемо

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{x^2}=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{(x^2+1)}\right)^{\frac{x^2}{x^2+1}}=$$

$=\ln\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}}=\ln\mathrm{e}^1=1$. Невласні інтеграли $\int\limits_1^{\infty}\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$ і $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ водночас збігаються.

Відповідь: Інтеграл збіжний.

Приклад 135. Дослідити збіжність невласного інтеграла $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$.

Розв'язання. Розглянемо інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{|\cos x|}{1+x^2} dx$. Зробимо оцінку підінтегральної функції: $\frac{|\cos x|}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2}$. Згідно з формулою (2.23) інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ є збіжним. Маємо $\int_0^{\infty} \frac{|\cos x|}{1+x^2} dx \le \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Тому збіжним є інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{|\cos x|}{1+x^2} dx$. Звідси випливає, що $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ збігається, причому абсолютно.

Відповідь: Інтеграл абсолютно збіжний.

2.5.2 Завдання для самостійної роботи

Дослідити збіжність невласних інтегралів

Завдання	Відповідь
1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2}$	0,5 ; збіжний
2. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x-1}$	Розбіжний
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$	π ; збіжний
4. $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{4x^4+1}$	$\frac{\pi}{8}$; збіжний

Завдання	Відповідь
5. $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^4\,dx}{\sqrt{2x^5+1}}$	Розбіжний
6. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$	Розбіжний
7. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{3x}dx$	$-\frac{1}{9}$; збіжний
8. $\int\limits_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x\text{-}1)^2}$	1; збіжний
9. $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2-4x}$	$\frac{1}{4}\ln 5$; збіжний
10. $\int\limits_0^{\infty} xe^{5x^2}dx$	Розбіжний
11. $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx$	Збіжний
12. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$	Збіжний
13. $\int\limits_0^{\infty}\frac{x\sqrt{x}}{1+x^2}dx$	Розбіжний
14. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2+1}+3}$	Розбіжний

2.5.3 Невласні інтеграли II роду (від необмежених функцій)

Нехай функція $f(x)$ визначена та неперервна на проміжку $[a;b)$ і в точці b має нескінчений розрив ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$, точка b

– особлива точка).

<u>Означення 2.4</u> Границя інтеграла $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon \to 0$ (скінченна або нескінченна) називається невласним інтегралом II роду функції $f(x)$ від a до b і позначається:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx . \tag{2.24}$$

Аналогічно, якщо функція $f(x)$ визначена та неперервна на проміжку $(a;b]$ і в точці a має нескінчений розрив, то невласний інтеграл II роду функції $f(x)$ від a до b позначається:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx . \tag{2.25}$$

Якщо вказані границі існують і скінченні, то відповідний невласний інтеграл називається збіжним. У протилежному випадку кажуть, що інтеграл є розбіжним.

Якщо функція $f(x)$ в точці c, $c \in (a;b)$ має нескінчений розрив, то невласний інтеграл II роду функції $f(x)$ від a до b визначається як сума інтегралів:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} F(x)\Big|_a^{c-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} F(x)\Big|_{c+\varepsilon_2}^{b} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} F(c-\varepsilon_1) - F(a) +$$

$$+ F(b) - \lim_{\varepsilon_2 \to 0} F(c+\varepsilon_2).$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx \,. \qquad (2.26)$$

Якщо обидві границі в правій частині цієї рівності існують, то інтеграл називається збіжним. Якщо хоча б одна з указаних границь не існує, то інтеграл розбігається.

Якщо неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, за винятком деякої точки $c \in [a;b]$, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збігається й обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

У загальному випадку на проміжку $[a;b]$ може бути скінченна кількість особливих точок, поблизу яких функція необмежена, тим часом як у кожному інтервалі цього проміжку, що не містить особливих точок, функція обмежена й інтегрована.

Для функцій, визначених і додатних на проміжках $(a;b]$ або $[a;b)$, слушними є *ознаки збіжності*, аналогічні до ознак збіжності для невласних інтегралів І роду.

<u>Зауваження 2.3</u> Для порівняння можна взяти такі невласні інтеграли ІІ роду:

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx - \begin{cases} \text{збіжний при } p<1 \\ \text{розбіжний при } p \ge 1 \end{cases}. \qquad (2.27)$$

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}dx - \begin{cases} \text{збіжний при } p<1 \\ \text{розбіжний при } p \ge 1 \end{cases}. \qquad (2.28)$$

Приклад 136. Дослідити збіжність інтеграла $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

Розв'язання. Маємо невласний інтеграл II роду. Підінтегральна функція $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ має розрив при $x=0,5$. За формулою (2.24) маємо

$$I=\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{0,5-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_0^{0,5-\varepsilon}\frac{d(2x)}{\sqrt{1-(2x)^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} arc\sin 2x\Big|_0^{0,5-\varepsilon}=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0} arc\sin\big(2(0,5-\varepsilon)\big)-\frac{1}{2}arc\sin 0=$$

$$=\frac{1}{2}arc\sin 1=\frac{\pi}{4}.$$

Відповідь: $I=\dfrac{\pi}{4}$; інтеграл збіжний.

Приклад 137. Дослідити збіжність невласного інтеграла II роду $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\frac{dx}{1+\cos x}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\dfrac{1}{1+\cos x}$ має розрив при $x=\pi$. За формулою (2.24) маємо

$$I=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\frac{dx}{1+\cos x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi-\varepsilon}\frac{dx}{1+\cos x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\pi-\varepsilon}\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\pi-\varepsilon}\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}}=\lim_{\varepsilon\to 0} tg\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0} tg\frac{\pi-\varepsilon}{2}-tg\,0=tg\frac{\pi}{2}=\infty.$$

Відповідь: Інтеграл розбіжний.

Приклад 138. Дослідити збіжність невласного інтеграла II роду $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$ має розрив при $x=0$. За формулою (2.25) маємо

$$I=\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}=\begin{bmatrix} x^2+x=x^2+2\cdot\frac{x}{2}+\frac{1}{4}- \\ -\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|\Bigg|_{0+\varepsilon}^1=$$

$$=\ln\left|1+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|-\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|0+\varepsilon+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(0+\varepsilon+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|=$$

$$=\ln\left|\frac{3}{2}+\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|-\ln\left|\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|=\ln\left|\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right|-\ln\frac{1}{2}=$$

$$=\ln\left(3+2\sqrt{2}\right).$$

Відповідь: $I=\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$; інтеграл збіжний.

Приклад 139. Дослідити збіжність невласного інтеграла II роду $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos 2x}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{1}{1-\cos 2x}$ має розрив при $x=0$. За формулою (2.25) маємо

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-\cos 2x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-\cos 2x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2\sin^2 x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-ctg\,x\right)\Big|_{0+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(-ctg\frac{\pi}{2}+\lim_{\varepsilon\to 0}ctg\left(0+\varepsilon\right)\right)=\frac{1}{2}ctg\,0=\infty .$$

Відповідь: Інтеграл розбіжний.

Приклад 140. Дослідити збіжність невласного інтеграла ІІ роду $\int_{2}^{5}\frac{dx}{\left(x-4\right)^2}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{1}{\left(x-4\right)^2}$ має розрив при $x=4$. За формулою (2.26) маємо

$$I=\int_{2}^{5}\frac{dx}{\left(x-4\right)^2}=\int_{2}^{4}\frac{dx}{\left(x-4\right)^2}+\int_{4}^{5}\frac{dx}{\left(x-4\right)^2}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{2}^{4-\varepsilon_1}\frac{dx}{\left(x-4\right)^2}+$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{4+\varepsilon_2}^{5}\frac{dx}{\left(x-4\right)^2}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(-\frac{1}{x-4}\right)\Bigg|_{2}^{4-\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(-\frac{1}{x-4}\right)\Bigg|_{4+\varepsilon_2}^{5}=$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(-\frac{1}{4-\varepsilon_1-4}\right)+\frac{1}{2-4}-\frac{1}{5-4}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(\frac{1}{4+\varepsilon_2-4}\right)=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right)-$$

$$-\frac{3}{2}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=\infty .$$

Відповідь: Інтеграл розбіжний.

Приклад 141. Дослідити збіжність невласного інтеграла ІІ роду $\int_{2}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{\left(3-x\right)^2}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{1}{\sqrt[3]{\left(3-x\right)^2}}$ має розрив при $x=3$. За формулою (2.26) маємо

$$I=\int_2^4\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}=\int_2^3\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}+\int_3^4\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}=\lim_{\varepsilon_1\to0}\int_2^{3-\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}+$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to0}\int_{3+\varepsilon_2}^4\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}=-\lim_{\varepsilon_1\to0}3(3-x)^{\frac{1}{3}}\Bigg|_2^{3-\varepsilon_1}-\lim_{\varepsilon_2\to0}3(3-x)^{\frac{1}{3}}\Bigg|_{3+\varepsilon_2}^4=$$

$$=-3\lim_{\varepsilon_1\to0}(3-3+\varepsilon_1)+3+3+3\lim_{\varepsilon_2\to0}(3-3-\varepsilon_2)=6.$$

Відповідь: $I=6$; інтеграл збіжний.

Приклад 142. Дослідити збіжність невласного інтеграла II роду $\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Розв'язання. Скористаємося ознакою порівняння. На відрізку $[0;1]$ справедлива нерівність: $0<\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}<\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Невласний інтеграл $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ згідно з формулою (2.27) є збіжним. Тому збіжним є інтеграл $\int_0^1\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Відповідь: Інтеграл збіжний.

Приклад 143. Дослідити збіжність невласного інтеграла II роду $\int_0^1\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^x-1}dx$.

Розв'язання. Скористаємося граничною ознакою порівняння. Для підінтегральної функції $\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^x-1}$ особливою точкою є $x=0$, що належить відрізку $[0;1]$. Для порівняння візьмемо невласний інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, який згідно з формулою (2.27) є збіжним. Знайдемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^x-1}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}\left(e^x-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2}\,\frac{\left(e^x-1\right)}{x}}=1.$$ Тому невласні інтеграли $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^x-1}dx$ і $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ водночас збігаються.

Відповідь: Інтеграл збіжний.

Геометричний зміст. Збіжний невласний інтеграл II роду (2.24) є площею криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y=f(x)$, $f(x)>0$, прямою $x=a$ і вертикальною асимптотою $x=b$ та віссю Ox.

<u>Зауваження 2.4</u> За допомогою заміни змінної $t=(x-a)^{-1}$ невласний інтеграл II роду (2.24) зводиться до невласного інтеграла I роду.

2.5.4 Завдання для самостійної роботи

Дослідити збіжність невласних інтегралів

Завдання	Відповідь
1. $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$	-1; збіжний
2. $\int\limits_0^{0,5} \frac{e^{2+\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$	Розбіжний
3. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{2-x}}$	$2\,arctg\sqrt{2}$; збіжний
4. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+4}}$	Розбіжний
5. $\int\limits_2^3 \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$	$\frac{2}{3}\sqrt[4]{125}$; збіжний
6. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^4-1}$	Розбіжний
7. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-tg\,x}}{\cos^2 x}\,dx$	1; збіжний
8. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} tg\,x\,dx$	Розбіжний
9. $\int\limits_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$	$4{,}5$; збіжний
10 $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x\,dx}{x^2-1}$	Розбіжний
11. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}\,dx$	2; збіжний

Завдання	Відповідь
12. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2+4x}$	Розбіжний
13. $\int\limits_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^3 x}$	$-0{,}5$; збіжний
14. $\int\limits_0^1 x\ln x\,dx$	$-0{,}25$; збіжний
15. $\int\limits_0^1 \frac{2^{1-\frac{2}{\pi}arc\sin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$\frac{\pi}{2\ln 2}$; збіжний
16. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x^3}{\sqrt[4]{x}}dx$	Збіжний
17. $\int\limits_0^3 \frac{2+\sin x}{(x-1)^2}dx$	Розбіжний
18. $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$	Збіжний

2.6 Загальна схема застосування визначеного інтеграла

Визначений інтеграл застосовують для знаходження невідомих величин в області геометрії, механіки та фізики й інших областях. Розглянемо загальний підхід до вирішення прикладних завдань із застосуванням визначеного інтеграла.

Нехай потрібно знайти значення будь-якої геометричної або фізичної величини Q, пов'язаної з відрізком $[a;b]$ змінної x. Будемо вважати цю величину адитивною, тобто такою, що розбиття відрізка $[a;b]$ точкою $c\in(a;b)$ на частини $[a;c]$ і $[c;b]$ тягне за собою розкладання на відповідні частини величини Q, причому значення величини Q, відповідне до всього відрізка

$[a;b]$, дорівнює сумі її значень, що відповідають відрізкам $[a;c]$ і $[c;b]$: $Q_{[a;b]} = Q_{[a;c]} + Q_{[c;b]}$.

Існують дві основні схеми застосування визначеного інтеграла. Перша схема, яку називають методом інтегральних сум, ґрунтується на означенні визначеного інтеграла. Шукана величина спочатку наближено виражається у вигляді інтегральної суми, а потім точно виражається через границю цієї суми, тобто через визначений інтеграл.

Друга схема, яку називають методом диференціала, полягає у тому, що спочатку складають диференціал шуканої величини, а сама ця величина знаходиться інтегруванням отриманого диференціала у заданих межах.

2.6.1 Перша загальна схема застосування визначеного інтеграла

1. Точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i \ldots < x_n = b$ розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n часткових відрізків $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$, …, $[x_{n-1};x_n]$, довжини яких позначимо відповідно $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_{\mathrm{n}}$.

Відповідно до цього, величина Q, що цікавить нас, розіб'ється на n "елементарних доданків" ΔQ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i \ .$$

2. У кожному частковому відрізку $[x_{i-1};x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ виберемо по одній довільній точці ζ_i, $(i = 1, \ldots, n)$.

3. Зобразимо кожний "елементарний доданок" у вигляді добутку деякої функції $f(x)$, яка визначається з умови задачі і задана на проміжку $[a;b]$, обчисленої в довільній точці ζ_i відповідного відрізка $[x_{i-1};x_i]$, на його довжину Δx_i: $\Delta Q_i \approx f(\zeta_i)\Delta x_i$. При знаходженні наближеного значення припустимі деякі спрощення: дугу на малій ділянці можна замінити хордою, що стягує її кінці; змінну швидкість на малій ділянці можна наближено вважати постійною тощо.

Отримаємо наближене значення величини Q у вигляді інтегральної суми:

$$Q \approx \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i \ .$$

Якщо відповідно до умови виходить, що помилка наближеної рівності незначна за умови, що $n \to \infty$, а $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$, то шукана величина Q може бути представлена визначеним інтегралом

$$Q = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \ .$$

Зазначений "метод сум", як бачимо, заснований на поданні інтеграла як суми нескінченно великого числа нескінченно малих доданків.

2.6.2 Друга загальна схема застосування визначеного інтеграла

1. На відрізку $[a;b]$ вибираємо довільне значення x і розглядаємо змінний відрізок $[a;x]$. На цьому відрізку величина Q стає функцією x: $Q(x)$.

2. Надаємо змінній x приріст Δx. Приросту Δx відповідає приріст ΔQ величини Q. Приріст ΔQ може бути наближено представлений через приріст Δx за формулою

$$\Delta Q = F'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

або

$$\Delta Q = f(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x ,$$

де $f(x)$ – функція змінної x, яка визначається з умови задачі і задана на проміжку $[a;b]$ (можливі різні спрощення), $f(x) = F'(x)$

3. Оскільки приріст функції ΔQ наближено дорівнює її диференціалу, а приріст Δx незалежної змінної дорівнює її диференціалу, то

$$dQ = f(x)dx .$$

4. Інтегруємо отриману рівність по змінній x на проміжку $[a;b]$:

$$Q = \int_a^b dQ = \int_a^b f(x)dx .$$

Треба зазначити, перевага цього методу полягає у тому, що необов’язково знати функцію $Q(x)$, а достатньо знати лише її диференціал або приріст.

Метод інтегральних сум зручніше застосовувати при розв’язанні геометричних задач, а метод складання диференціала частіше застосовується при розв’язанні фізичних задач.

2.7 Геометричні застосування визначеного інтеграла

Формулювання визначеного інтеграла дозволяє отримати різні формули для знаходження площ плоских фігур, довжин дуг кривих, площ поверхонь і об'ємів геометричних фігур.

2.7.1 Обчислення площ плоских фігур

2.7.1.1 Обчислення площ плоских фігур у прямокутній системі координат

1. Із геометричного змісту визначеного інтеграла випливає, якщо функція $f(x) \geq 0$ для $\forall x \in [a;b]$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, двома прямими $x = a$ та $x = b$ і віссю Ox, обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x)dx . \qquad (2.29)$$

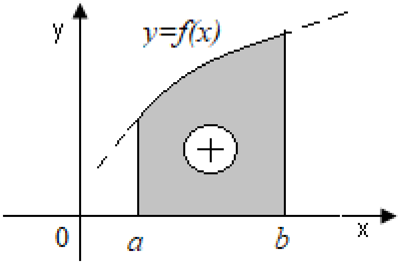


Рисунок 2.3

2. Якщо функція $f(x)\le 0$ для $\forall x\in[a;b]$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y=f(x)$, двома прямими $x=a$ та $x=b$ і віссю Ox, обчислюється за формулою:

$$S=-\int_a^b f(x)dx\,. \tag{2.30}$$

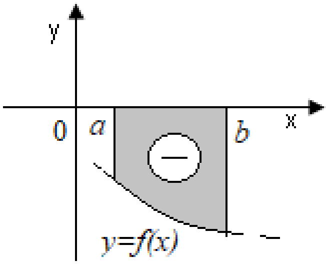


Рисунок 2.4

3. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ змінює знак скінченне число раз, то площа криволінійної трапеції дорівнює алгебраїчній сумі площ криволінійних трапецій, взятих із відповідним знаком.

$$S=\int_a^{c_1} f(x)dx-\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx+\int_{c_2}^{b} f(x)dx\,. \tag{2.31}$$

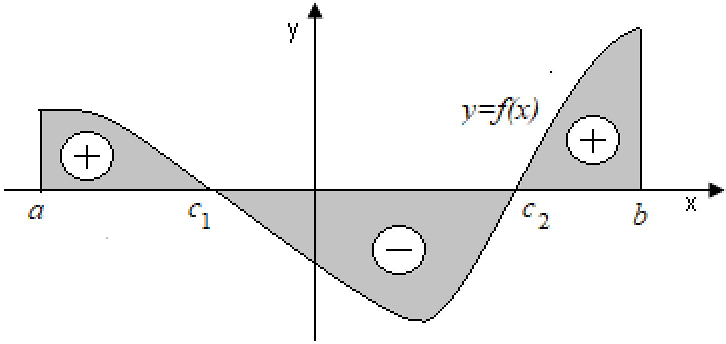


Рисунок 2.5

4. Якщо плоска фігура обмежена кривими: $y_2 = f_2(x)$, $y_1 = f_1(x)$ і прямими $x = a, x = b$ ($a < b$ і $y_2 \geq y_1$), то площа фігури обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \tag{2.32}$$

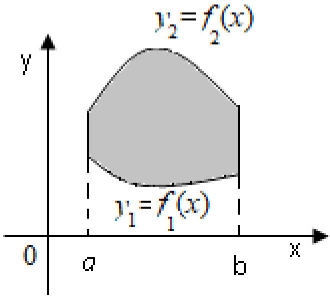


Рисунок 2.6

5. У разі, якщо різниця $f_2(x) - f_1(x)$ не зберігає знак на відрізку $[a;b]$, цей відрізок розбивають на часткові відрізки, на яких функція $f_2(x) - f_1(x)$ зберігає свій знак.

$$S=\int_a^c (f_2(x)-f_1(x))dx+\int_c^b (f_1(x)-f_2(x))dx. \qquad (2.33)$$

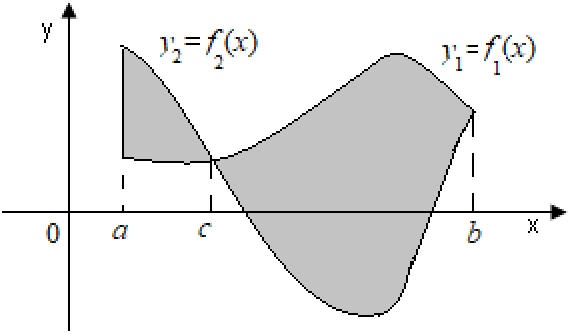


Рисунок 2.7

6. Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою $x=\varphi(y)$ двома прямими $y=c$ та $y=d$ і віссю Oy, площа обчислюється за формулою:

$$S=-\int_c^d \varphi(y)\,dy \text{ або } S=\int_c^d \varphi(y)\,dy. \qquad (2.34)$$

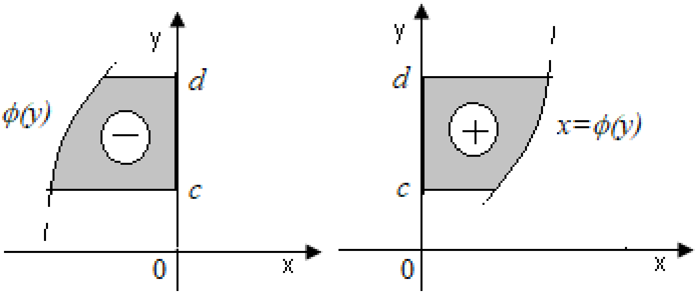


Рисунок 2.8

7. Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою, заданою рівняннями в параметричному вигляді $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, $t\in[t_1;t_2]$, віссю Ox та прямими $x=a$ і $x=b$, де $x(t)$ та $y(t)$ – неперервні

функції, які мають на відрізку $[t_1;t_2]$ неперервні похідні $x'(t)$ та $y'(t)$. Якщо $x(t)$ на відрізку $[t_1;t_2]$ є монотонною, причому $x(t_1)=a$ і $x(t_2)=b$, то площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою:

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt\,. \qquad (2.35)$$

Нехай плоска фігура обмежена замкненою кривою, заданою рівняннями у параметричному вигляді $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ і $t\in[t_1;t_2]$, де функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервні та диференційовані на відрізку $[t_1;t_2]$. Якщо при русі вздовж кривої від t_1 до t_2 фігура залишається зліва, то її площа може бути обчислена за однією із таких формул:

$$S=\int_{t_1}^{t_2} x(t)\cdot y'(t)dt \qquad (2.36)$$

$$S=-\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt \qquad (2.37)$$

$$S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(x(t)\cdot y'(t)-y(t)\cdot x'(t)\right)dt \qquad (2.38)$$

Приклад 144. Знайти площу фігури, обмеженої лініями: $y=\ln x$, $y=0$, $x=e$.

Розв'язання. Лінії $y=\ln x$ та $x=e$ перетинаються у точці $(e;1)$. $y=0$ – це рівняння осі Ox.

Зробимо рисунок фігури.

За формулою (2.29) знайдемо площу заданої фігури

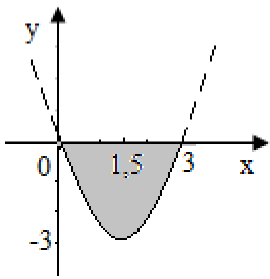
$$S=\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_1^e \ln x dx=\begin{bmatrix} u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx & v=x \end{bmatrix}=x\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e x\frac{dx}{x}=$$

$$=e\ln e-\ln 1-x\Big|_1^e=e-e+1=1\,(\text{кв.од.}).$$

Відповідь: $S=1$ кв.од.

Приклад 145. Знайти площу фігури, обмеженої лініями: $y=x^2-3x$ та віссю Ox.

Розв'язання. Рівняння осі Ox – $y=0$. Знайдемо координати точок перетину параболи $y=x^2-3x$ і прямої $y=0$. Маємо $(0;0)$, $(3;0)$. Вершина параболи в точці $\left(\frac{3}{2};-\frac{9}{4}\right)$. Зробимо рисунок фігури.



За формулою (2.30) знайдемо площу заданої фігури

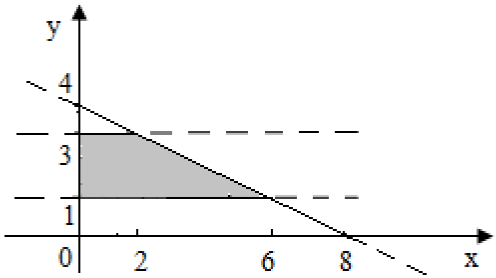
$$S=-\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_0^3\left(x^2-3x\right)dx=-\left(\frac{x^3}{3}-3\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3=-\left(9-\frac{27}{2}\right)=$$

$=\frac{9}{2}=4{,}5$ (кв.од.).

Відповідь: $S=4{,}5$ кв.од.

Приклад 146. Знайти площу фігури, обмеженої лініями: $x+2y-8=0$, $y=1$, $y=3$, $x=0$.

Розв'язання. Знайдемо координати точок перетину ліній. Пряма $x+2y-8=0$ проходить через точки $(0;4)$, $(8;0)$. Прямі $y=1$ і $y=3$ паралельні осі Ox. $x=0$ – це рівняння осі Oy. Зробимо рисунок фігури.



Шукану площу знайдемо за формулою (2.33)

$$S=\int_c^d \phi(y)\,dy=\int_1^3 (8-2y)\,dy=\left(8y-2\cdot\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^3=24-9-8+1=$$

$=8$ (кв.од.).

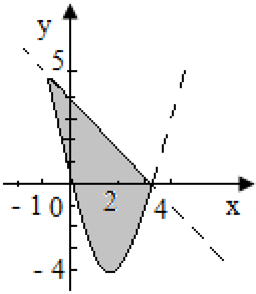
Відповідь: $S=8$ кв.од.

Приклад 147. Знайти площу фігури, обмеженої лініями: $y=x^2-4x$ та $x+y=4$.

Розв'язання. Знайдемо координати точок перетину параболи $y=x^2-4x$ і прямої $x+y=4$, розв'язавши систему цих рівнянь:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ y=x^2-4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4-x \\ x^2-3x-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=5, y_2=0 \\ x_1=-1, x_2=4 \end{cases}.$$

Вершина параболи в точці $(2;-4)$. Зробимо рисунок фігури.



Шукану площу знайдемо за формулою (2.32).

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx = \int_{-1}^{4}\left(-x + 4 - x^2 + 4x\right)dx = \int_{-1}^{4}\left(4 + 3x - x^2\right)dx =$$

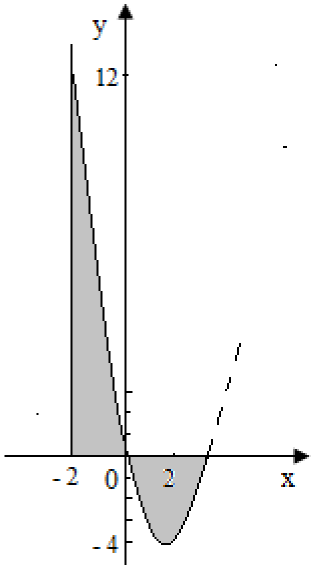
$$= \left(4x + 3\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{4} = 16 + 24 - \frac{64}{3} + 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{125}{6} \text{ (кв.од.).}$$

Відповідь: $S = \dfrac{125}{6}$ кв.од.

Приклад 148. Знайти площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -2$.

Розв'язання. Фігура обмежена взаємно перпендикулярними прямими $x = -2$, $y = 0$ і параболою $y = x^2 - 4x$. Шукана фігура складається із двох областей, одна з яких лежить вище осі Ox, а інша – нижче.

Зробимо рисунок фігури.



Шукану площу знайдемо за формулою (2.31), відповідно до якої площа фігури дорівнює алгебраїчній сумі площ:

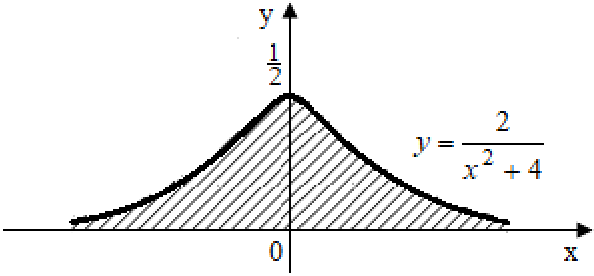
$$S=\int_a^c f(x)dx-\int_c^{\mathrm{b}} f(x)dx=\int_{-2}^{0}(x^2-4x)dx-\int_0^3(x^2-4x)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{0}-\left(\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{3}=\frac{8}{3}+8-9+18=\frac{59}{3}\text{(кв.од.)}.$$

Відповідь: $S=\dfrac{59}{3}$ кв.од.

Приклад 149. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $y=\dfrac{2}{x^2+4}$ (локон Аньєзі) та її асимптотою.

Розв'язання. Задана функція визначена і неперервна на всій числовій осі. Функція є парною, тому її графік симетричний відносно осі Oy. Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2+4}=0$, то вісь Ox є горизонтальною асимптотою кривої. Отже, фігура не замкнута ні зліва, ні справа, вона необмежено простягається вздовж осі Ox. Зробимо рисунок фігури.



Обчислимо її площу за формулою (2.29), враховуючи геометричний зміст невласного інтеграла 1 -го роду:

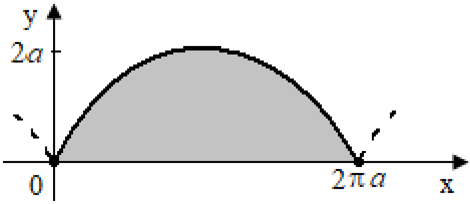
$$S=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{x^2+4}dx=2\int_{0}^{\infty}\frac{2}{x^2+4}dx=2\lim_{B\to\infty}\int_{0}^{B}\frac{2}{x^2+4}dx=$$

$$=4\lim_{B\to\infty}\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}\Bigg|_0^B=2\left(\lim_{B\to\infty}arctg\frac{B}{2}-arctg\,0\right)=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi \text{ (кв.од).}$$

Відповідь: $S=\pi$ кв.од.

Приклад 150. Знайти площу фігури, обмеженої однією аркою циклоїди $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ та віссю Ox.

Розв'язання. Арка циклоїди описується при зміні t від 0 до 2π, оскільки $y(0)=y(2\pi)=0$, а в інших точках $t\in[0;2\pi]$ $y>0$. Межі інтегрування відповідно дорівнюють $x(0)=0$ і $x(2\pi)=2\pi a$. При зміні x на відрізку $[0;2\pi a]$ t змінюється від $t_1=0$ до $t_2=2\pi$. Зробимо рисунок фігури.



Шукана площа фігури обчислюється за формулою (2.35):

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt=\left[\begin{array}{l} x=a(t-\sin t),\ dx=a(1-\cos t)dt \\ y=a(1-\cos t),\ t_1=0,\ t_2=2\pi \end{array}\right]=$$

$$=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+$$

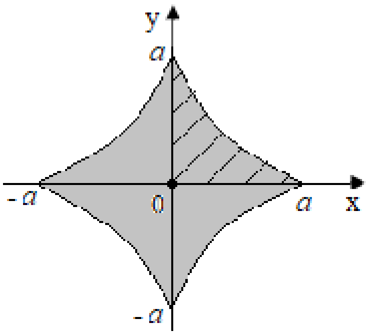
$$+\cos^2 t)dt=\left[\cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right]=a^2\left(t-2\sin t+\frac{1}{2}t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=a^2\left(2\pi-2\sin 2\pi+\frac{1}{2}\cdot 2\pi+\frac{1}{4}\sin 4\pi\right)=3\pi a^2\,(\text{кв.од}).$$

Відповідь: $S=3\pi a^2$ кв.од.

Приклад 151. Знайти площу фігури, обмеженої астроїдою $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$.

Розв'язання. . Зробимо рисунок фігури.



Перший спосіб. Фігура симетрична відносно осей Ox і Oy. Тому можна обчислити чверть шуканої площі S_1. Для S_1: $x \in [0; a]$. Маємо, що при $x = 0$ $a\cos^3 t_1 = 0$, тобто $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$, а при $x = a$ $a\cos^3 t_2 = a$, тобто $t_2 = 0$.

Шукана площа фігури обчислюється за формулою (2.35):

$$S_1 = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot x'(t)dt = \left[\begin{array}{l} x = a\cos^3 t,\ x' = 3a\cos^2 t(-\sin t) \\ y = a\sin^3 t, t_1 = \dfrac{\pi}{2}, t_2 = 0 \end{array}\right] =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)dt = -3a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4 t\cdot\cos^2 t dt =$$

$$= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cdot\cos^2 t dt = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\sin^2 t\cdot\cos^2 t dt =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \sin^2 t = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2t) \\ \sin^2 t\cos^2 t = \dfrac{1}{4}\sin^2 2t \end{array}\right] = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2t\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 2t - \sin^2 2t\cdot\cos 2t\right)dt = \frac{3a^2}{8}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\cdot\cos 2t dt\right) = \frac{3a^2}{8}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 4t)dt - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t d\sin 2t\right) =$$

$$= \frac{3a^2}{8}\left(\frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^3 2t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{3a^2}{8}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3}{32}\pi a^2.$$

$$S = 4S_1 = 4 \cdot \frac{3}{32}\pi a^2 = \frac{3}{8}\pi a^2 \text{ (кв.од).}$$

Другий спосіб. Знайдемо площу заданої фігури за формулою (2.38): $S = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(x(t)\cdot y'(t) - y(t)\cdot x'(t)\right)dt$.

У даному випадку маємо: $x'(t) = -3a\cos^2 t \cdot \sin t$, $y'(t) = 3a\sin^2 t \cdot \cos t$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$.

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t \cdot \cos t + a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t \cdot \sin t\right)dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t \cdot \cos^2 t\,dt = \frac{3}{8}a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt = \frac{3}{16}a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1 - \cos 4t\right)dt =$$

$$= \frac{3}{16}a^2\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3}{8}\pi a^2 \text{ (кв.од).}$$

Відповідь: $S = \frac{3}{8}\pi a^2$ кв.од.

Приклад 152. Знайти площу фігури, обмеженої петлею кривої $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = \left(t^2 - 1\right)(t - 3) \end{cases}$.

Розв'язання. Якщо крива утворює петлю, то для неї існує точка самоперетину, тобто існують такі значення t_1, t_2, $(t_1 \neq t_2)$, за яких виконана умова: $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$. Звідси отримуємо:

$$\begin{cases} t_1^2 - 2t_1 = t_2^2 - 2t_2 \\ \left(t_1^2 - 1\right)(t_1 - 3) = \left(t_2^2 - 1\right)(t_2 - 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1^2 - t_2^2 = 2(t_1 - t_2) \\ \left(t_1^2 - 1\right)(t_1 - 3) = \left(t_2^2 - 1\right)(t_2 - 3) \end{cases}$$

і $\begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 3 \end{cases}$.

Таким чином, точка самоперетину кривих відповідає значенням $t_1=-1$, $t_2=3$. Знайдемо значення функцій $x(t)$ та $y(t)$ у точці $t_1=-1$: $x(-1)=3$, $y(-1)=0$ і при $t_2=3$: $x(3)=3$, $y(3)=0$.

З рівняння $x'(t)=2(t\text{-}1)=0$ знаходимо стаціонарну точку даної функції $x(t)$ – точку $t_3=1$, в якій $x(1)=-1$, $y(1)=0$.

З рівняння $y'(t)=3t^2-6t-1=0$ знаходимо стаціонарні точки функції $y(t)$– точки $t_{4,5}=1\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

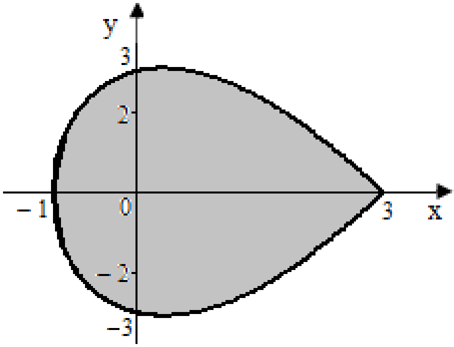
Маємо: $x\left(1\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$, $y\left(1\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\pm\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$.

Таким чином, для заданої кривої значення координати x змінюються у межах від $x_{\min}=-1$ до $x_{\max}=3$, а значення y – від $y_{\min}=-\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$, до $y_{\max}=\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$. Обидва екстремальні значення досягаються при $x=\dfrac{1}{3}$.

Стаціонарні точки t_3, t_4, t_5 ділять проміжок $(-1;3)$ на чотири інтервали. Встановивши знак похідних на кожному з них, знаходимо, що на інтервалі $\left(0;1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ $x(t)$ спадає, а $y(t)$ зростає, на інтервалі $\left(1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3};1\right)$ $x(t)$ продовжує спадати, $y(t)$ тут теж спадає. На інтервалі $\left(1;1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ спостерігаємо зростання функцій $x(t)$ та $y(t)$, на останньому інтервалі $\left(1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3};3\right)$ $x(t)$ зростає, $y(t)$ спадає.

Маємо точки перетину кривої з віссю Ox. Вісь Oy вона перетинає, якщо $x(t)=0$, тобто при $t=0$ та $t=2$. Отримуємо відповідні значення координати y: $y(0)=3$, $y(2)=3$.

Дослідивши функції $x(t)$ та $y(t)$ на монотонність на відрізку $[-1;3]$, знаходимо, що зі зростанням змінної t на цьому відрізку обхід петлі здійснюється проти годинникової стрілки (додатний напрям обходу). Побудуємо її на координатній площині.



Для обчислення шуканої площі використаємо формулу (2.38): $S=\frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(x(t)\cdot y'(t)-y(t)\cdot x'(t)\right)dt$. У даному випадку маємо:

$x'(t)=2(t\text{-}1)$, $y'(t)=3t^2-6t-1$, $t_1=-1$, $t_2=3$.

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{3}\left(\left(t^2-2t\right)\cdot\left(3t^2-6t-1\right)-\left(t^2-1\right)(t-3)\cdot(2t-2)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{3}\left(t^4-4t^3+7t^2-6t-6\right)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5}-t^4+\frac{7}{3}t^3-3t^2-6t\right)\Bigg|_{-1}^{3}=$$

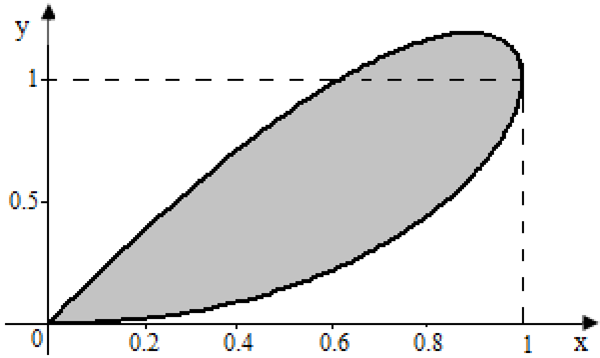
$=\frac{256}{15}$ (кв.од).

Відповідь: $S=\frac{256}{15}$ кв.од.

Приклад 153. Знайти площу фігури, обмеженої петлею кривої $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 2t^2 - t^3 \end{cases}$.

Розв'язання. Якщо крива утворює петлю, то для неї існує точка самоперетину, тобто $x = y$. Маємо $2t - t^2 = 2t^2 - t^3$, $t(2-t) - t^2(2-t) \Rightarrow t(2-t)(1-t) = 0$. Звідки $t_1 = 0$, $t_2 = 2$, $t_3 = 1$.

Знайдемо значення функцій $x(t)$ та $y(t)$ у точці $t_1 = 0$: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. При $t_2 = 2$: $x(2) = 0$, $y(2) = 0$, а при $t_3 = 1$: $x(1) = 1$, $y(1) = 1$. Оскільки $x = y = 0$ при $t_1 = 0$ і $t_2 = 2$, то $0 \le t \le 2$.



Для обчислення шуканої площі використаємо формулу (2.38): $S = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(x(t)\cdot y'(t) - y(t)\cdot x'(t)\right)dt$. У даному випадку маємо:

$x'(t) = 2(1-t)$, $y'(t) = t(4-3t)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$.

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^2\left(\left(2t - t^2\right)\cdot\left(4t - 3t^2\right) - \left(2t^2 - t^3\right)\cdot(2-2t)\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2\left(t^4 - 4t^3 + 4t^2\right)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5} - t^4 + \frac{4}{3}t^3\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{15} = \frac{8}{15} \text{ (кв.од).}$$

Відповідь: $S = \dfrac{8}{15}$ кв.од.

2.7.1.2 Обчислення площ плоских фігур у полярній системі координат

Нехай потрібно обчислити площу фігури, обмеженої лінією, рівняння якої задано в полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\varphi),\ \varphi \in [\alpha;\beta]$. Маємо криволінійний сектор – фігура, обмежена лінією $\rho = \rho(\varphi)$ і променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.

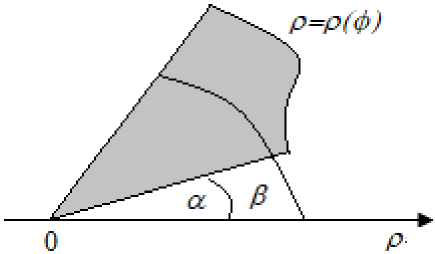


Рисунок 2.9

При цьому криволінійний сектор будемо вважати правильною фігурою, тобто будь-який промінь $\varphi = \phi_1$, $\alpha \le \phi_1 \le \beta$, що виходить із полюса O, перетинає лінію $\rho = \rho(\varphi)$ не більше ніж в одній точці. Припустимо також, що функція $\rho = \rho(\varphi)$ неперервна на відрізку $[\alpha;\beta]$. Площа криволінійного сектора обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi . \qquad (2.39)$$

Якщо фігура обмежена двома відрізками променів $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$, які можуть вироджуватися в одну точку, та двома лініями, заданими рівняннями в полярній системі координат $\rho_1 = \rho_1(\varphi)$ і

$\rho_2 = \rho_2(\varphi)$, причому $\rho_2(\varphi) \geq \rho_1(\varphi)$ для $\forall \varphi \in [\alpha; \beta]$, то площа фігури обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\rho_2^{\,2}(\varphi) - \rho_1^{\,2}(\varphi)\right)d\varphi . \qquad (2.40)$$

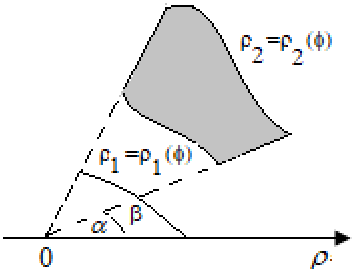
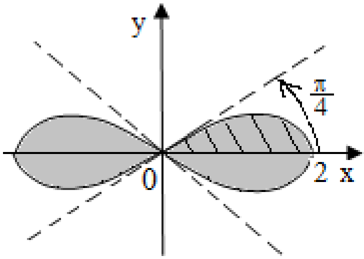


Рисунок 2.10

Приклад 154. Знайти площу фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4\left(x^2 - y^2\right)$.

Розв'язання. Перейдемо до полярної системи координат. Підставимо у рівняння $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$. Рівняння лінії матиме вигляд $\rho^2 = 2\cos 2\varphi$ або $\rho = \sqrt{2\cos 2\varphi}$. Знайдемо область визначення функції з умови $\cos 2\varphi \geq 0$.

Матимемо $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$. Функція має період π, тому її графік симетричний початку координат. Оскільки $\rho(-\varphi) = \rho(\varphi)$, то графік функції також симетричний відносно осі Ox. Зробимо рисунок фігури.



Враховуючи симетрію, можна обчислити чверть шуканої площі S_1 за формулою (2.39).

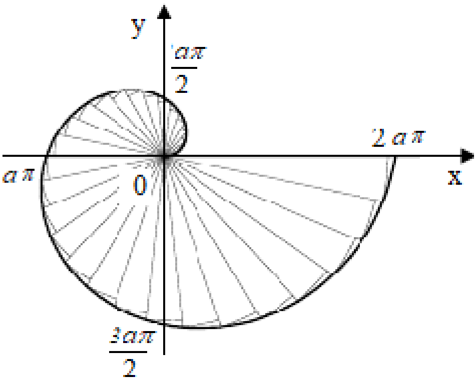
$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$S = 4S_1 = 4\cdot\frac{1}{2} = 2\,(\text{кв.од}).$$

Відповідь: $S = 2$ кв.од.

Приклад 155. Знайти площу фігури, обмеженої першим витком спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури.



Знайдемо межі інтегрування. Перший виток спіралі утворюється при зміні параметра φ від 0 до 2π.

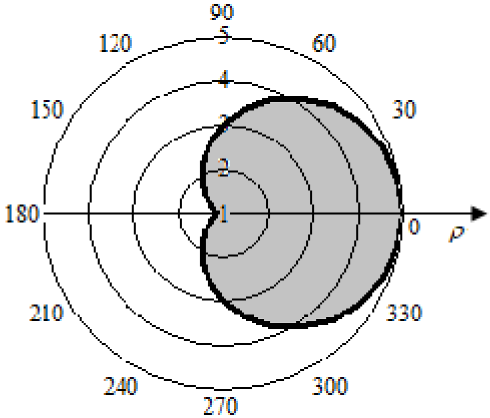
Шукану площу фігури обчислюється за формулою (2.39).

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}a^2\varphi^2d\varphi=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{4\pi^3a^2}{3}\text{(кв.од).}$$

Відповідь: $S=\dfrac{4\pi^3a^2}{3}$ кв.од.

Приклад 156. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $\rho=3+2\cos\varphi$.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури.



Функція $\rho=3+2\cos\varphi$ визначена для всіх $\varphi\in[0;2\pi]$. Площа фігури обчислюється за формулою (2.39).

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\,\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(3+2\cos\varphi)^2\,d\,\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(9+12\cos\varphi+4\cos^2\varphi\right)d\,\varphi=$$

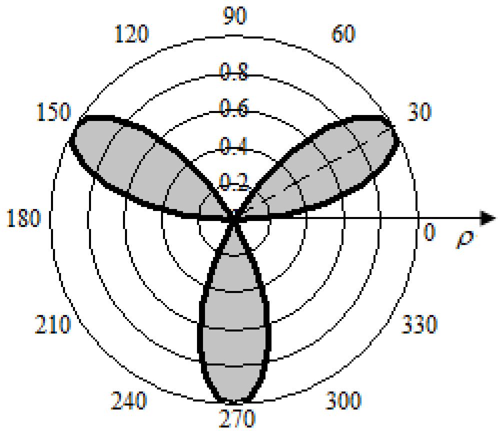
$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(9+12\cos\varphi+2(1+\cos2\varphi))d\,\varphi=\frac{1}{2}(9\varphi+12\sin\varphi+2\varphi+\sin2\varphi)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{2}(11\cdot2\pi)=11\pi\text{ (кв.од).}$$

Відповідь: $S=11\pi$ кв.од.

Приклад 157. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $\rho = \sin 3\varphi$.

Розв'язання. Дана крива (трилисник) утворює три петлі рівної площі, кожна з яких обмежує криволінійний сектор. Для сектора у першій чверті координатної площини $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$. Зробимо рисунок фігури.



Обчислимо площу S_1 криволінійного сектора у першій чверті координатної площини за формулою (2.39) та потроїмо результат.

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 6\varphi) d\varphi = \frac{1}{4}\Big(\varphi -$$

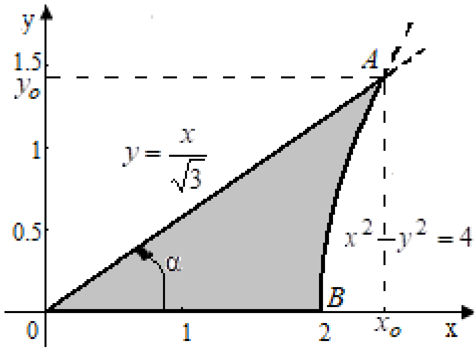
$$- \frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12}.$$

Отже, шукана площа дорівнює: $S = 3 \cdot S_1 = 3 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$ (кв.од).

Відповідь: $S = \frac{\pi}{4}$ кв.од.

Приклад 158. Знайти площу криволінійного трикутника OAB, утвореного гіперболою $x^2 - y^2 = 4$, прямою $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ та віссю Ox.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури.



Перейдемо до полярних координат $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$. Тоді рівняння гіперболи набуває вигляду $\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi = 4$. Звідки $\rho^2\cos 2\varphi = 4$ або $\rho^2 = \frac{4}{\cos 2\varphi}$, φ змінюється від 0 до α, де α – величина кута AOB. Знайдемо цей кут. Пряма $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ має кутовий коефіцієнт $\mathrm{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Відомо, що $tg\alpha = \mathrm{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Звідки $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Площа криволінійного трикутника OAB обчислюється за формулою (2.39).

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{4}{\cos 2\varphi}d\varphi = \ln\left|\frac{1+tg\varphi}{1\text{-}tg\varphi}\right|\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{6}} = \ln\left|\frac{1+tg\frac{\pi}{6}}{1\text{-}tg\frac{\pi}{6}}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right| = \ln\left|2+\sqrt{3}\right| \text{ (кв.од).}$$

Відповідь: $S = \ln\left|2+\sqrt{3}\right|$ кв.од.

2.7.1.3 Завдання для самостійної роботи

Знайти площу фігури, обмежену заданими лініями

Завдання	Відповідь
1. $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 3x,\ y = -3x \end{cases}$	$\frac{13}{3}$ (кв.од.)
2. $\begin{cases} y = x^2 + 2x + 2 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$	$\frac{4}{3}$ (кв.од.)
3. $\begin{cases} y = \sqrt{x+2} \\ y = 0{,}5x + 1 \end{cases}$	$\frac{4}{3}$ (кв.од.)
4. $\begin{cases} y = \sin x,\ y = \cos x \\ y = 0,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$	$2 - \sqrt{2}$ (кв.од.)
5. $\begin{cases} y = \frac{8}{x^2},\ y = x \\ y = 4,\ x = 0 \end{cases}$	$8\sqrt{2} - 6$ (кв.од.)
6. $\begin{cases} y = x - 1 \\ y^2 = x + 1 \end{cases}$	4,5 (кв.од.)
7. $\begin{cases} y = 2^x,\ y = 2x - x^2 \\ x = 0,\ x = 2 \end{cases}$	$\frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}$ (кв.од.)
8. $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x - 1,\ x = 2 \end{cases}$	$\frac{5}{6}$ (кв.од.)

Завдання	Відповідь
9. $\begin{cases} y^2 = 2x+1 \\ y = x-1 \end{cases}$	$\frac{16}{3}$ (кв.од.)
10. $\begin{cases} y = \ln(x+2) \\ y = 2\ln x,\ y = 0 \end{cases}$	$2\ln 4 - 1$ (кв.од.)
11. $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}, y \geq 5$	$\frac{25(\pi+4)}{2}$ (кв.од.)
12. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$	6π (кв.од.)
13. $\begin{cases} x = 12\cos t + 5\sin t \\ y = 5\cos t - 12\sin t \end{cases}, t \in [0; \pi]$	$\frac{169}{2}\pi$ (кв.од.)
14. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = 3\sin 2t \end{cases}$	8 (кв.од.)
15. $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$	6π (кв.од.)
16. $\begin{cases} \rho = 2\sqrt{3}\cos\varphi \\ \rho = 2\sin\varphi \end{cases}$	$\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$ (кв.од.)
17. $\rho = 2\cos 3\varphi$	π (кв.од.)
18. $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}, 0 \leq t < \infty$	1,5 (кв.од.)
19. Криволінійний трикутник ABC, утворений еліпсом $9x^2 + 4y^2 = 36$, дотичною до нього в точці $C\left(1; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ та віссю Ox	$3\sqrt{3} - \pi$ (кв.од.)

Завдання	Відповідь
20. $\begin{cases} x=\dfrac{t}{3}(6-t) \\ y=\dfrac{t^2}{8}(6-t) \end{cases}$	5,4 (кв.од.)
21. $\left(x^2+y^2\right)^3=4x^2y^2$	$\dfrac{\pi}{2}$ (кв.од.)
22. $\rho^2+\varphi^2=1$	$\dfrac{2}{3}$ (кв.од.)
23. $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t \\ y=2\sin t-\sin 2t \end{cases}$	6π (кв.од.)
24. $\begin{cases} x=t^2-1 \\ y=t^3-t \end{cases}$	$\dfrac{8}{15}$ (кв.од.)
25. Спільна частина $\begin{cases} \rho=\sqrt{3}\sin\varphi \\ \rho=1+\cos\varphi \end{cases}$	$\dfrac{3}{4}\left(\pi-\sqrt{3}\right)$(кв.од.)
26. Спільна частина $\begin{cases} \rho=\sin\phi \\ \rho=\cos\phi+\sin\phi \end{cases}$	$\dfrac{\pi-1}{4}$ (кв.од.)

2.7.2 Обчислення довжини дуги гладкої кривої

<u>Означення 2.5</u> Крива називається *гладкою*, якщо вона неперервна та в кожній точці має дотичну, що неперервно змінює своє положення від точки до точки.

Очевидно, що крива буде гладкою, якщо рівняння її може бути записане у вигляді

$$y=f(x)\ (a<x<b),$$

де функція $f(x)$ неперервна та має неперервну похідну $f'(x)$ і на відрізку $[a;b]$.

2.7.2.1 Обчислення довжини дуги плоскої кривої у прямокутній системі координат

1. Нехай рівняння кривої L задано неперервною функцією $y = f(x)$, диференційованою на відрізку $[a;b]$, яка має на ньому неперервну похідну $f'(x)$.

<u>Означення 2.6</u> Довжиною дуги кривої L називається границя, до якої прямує довжина вписаної в неї ламаної, коли число ланок ламаної необмежено зростає, а довжина найбільшої з її ланок прямує до нуля, тобто

$L = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta l_i$, де $\lambda = \max \Delta l_i$, $1 \le i \le n$ і $\Delta l_i = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\ \Delta x_i$.

Сума є інтегральною сумою. Довжина кривої L може бути знайдена, як границя інтегральної суми:

$$L = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\ \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx .$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \tag{2.41}$$

Диференціалом дуги у декартових координатах називається величина

$$dL = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx . \tag{2.42}$$

2. Нехай рівняння кривої L задано параметрично $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$. Функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервні із неперервними похідними $x'(t)$ та $y'(t)$, причому $x'(t) \ne 0$ для $\forall t \in [t_1, t_2]$.

Виконавши заміну змінних: $dx = x'(t)dt$ і $f'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, матимемо $L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} \, x'(t)dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt$.

$$L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt. \qquad (2.43)$$

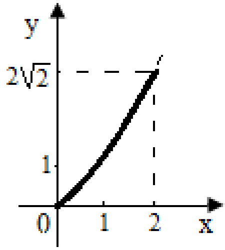
<u>Зауваження 2.5</u> Формула $L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ слушна тільки для кривих, що задаються диференційованими функціями. Зокрема, якщо у кривої є точки з вертикальними дотичними (там $y' = \infty$), то для обчислення її довжини можна або використовувати отриману формулу, розглядаючи відповідний інтеграл як невласний, або записавши рівняння кривої у параметричній формі, застосувати формулу $L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt$, для якої вимога існування похідної $y'(t)$ не обов'язкова.

3. Якщо просторова крива L задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ $t \in [t_1, t_2]$, то при вказаних раніше умовах довжина кривої знаходиться за формулою:

$$L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \, dt \qquad (2.44)$$

Приклад 159. Знайти довжину напівкубічної параболи $y^2 = x^3$ між точками $(0;0)$ і $(2;2\sqrt{2})$.

Розв'язання. Побудуємо задану криву між точками $(0;0)$ і $\left(2;2\sqrt{2}\right)$.



Функція $y^2 = x^3$ визначена для всіх $x \geq 0$. Знайдемо $y = \sqrt{x^3}$. Тоді $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. За формулою (2.41) знайдемо довжину дуги кривої

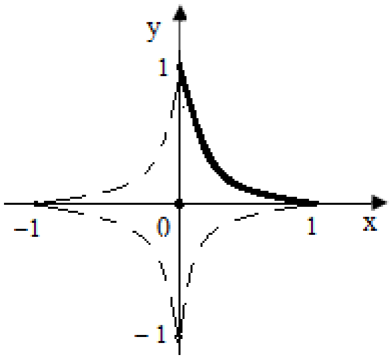
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx = \left[\begin{array}{c} a = 0,\ b = 2,\ \left(y'\right)^2 = \frac{9}{4}x \\ \sqrt{1 + \left(y'\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} = \frac{\sqrt{4 + 9x}}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^2 \frac{\sqrt{4 + 9x}}{2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \left.\frac{(4 + 9x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^2 = \frac{1}{27}\left(22^{\frac{3}{2}} - 8\right) = \frac{\sqrt{22^3} - 8}{27}.$$

Відповідь: $L = \dfrac{\sqrt{22^3} - 8}{27}$ лін.од.

Приклад 160. Знайти довжину кривої, задану рівнянням $\begin{cases} x = \cos^5 t \\ y = \sin^5 t \end{cases}$, $\quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Побудуємо задану криву і знайдемо довжину її частини, що розташована в першій чверті ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$).



Маємо $x' = -5\cos^4 t \sin t,\ \ y' = 5\sin^4 t \cos t, t_1 = 0,\ \ t_2 = \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{\left(-5\cos^4 t \sin t\right)^2 + \left(5\sin^4 t \cos t\right)^2} =$$

$$= \sqrt{25\cos^8 t \sin^2 t + 25\sin^8 t \cos^2 t} =$$

$$= \sqrt{25\cos^2 t \sin^2 t\left(\cos^6 t + \sin^6 t\right)} = 5\sin t \cos t \sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t} =$$

$$= \frac{5}{2}\sin 2t\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 2t} = \frac{5}{4}\sin 2t\sqrt{1 + 3\cos^2 2t}\ .$$

За формулою (2.43) знайдемо довжину цієї частини кривої.

$$L = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\ dt = \frac{5}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\sqrt{1 + 3\cos^2 2t}\ dt =$$

$$= -\frac{5}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 + 3\cos^2 2t}\ d\left(\cos 2t\right) = -\frac{5}{8\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t \cdot \sqrt{1 + 3\cos^2 2t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{3}\cos 2t + \sqrt{1 + 3\cos^2 2t}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{8}\left(1 + \frac{\ln\left|\sqrt{3} + 2\right|}{2\sqrt{3}}\right) \text{ (лін.од.).}$$

Відповідь: $L = \frac{5}{8}\left(1 + \frac{\ln\left|\sqrt{3} + 2\right|}{2\sqrt{3}}\right)$ лін.од.

Приклад 161. Знайти довжину кривої, задану рівнянням
$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \\ z = 4t \end{cases}, \ 0 \le t \le 1.$$

Розв'язання. Маємо $x' = -3\sin t,\ y' = 3\cos t,\ z' = 4$. Тоді
$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16} = \sqrt{9+16} = 5$,
$t_1 = 0,\ t_2 = 1$.

За формулою (2.44) знайдемо довжину дуги кривої
$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt = \int_0^1 5\, dt = 5t\Big|_0^1 = 5 \text{ (лін.од.)}.$$

Цікаво, що $L = 5t\Big|_0^{t_2}, t_2 > 0$, тому що при розгортанні циліндричної поверхні гвинтова лінія на ній перетворюється у нахилену пряму.
Відповідь: $L = 5$ лін.од.

2.7.2.2 Обчислення довжини дуги плоскої кривої у полярній системі координат

Розглянемо випадок, коли крива задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ у полярних координатах, при цьому функція $\rho(\varphi)$ та її похідна $\rho'(\varphi)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$.

Отримаємо формулу для обчислення довжини дуги кривої, скориставшись формулою (2.42). Дійсно, приймемо φ за параметр. Тоді отримаємо такий частинний випадок параметричних рівнянь кривої: $\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$.

Маємо
$$x'_\varphi = \rho'_\varphi \cos\varphi - \rho\sin\varphi \ \text{ і } \ y'_\varphi = \rho'_\varphi \sin\varphi + \rho\cos\varphi,$$
$$(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 = \rho^2 + (\rho'_\varphi)^2.$$
Остаточно маємо

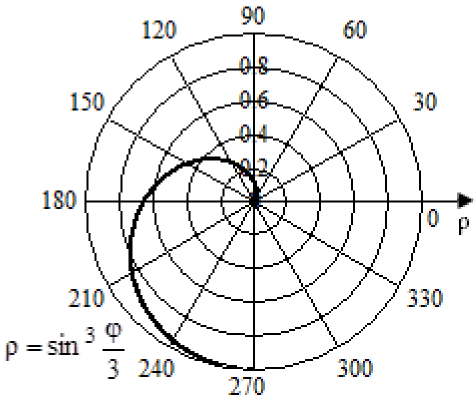
$$L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi . \qquad (2.45)$$

Якщо крива в полярній системі координат задана рівнянням $\varphi = \varphi(\rho)$ і $\rho_1 \le \rho \le \rho_2$, то довжину кривої обчислюємо за формулою

$$L = \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{1 + (\rho \cdot \varphi'(\rho))^2}\, d\rho \qquad (2.46)$$

Приклад 162. Знайти довжину кривої, задану рівнянням $\rho = \sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$, якщо . $0 \le \varphi \le \dfrac{3}{2}\pi$

Розв'язання. Побудуємо задану криву.



Знайдемо довжину її частини, що розташована в першій, другій і третій чверті ($0 \le \varphi \le \dfrac{3}{2}\pi$). Довжину заданої частини кривої знаходимо за формулою (2.45). Маємо $\rho' = 3\sin^2 \dfrac{\varphi}{3} \cos\dfrac{\varphi}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \sin^2 \dfrac{\varphi}{3} \cos\dfrac{\varphi}{3}$, $\alpha = 0$, $\beta = \dfrac{3}{2}\pi$.

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^{2}(\varphi)+(\rho'(\varphi))^{2}}\,d\varphi=\int_{0}^{\frac{3}{2}\pi}\sqrt{\sin^{6}\frac{\varphi}{3}+\sin^{4}\frac{\varphi}{3}\cos^{2}\frac{\varphi}{3}}d\varphi=$$

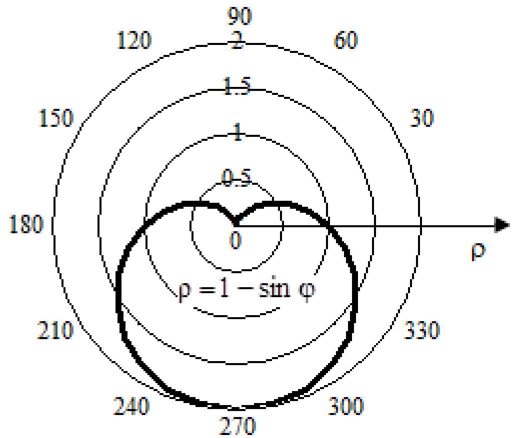
$$=\int_{0}^{\frac{3}{2}\pi}\sin^{2}\frac{\varphi}{3}d\ \ =\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{3}{2}\pi}\left(1-\cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi=\frac{1}{2}\left(\varphi-\frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{3}{2}\pi}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\pi-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2}\sin\pi\right)=\frac{3}{4}\pi\ (\text{лін.од.}).$$

Відповідь: $L=\dfrac{3}{4}\pi$ лін.од.

Приклад 163. Знайти довжину кардіоїди, задану рівнянням $\rho=1-\sin\varphi$.

Розв'язання. Побудуємо задану криву.



Вона симетрична відносно променя $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. Враховуючи симетрію, можна обчислити половину шуканої довжини L_1, укладеної між променями $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$ і $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, за формулою (2.45) та подвоїти результат.

Маємо $\rho' = -\cos\varphi$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$.

$$L_1 = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-\sin\varphi)^2 + \cos^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 2\sin\varphi + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi}\, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - 2\sin\varphi}\, d\varphi =$$

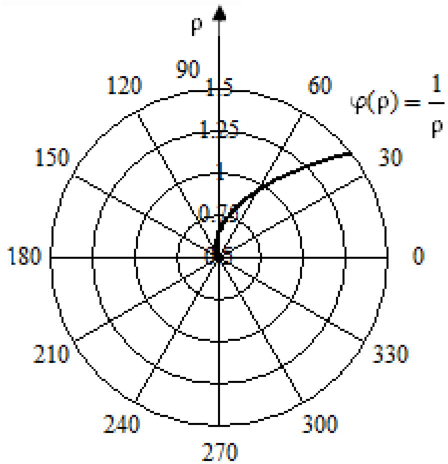
$$= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}\, d\varphi = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}\, d\varphi =$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = 4\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\left(\cos 0 - \cos\frac{\pi}{2}\right) = 4\,.$$

Отже, шукана довжина дорівнює: $L = 2 \cdot L_1 = 2 \cdot 4 = 8$ (лін.од.).
Відповідь: $L = 8$ лін.од.

Приклад 164. Знайти довжину кривої, задану рівнянням $\varphi = \frac{1}{\rho}$, якщо $\frac{1}{2} \le \rho \le \frac{3}{2}$

Розв'язання. Побудуємо задану криву і знайдемо довжину її частини, згідно з умовою $\frac{1}{2} \le \rho \le \frac{3}{2}$.



Довжину заданої частини кривої знаходимо за формулою (2.46). Маємо $\varphi' = -\dfrac{1}{\rho^2}$, $\rho_1 = \dfrac{1}{2}$, $\rho_2 = \dfrac{3}{2}$.

$$L = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{1 + \left(\rho \cdot \varphi'(\rho)\right)^2}\, d\rho = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \left(-\rho \cdot \frac{1}{\rho^2}\right)^2}\, d\rho = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\rho^2}}\, d\rho =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{1+\rho^2}}{\rho}\, d\rho = \left[\begin{array}{c} \rho = tg\, t,\, d\rho = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \\ t_1 = arctg\dfrac{1}{2},\, t_2 = arctg\dfrac{3}{2} \end{array}\right] = \int_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{1 + tg^2 t}}{tg\, t} \frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \int_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg\frac{3}{2}} \frac{\frac{1}{\cos t}}{tg\, t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg\frac{3}{2}} \frac{1}{\sin t \cos^2 t}\, dt = \left[1 = \sin^2 t + \cos^2 t\right] =$$

$$= \int_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg\frac{3}{2}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt + \int_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg\frac{3}{2}} \frac{1}{\sin t}\, dt = \cos^{-1} t \Big|_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg\frac{3}{2}} + \ln\left| tg\frac{t}{2} \right| \Big|_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg\frac{3}{2}} =$$

$$=\cos^{-1} t\Big|_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg\frac{3}{2}}+\ln\left|tg\frac{t}{2}\right|_{arctg\frac{1}{2}}^{arctg\frac{3}{2}}=\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}},\ tg(arctg\,\alpha)=\alpha\\ tg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{tg\alpha}{1+\sqrt{1+tg^2\alpha}},\ \alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{\cos\left(arctg\frac{3}{2}\right)}-\frac{1}{\cos\left(arctg\frac{1}{2}\right)}+\ln\left|tg\left(\frac{arctg\frac{3}{2}}{2}\right)\right|-\ln\left|tg\left(\frac{arctg\frac{1}{2}}{2}\right)\right|=$$

$$=\sqrt{1+tg^2\left(arctg\frac{3}{2}\right)}-\sqrt{1+tg^2\left(arctg\frac{1}{2}\right)}+\ln\left|\frac{tg\left(arctg\frac{3}{2}\right)}{1+\sqrt{1+tg^2\left(arctg\frac{3}{2}\right)}}\right|-$$

$$-\ln\left|\frac{tg\left(arctg\frac{1}{2}\right)}{1+\sqrt{1+tg^2\left(arctg\frac{1}{2}\right)}}\right|=\sqrt{1+\frac{9}{4}}-\sqrt{1+\frac{1}{4}}+\ln\left|\frac{\frac{3}{2}}{1+\sqrt{1+\frac{9}{4}}}\right|-$$

$$-\ln\left|\frac{\frac{1}{2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{4}}}\right|=\frac{\sqrt{13}}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}+\ln\left|\frac{3}{2+\sqrt{13}}\right|-\ln\left|\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right|=\frac{\sqrt{13}-\sqrt{5}}{2}+$$

$$+\ln\left|\frac{3\left(2+\sqrt{5}\right)}{2+\sqrt{13}}\right|\text{ (лін.од.).}$$

Відповідь: $L=\dfrac{\sqrt{13}-\sqrt{5}}{2}+\ln\left|\dfrac{3\left(2+\sqrt{5}\right)}{2+\sqrt{13}}\right|$ лін.од.

2.7.2.3 Завдання для самостійної роботи

Знайти довжину кривої, задану рівнянням

Завдання	Відповідь
1. $y=\ln\sin x, \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2}\ln 3$ (лін.од.)
2. $y=ch\,x, 0\le x\le 1$	$sh1$ (лін.од.)
3. $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y, 1\le y\le e$	$0{,}25\left(e^2+1\right)$(лін.од.)
4. $\begin{cases} x=t\sin t+\cos t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}, 0\le x\le\pi$	$0{,}5\pi^2$ (лін.од.)
5. $\begin{cases} x=2\left(t-\sin t\right) \\ y=2\left(1-\cos t\right) \end{cases}, \ 0\le x\le 2\pi$	16 (лін.од.)
6. $\rho=\frac{1}{\varphi}$, $0{,}5\le\varphi\le 2$	$\frac{\sqrt{5}}{2}+\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (лін.од.)
7. $\varphi=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right), \ 1\le\rho\le 3$	$2+\frac{1}{2}\ln 3$(лін.од.)
8. $\rho=3\left(1-\cos\varphi\right)$	24 (лін.од.)
9. $\begin{cases} x^2=3y \\ 2xy=9z \end{cases}, \ 0\le x\le 3$	5 (лін.од.)
10. $\begin{cases} x=3t \\ y=3t^2 \\ z=2t^3 \end{cases}, 0\le t\le 2$	22 (лін.од.)
11. $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$	12 (лін.од.)
12. $y=\frac{x^2}{2}-1$, відсіченою Ox	$\sqrt{6}+\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$(лін.од.)

Завдання	Відповідь
13 $y=\ln(2\cos x),\ -\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{3}$	$2\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$(лін.од.)
14. $\begin{cases} x=\sqrt{3}\,t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$	4 (лін.од.)
15. $\rho=3\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$	16 (лін.од.)
16. $\varphi=\sqrt{\rho}$, $0\le\rho\le5$	$6\dfrac{1}{3}$(лін.од.)

2.7.3 Обчислення об'єму тіла

2.7.3.1 Обчислення об'єму тіла за відомими площами паралельних перерізів

Розглянемо задачу про визначення об'єму V тіла, в разі, коли відомі площі перетинів цього тіла площинами, перпендикулярними деякій осі, наприклад, осі Ox: $S=S(x)$, $x\in[a;b]$.

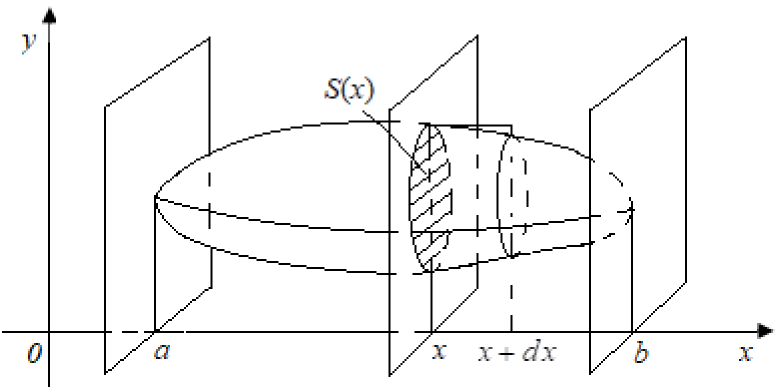


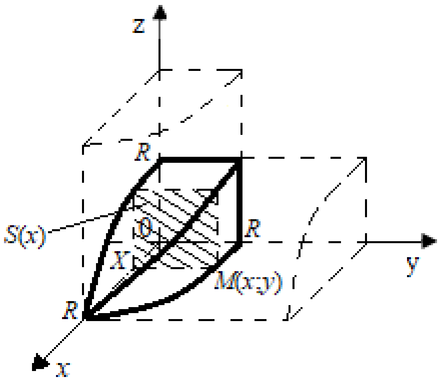
Рисунок 2.11

Через довільну точку $x \in [a;b]$ проведемо площину P, перпендикулярну осі Ox. Позначимо через $S(x)$ площу перерізу тіла цією площиною, $S(x)$ будемо вважати відомою і неперервною на $[a;b]$ функцією. Через $V(x)$ позначимо об'єм частини тіла, що лежить лівіше площини P. Визначимо диференціал dV функції $V(x)$. Він являє собою «елементарний шар» тіла, що міститься між паралельними площинами, які перетинають вісь Ox в точках x і $x+dx$, який приблизно може бути прийнятий за циліндр з основою $S(x)$ і висотою dx. Тому диференціал об'єму $dV = S(x)\cdot dx$. Шукану величину V знаходимо шляхом інтегрування dV в межах від a до b:

$$V = \int_a^b S(x)dx \qquad (2.47)$$

Приклад 165. Знайти об'єм тіла, обмеженого двома циліндрами: $x^2 + y^2 = R^2$ і $x^2 + z^2 = R^2$

Розв'язання. Побудуємо восьму частину тіла, розташовану в першому октанті.



У поперечному перерізі (перпендикулярному осі Ox) тіла маємо квадрат. Його сторона a дорівнює ординаті точки

$M(x;y)$, що лежить на кола $x^2+y^2=R^2$, тобто $a=y=\sqrt{R^2-x^2}$. Отже, площа перерізу дорівнює

$$S(x)=\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2=R^2-x^2,\ 0\le x\le R.$$

За формулою (2.47) знайдемо об'єм восьмої частини тіла

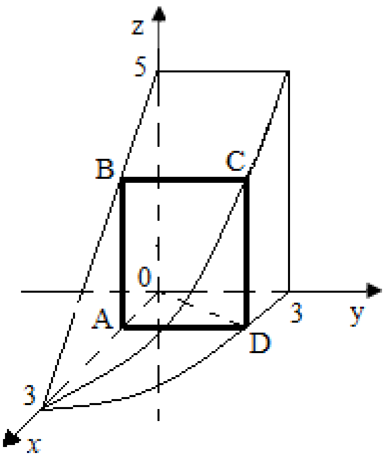
$$\frac{1}{8}V=\int_0^R\left(R^2-x^2\right)dx=\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R=R^3-\frac{R^3}{3}=\frac{2}{3}R^3.$$

Тоді $V=\frac{16}{3}R^3$ (куб.од.).

Відповідь: $V=\frac{16}{3}R^3$ куб.од.

Приклад 166. Знайти об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=9$ і площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ \frac{x}{3}+\frac{z}{5}=1$.

Розв'язання. Побудуємо задане тіло.



Зауважимо, що будь-який переріз тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, є прямокутник $ABCD$. Знайдемо площу S_{ABCD}. Нехай $OA=x$, де x – відстань від точки O до точки перетину перерізу з віссю Ox. Тоді з пропорції $\frac{AB}{5}=\frac{3-x}{3}$ знайдемо $AB=5-\frac{5}{3}x$. З трикутника OAD матимемо $AD=\sqrt{9-x^2}$. Тоді $S_{ABCD}=S(x)=AB\cdot AD=\left(5-\frac{5}{3}x\right)\sqrt{9-x^2}$.

За формулою (2.47) знайдемо шуканий об'єм тіла

$$V=\int_a^b S(x)dx=\int_0^3\left(5-\frac{5}{3}x\right)\sqrt{9-x^2}\,dx=\begin{bmatrix} x=3\sin t,\ dx=3\cos t\,dt \\ x=0\Rightarrow t=0,\ x=3\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(5-\frac{5}{3}\cdot 3\sin t\right)\sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t\,dt=45\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin t)\cdot\cos^2 t\,dt=$$

$$=45\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\cos^2 t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\cos^2 t\cdot\sin t\,dt\right)=\frac{45}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot(1+\cos 2t)dt+$$

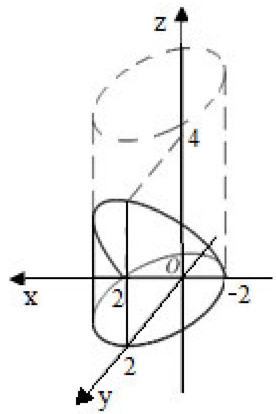
$$+45\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\cos^2 t\,d\cos t=\frac{45}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+45\cdot\frac{\cos^3 t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{45}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-15=$$

$$=\frac{15}{4}(3\pi-4)(\text{куб.од.}).$$

Відповідь: $V=\frac{15}{4}(3\pi-4)$ куб.од.

Приклад 167. Знайти об'єм тіла, що лежить над площиною $z=0$ і обмежене циліндром $x^2+y^2=4$ та площиною $z=2y$.

Розв'язання. Побудуємо задане тіло.



Розглядуване тіло проектується на вісь Ox у відрізок $[-2;2]$, а поперечний переріз при $x \in [-2;2]$ є прямокутний трикутник з катетами y і $z = 2y$. З рівняння циліндра матимемо $y = \sqrt{4 - x^2}$. Тому площа перерізу дорівнює $S(x) = \frac{1}{2} y \cdot 2y = y^2 = 4 - x^2$. За формулою (2.47) знайдемо шуканий об'єм тіла

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = \frac{32}{3}.$$

Відповідь: $V = \frac{32}{3}$ куб.од.

2.7.3.2 Обчислення об'єму тіла обертання

Нехай тіло утворено обертанням криволінійної трапеції навколо деякої осі. Знайдемо об'єм V цього тіла.

Розглянемо криволінійну трапецію, яка обмежена графіком неперервної функції $y = f(x)$, відрізком $[a;b]$, прямими $x = a$ і $x = b$ та обертається навколо осі Ox.

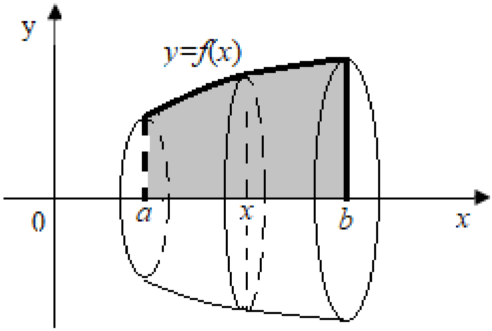


Рисунок 2.12

Отримана від обертання криволінійної трапеції фігура називається *тілом обертання*. Перетин цього тіла площиною, перпендикулярній осі Ox (проведеної через довільну точку осі Ox), є коло з радіусом $y = f(x)$. Отже, площа цього перерізу визначається за формулою $S(x) = \pi y^2$. Застосовуючи формулу (2.46) об'єму тіла по площі паралельних перетинів, отримуємо

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 \, dx \tag{2.48}$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена графіками неперервних функцій $y_2 = f_2(x)$, $y_1 = f_1(x)$, прямими $x = a$ і $x = b$ $(a < b$ і $y_2 \geq y_1)$ та обертається навколо осі Ox, то об'єм утвореного тіла обчислюється за формулою

$$V_x = \pi \int_a^b \left({y_2}^2 - y_1^2 \right) dx \tag{2.49}$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена графіком неперервної функції $y = f(x)$, відрізком $[a;b]$, прямими $x = a$ і $x = b$ та обертається навколо осі Oy, то об'єм утвореного тіла обчислюється за формулою

$$V_y = 2\pi\int_a^b xy\,dx \qquad (2.50)$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена графіком неперервної функції $x = g(y)$, відрізком $[c;d]$, прямими $y = c$ і $y = d$ та обертається навколо осі Oy, то об'єм утвореного тіла обчислюється за формулою

$$V_y = \pi\int_c^d x^2\,dy \qquad (2.51)$$

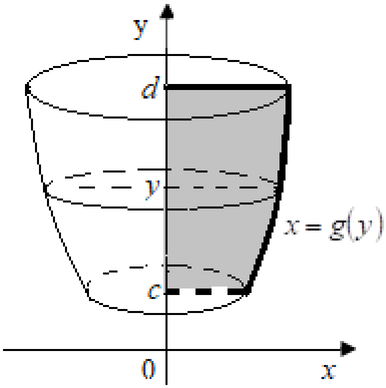


Рисунок 2.13

Нехай тіло утворене обертанням фігури, обмеженої кривою, заданою параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$. Функції $x(t)$ та $y(t)$ є диференційованими, а їх похідні $x'(t)$ та $y'(t)$ – неперервні на відрізку $[t_1, t_2]$, до того ж функція $x(t)$ є зростаючою, з чого виходить, що функція $x'(t)$ на відрізку $[t_1, t_2]$ є додатною функцією, та функція $y(t)$ є додатною на відрізку $[t_1, t_2]$. Тоді об'єм цього тіла обчислюється за формулою

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot x'(t) dt \tag{2.52}$$

Якщо функція $x(t)$ є спадною, з чого виходить, що $x'(t)$ є від'ємною на відрізку $[t_1, t_2]$, то слід об'єм цього тіла обчислювати за формулою

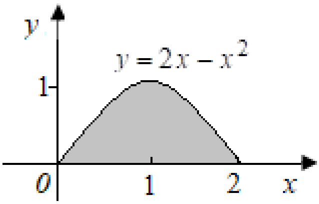
$$V_x = -\pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot x'(t) dt \tag{2.53}$$

Якщо тіло утворене обертанням навколо полярної осі ρ криволінійного сектора, обмеженого кривою $\rho = \rho(\varphi)$ і променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($0 \le \alpha < \beta \le \pi$), то об'єм утвореного тіла обчислюється за формулою

$$V_\rho = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta \rho^3 \sin\varphi \, d\varphi \tag{2.54}$$

Приклад 168. Знайти об'єм тіл, утворених оберненням навколо осей Ox і Oy криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = 2x - x^2$ і $y = 0$.

Розв'язання. Лінія $y = 0$ – це рівняння осі Ox. Лінія $y = 2x - x^2$ – парабола з вершиною в точці $(1;1)$, а гілки параболи перетинають ось Ox у точках $x = 0$ і $x = 2$. Зробимо рисунок криволінійної трапеції.



Для знаходження об’єму тіла, що обертається навколо осі Ox криволінійної трапеції, застосуємо формулу (2.48).

$$V_x = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_0^2 \left(2x - x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^2 \left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right)dx = \pi\left(4\cdot\frac{x^3}{3} -\right.$$

$$\left. - 4\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \pi\left(4\cdot\frac{8}{3} - 16 + \frac{32}{5}\right) = \frac{16}{15}\pi \text{ (куб.од.).}$$

Для знаходження об’єму тіла обертання навколо осі Oy виразимо змінну x з рівняння кривої: $x = 1 \pm \sqrt{1-y}$, $0 \le x \le 1$ (ліва і права вітки параболи). Тоді об’єм тіла обертання навколо осі Oy може бути знайдений як різниця об'ємів тіл, отриманих обертанням віток параболи навколо осі Oy: $V_y = V_1 - V_2$. За формулою (2.50) матимемо

$$V_1 = \pi\int_c^d {x_1}^2\,dy = \pi\int_0^1 \left(1 + \sqrt{1-y}\right)^2 dy = \pi\int_0^1 \left(2 + 2\sqrt{1-y} - y\right)dy =$$

$$= \pi\left(2y - 2\cdot\frac{(1-y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(2 + \frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{17}{6}\pi \text{ (куб.од.),}$$

$$V_2 = \pi\int_c^d {x_2}^2\,dy = \pi\int_0^1 \left(1 - \sqrt{1-y}\right)^2 dy = \pi\int_0^1 \left(2 - 2\sqrt{1-y} - y\right)dy =$$

$$= \pi\left(2y + 2\cdot\frac{(1-y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(2 - \frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\pi \text{ (куб.од.).}$$

Тоді $V_y = V_1 - V_2 = \frac{17}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{8}{3}\pi$ (куб.од.).

Однак, у даному прикладі об'єм тіла обертання навколо осі Oy зручно знаходити за формулою (2.49)

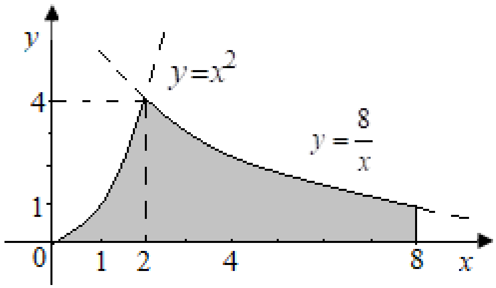
$$V_y = 2\pi\int_a^b xy\,dx = 2\pi\int_0^2 x\left(2x - x^2\right)dx = 2\pi\int_0^2 \left(2x^2 - x^3\right)dx =$$

$$= 2\pi\left(2\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 2\pi\left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4}\right) = 2\pi\cdot\frac{16}{12} = \frac{8}{3}\pi \text{ (куб.од.).}$$

Відповідь: $V_x = \dfrac{16}{15}\pi$ куб.од., $V_y = \dfrac{8}{3}\pi$ куб.од.

Приклад 169. Знайти об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ox плоскої фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $xy = 8$, $y = 0$, $x = 8$.

Розв'язання. Побудуємо задану в умові плоску фігуру.



Ця криволінійна трапеція складається з двох частин. Перша частина обмежена зверху параболою $y = x^2$, укладеною між прямими $x = 0$ і $x = 2$, друга частина – гіперболою $y = \dfrac{8}{x}$, відтятою зліва і справа прямими $x = 2$ і $x = 8$.

Будемо обертати фігуру навколо осі Ox. Отримане тіло обертання буде мати об'єм, що складається з двох складових: $V_x = V_1 + V_2$. Для знаходження об'ємів V_1 і V_2 тіла обертання застосуємо формулу (2.48).

При обчисленні V_1 візьмемо $y = x^2$, де $x \in [0;2]$. Тоді

$$V_1 = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_0^2 x^4\,dx = \pi \cdot \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2 = \frac{32}{5}\pi \text{ (куб.од.).}$$

При обчисленні V_2 візьмемо $y = \dfrac{8}{x}$, де $x \in [2;8]$. Тоді

$$V_2 = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_2^8 \frac{64}{x^2}\,dx = \pi\left(-\frac{64}{x}\right)\Bigg|_2^8 = \pi(-8+32) = 24\pi \text{ (куб.од.).}$$

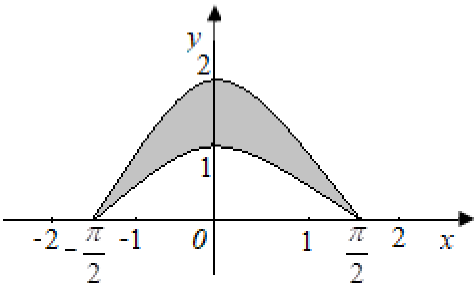
У підсумку матимемо

$$V_x = V_1 + V_2 = \frac{32}{5}\pi + 24\pi = \frac{152}{5}\pi = 30{,}4\pi \text{ (куб.од.).}$$

Відповідь: $V_x = 30{,}4\pi$ куб.од.

Приклад 170. Знайти об’єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ox плоскої фігури, обмеженої лініями $y = 2\cos x$, $y = \cos x$, $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

Розв’язання. Побудуємо задану в умові плоску фігуру.



Зауважимо, що вісь Oy є віссю симетрії цієї фігури. Будемо обертати фігуру навколо осі Ox. Отримаємо тіло обертання з порожниною. Розсічемо його площиною, перпендикулярною осі Ox. У перетині отримаємо кільце з внутрішнім радіусом $y = \cos x$ і зовнішнім радіусом $y = 2\cos x$. У силу симетрії можна обчислити половину шуканого об'єму V_1 і подвоїти результат. Для обчислення половини об'єму скористаємося формулою (2.49). Маємо $y_2 = 2\cos x$ і $y_1 = \cos x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$V_1 = \pi\int_a^b \left(y_2{}^2 - y_1^2\right)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\cos^2 x - \cos^2 x\right)dx = 3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx =$$

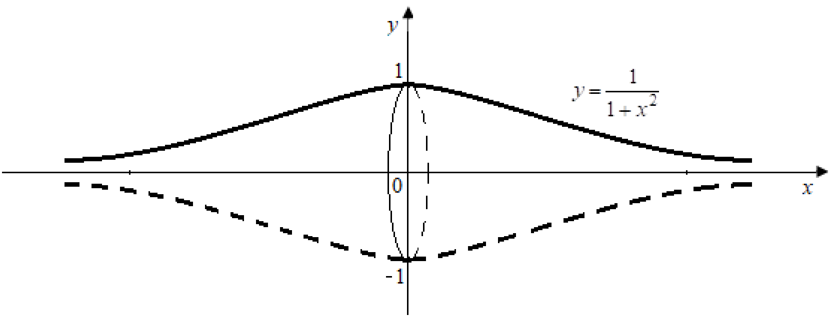
$$= \frac{3}{2}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)\,dx = \frac{3}{2}\pi\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\pi\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi^2 \text{ (куб.од)}$$

У підсумку матимемо $V_x = 2V_1 = 2\cdot\frac{3}{4}\pi^2 = \frac{3}{2}\pi^2 = 1{,}5\,\pi^2$ (куб.од.).

Відповідь: $V_x = 1{,}5\,\pi^2$ куб.од.

Приклад 171. Знайти об'єм нескінченного веретена, утвореного внаслідок обертання кривої $y = \frac{1}{1+x^2}$ (локон Аньєзі) навколо асимптоти.

Розв'язання. Зробимо рисунок.



Асимптотою кривої є вісь Ox $(-\infty \le x \le \infty)$. Вісь Oy є віссю симетрії плоскої фігури. У силу симетрії можна обчислити половину шуканого об'єму V_1 для $(0 \le x \le \infty)$ і подвоїти результат. Для обчислення половини об'єму скористаємося формулою (2.48).

$$V_1 = \pi\int_a^b y^2\,dx = \pi\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx = \left[\begin{array}{c} x = tg\,t,\ dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0,\, x \to \infty \Rightarrow t \to \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+tg^2 t}\right)^2 \frac{1}{\cos^2 t}dt = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 t}}\right)^2 \frac{1}{\cos^2 t}dt = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = \frac{\pi}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}\text{ (куб.од.).}$$

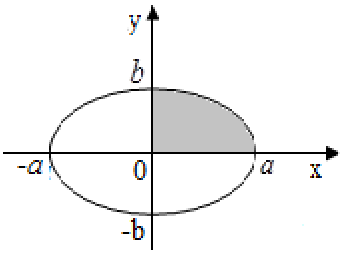
У підсумку матимемо $V_x = 2V_1 = 2\cdot\dfrac{\pi^2}{4} = \dfrac{\pi^2}{2}$ (куб.од.).

Відповідь: $V_x = \dfrac{\pi^2}{2}$ куб.од.

Приклад 172. Знайти об'єм тіла, отриманого обертанням

навколо осі Ox плоскої фігури, обмеженої лінією $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

Розв'язання. Це рівняння еліпса. Побудуємо задану в умові плоску фігуру.



Маємо $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$, $0 \le t \le \pi$. Зауважимо, що вісь Oy є віссю симетрії цієї фігури. Будемо обертати фігуру навколо осі Ox. У силу симетрії можна обчислити половину шуканого об'єму V_1 і подвоїти результат. Функція $x(t)$ є спадною на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Тому для обчислення половини об'єму скористаємося формулою (2.53). Маємо $x' = -a\sin t$ і $t_1 = 0, t_2 = \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$V_1 = -\pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\cdot x'(t)dt = -\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} b^2 \sin^2 t\left(-a\sin t\right)dt = \pi b^2 a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt =$$

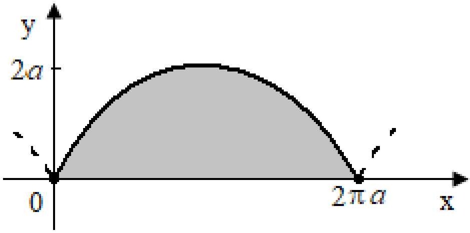
$$= -\pi b^2 a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 t\right)d\cos t = \pi b^2 a\left(\frac{\cos^3 t}{3} - \cos t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\pi b^2 a.$$

У підсумку матимемо $V_x = 2V_1 = 2\cdot\frac{2}{3}\pi b^2 a = \frac{4}{3}\pi a b^2$ (куб.од.).

Відповідь: $V_x = \frac{4}{3}\pi a b^2$ куб.од.

Приклад 173. Знайти об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ox плоскої фігури, обмеженої першою аркою циклоїди $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ та віссю Ox.

Розв'язання. Зробимо рисунок фігури.



Арка циклоїди описується при зміні t від 0 до 2π, оскільки $y(0)=y(2\pi)=0$, а в інших точках $t\in[0;2\pi]$ $y>0$. Межі інтегрування відповідно рівні $x(0)=0$ і $x(2\pi)=2\pi a$. При зміні x на відрізку $[0;2\pi a]$ t змінюється від $t_1=0$ до $t_2=2\pi$.

Об'єм тіла, отриманого обертанням заданої фігури навколо осі Ox, знайдемо за формулою (2.52). Маємо $x'=a(1-\cos t)$. Тоді

$$V_x=\pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\cdot x'(t)dt=\pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)dt=$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+3\cos^2 t+\cos^3 t\right)dt=$$

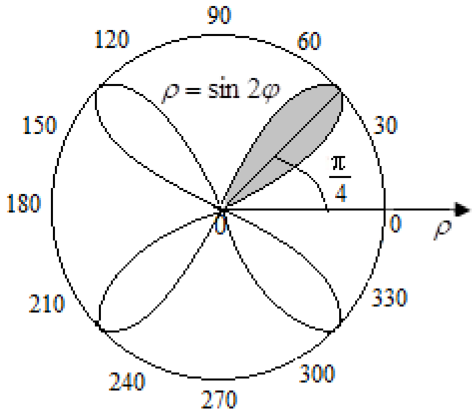
$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+\frac{3}{2}(1+\cos 2t)+\left(1-\sin^2 t\right)\cos t\right)dt=$$

$$=\pi a^3\left(t-3\sin t+\frac{3}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+\sin t-\frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=5\pi^2 a^3\,(\text{куб.од})$$

Відповідь: $V_x=5\pi^2 a^3$ куб.од.

Приклад 174. Знайти об'єм тіла, отриманого обертанням навколо полярної осі ρ плоскої фігури, обмеженої лінією $\rho=\sin 2\varphi$ (чотирипелюсткова троянда).

Розв'язання. Фігура симетрична відносно осей Ox і Oy. Побудуємо задану фігуру.



Розглянемо частину фігури, що розташована в першій чверті, $\phi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Знайдемо об'єм V_1 тіла, утвореного обертанням цієї частини навколо осі Ox за формулою (2.54) і подвоїмо результат.

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3 \sin\varphi d\varphi = \frac{2}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\varphi \cdot \sin\varphi d\varphi = \frac{16}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi \cos^3\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{16}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\phi \left(1 - \sin^2\phi\right) d\sin\phi = \frac{16}{3}\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\phi \, d\sin\phi - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\phi \, d\sin\phi \right) = \frac{16}{3}\pi \left(\frac{\sin^5\phi}{5} - \frac{\sin^7\phi}{7} \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3}\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{32}{105}\pi .$$

У підсумку матимемо

$V_x = 2V_1 = 2 \cdot \frac{32}{105}\pi = \frac{64}{105}\pi$ (куб.од.).

Відповідь: $V_x = \frac{64}{105}\pi$ куб.од.

2.7.3.3 Задачі для самостійної роботи

Знайти об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями, за допомогою паралельних перерізів	Відповідь
1. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$	32π (куб.од.)
2. $z=4-y^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=3$	16 (куб.од.)
3. $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9},\ \ z=2$	12π (куб.од.)
4. $x^2+\frac{y^2}{4}=1,\ z=\frac{y}{\sqrt{2}},\ z=0,\ y\geq 0$	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (куб.од.)
5. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1,\ z=0,\ z=2$	$\frac{65\pi}{2}$ (куб.од.)

Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, навколо вказаної осі	Відповідь
1. $y=3x-x^2,\ y=0$ а) Ox; б) Oy	а) $8{,}1\pi$ (куб.од.) б) $13{,}5\pi$ (куб.од.)
2. $y=x^2,\ y^2=8x,\ \ Oy$	$4{,}8\pi$ (куб.од.)
3. $y=\sin x,\ y=3\sin x,\ 0\leq x\leq \pi$ а) Ox; б) Oy	а) $4\pi^2$ (куб.од.) б) $4\pi^2$ (куб.од.)
4. $y=\frac{4}{x},\ x=1,\ x=4,\ y=0$ а) Ox; б) Oy	а) 12π (куб.од.) б) 24π (куб.од.)
5. $\begin{cases} x=5\cos^3 t \\ y=5\sin^3 t \end{cases},\ Ox$	$\frac{800}{21}\pi$ (куб.од.)

Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями, навколо вказаної осі	Відповідь
6. $\begin{cases} x=\cos t \\ y=2+\sin t \end{cases}$, а) Ox; б) Oy	а) $\frac{56}{3}\pi$ (куб.од.) б) $\frac{4}{3}\pi$ (куб.од.)
7. $\rho=3(1+\cos\varphi)$, полярна вісь	72π (куб.од.)
8. $\rho=3\varphi, 0\le\varphi\le\pi$, полярна вісь	$18\pi^2(\pi^2-6)$(куб.од.)
9. $\rho=2\cos\varphi$, полярна вісь	$\frac{4}{3}\pi$ (куб.од.)
10. $(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)$, Ox	$2\pi\left(\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{2}{3}\right)$ (куб.од.)
11. $y=\sin x, y=1, x=0$, Oy	$\frac{\pi}{4}(\pi^2-8)$(куб.од.)
12. $x^2-y^2=4, y=\pm 2$, Oy	$\frac{64}{3}\pi$ (куб.од.)
13. $x^2+y^2\le -6y,\ x\ge y$, Ox	$36\pi+40{,}5\pi^2$ (куб.од.)
14. $x^2-y^2=9,\ y=0, y=6$, Oy	63π (куб.од.)

2.7.4 Обчислення площі поверхні тіла обертання

2.7.4.1 Обчислення площі поверхні, утвореної обертанням кривої навколо осі Ox або Oy.

Розглянемо поверхню, утворену обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y=f(x)$.

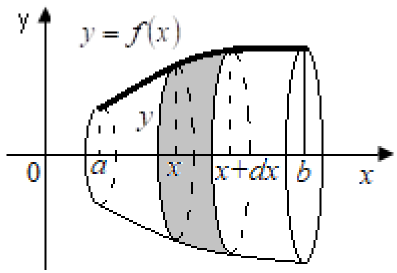


Рисунок 2.14

Припустимо, що функція $y = f(x)$ має неперервну похідну $f'(x)$ при усіх $x \in [a;b]$. Будемо шукати площу поверхні Q_x, відсічену площинами $x = a$ і $x = b$. Для цього виділимо на дузі кривої $y = f(x)$ елемент, який відповідає зміні абсциси від x до $x + dx$, і будемо його обертати.

Як нескінченно малий елемент dQ_x приймемо площу бічної поверхні зрізаного конуса з твірною dS і радіусом середнього перетину y, де y – ордината, відповідна абсцисі x.

З огляду на (2.41), отримаємо

$$Q_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \tag{2.55}$$

Якщо функція $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$ не є додатною, тобто $f(x) < 0$, то площа поверхні обертання знаходиться за формулою

$$Q_x = -2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \tag{2.56}$$

Якщо поверхня утворена обертанням навколо осі Oy дуги кривої $x = g(y)$, $y \in [c;d]$, то площа поверхні обертання знаходиться за формулою

$$Q_y = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1+\left(g'(y)\right)^2}\, dy \qquad (2.57)$$

Якщо поверхня утворена обертанням навколо осі Ox дуги кривої, заданої параметричними рівнянням $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, де функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервно диференційовані на відрізку $[t_1, t_2]$, то площа поверхні обертання знаходиться за формулою

$$Q_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt \qquad (2.58)$$

Якщо поверхня утворена обертанням навколо осі Oy дуги кривої, заданої параметричними рівнянням $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, то площа поверхні обертання знаходиться за формулою

$$Q_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt \qquad (2.59)$$

Якщо поверхня утворена обертанням навколо полярної осі ρ кривої, заданої рівнянням $\rho = \rho(\phi)$, $\phi \in [\alpha; \beta]$ ($0 \le \alpha < \beta \le \pi$), де функція $\rho(\phi)$ неперервно диференційована на відрізку $[\alpha; \beta]$, то площа поверхні обертання знаходиться за формулою

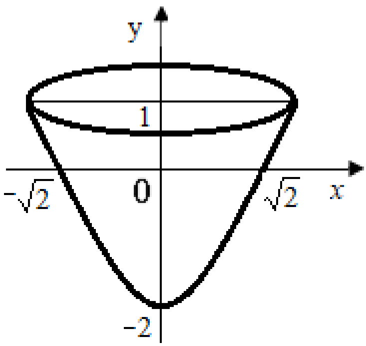
$$Q_\rho = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\varphi) \cdot \sin\varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi \qquad (2.60)$$

Якщо поверхня утворена обертанням кривої, заданої рівнянням $\rho = \rho(\phi)$, $\phi \in [\alpha; \beta]$ ($0 \le \alpha < \beta \le \pi$), де функція $\rho(\phi)$ неперервно диференційована на відрізку $[\alpha; \beta]$, навколо прямої, перпендикулярної до точки O полярної осі ρ, то площа поверхні обертання знаходиться за формулою

$$Q = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi)\cdot \cos\varphi \ \sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi \qquad (2.61)$$

Приклад 175. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кривої $x^2 = y+2$, $y=1$ навколо осі Oy.

Розв'язання. Зробимо рисунок



Для знаходження площі поверхні, утвореної обертанням навколо осі Oy кривої $x^2 = y+2$, застосуємо формулу (2.57). Виразимо змінну x з рівняння кривої: $x=\sqrt{y+2}$, $x' = \dfrac{1}{2\sqrt{y+2}}$.

Знайдемо $\sqrt{1+(x')^2} = \sqrt{1+\dfrac{1}{4(y+2)}} = \sqrt{\dfrac{4y+9}{4(y+2)}}$. Тоді

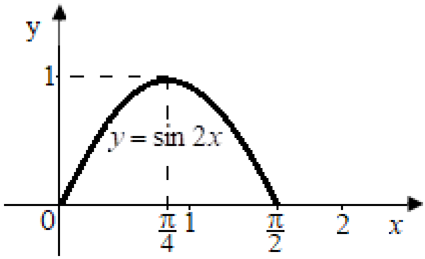
$$Q_y = 2\pi\int_a^b g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy = 2\pi\int_{-2}^{1}\sqrt{y+2}\sqrt{\frac{4y+9}{4(y+2)}}dy =$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{1} \frac{1}{2}\sqrt{4y+9}\,dy = \frac{\pi}{4} \cdot \left.\frac{(4y+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_{-2}^{1} = \frac{\pi}{6}\left(13\sqrt{13}-1\right)\text{(кв.од.)}.$$

Відповідь: $Q_y = \frac{\pi}{6}\left(13\sqrt{13}-1\right)$ кв.од.

Приклад 176. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кривої $y = \sin 2x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ навколо осі Ox.

Розв'язання. Зробимо рисунок



Для знаходження площі поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кривої $y = \sin 2x$, застосуємо формулу (2.55). Маємо $y' = 2\cos 2x$. Тоді

$$Q_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\sqrt{1+4\cos^2 2x}\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cos 2x = t; t_н = 2; t_в = -2 \\ -4\sin 2x dx = dt \end{bmatrix} = 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1+t^2}\left(-\frac{1}{4}\right)dt = \frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{1+t^2}\,dt =$$

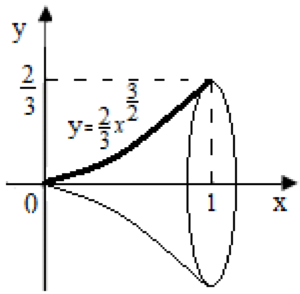
$$= \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^2 \sqrt{1+t^2}\,dt = \pi\left.\left(\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\right)\right|_0^2 =$$

$$= \pi\left(\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)\text{(кв.од.)}.$$

Відповідь: $Q_x == \pi\left(\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right)$ кв.од.

Приклад 177. Знайти площу поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox кривої $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, розташованої над відрізком $[0;1]$.

Розв'язання. Зробимо рисунок



Для знаходження площі поверхні, утвореної обертанням кривої навколо осі Ox, застосуємо формулу (2.55). Знайдемо $y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$, $\sqrt{1+\left(y'\right)^2}=\sqrt{1+x}$. Тоді

$$Q_x=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=2\pi\int_0^1\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x}\,dx=\frac{4\pi}{3}\int_0^1 x\sqrt{x}\sqrt{1+x}\,dx=$$

$$=\frac{4\pi}{3}\int_0^1 x\sqrt{x^2+x}\,dx=\frac{4\pi}{3}\int_0^1 x\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\,dx=$$

$$=\left[\begin{array}{c} t=x+\frac{1}{2},\ dx=dt \\ x=0\Rightarrow t=\frac{1}{2}, x=1\Rightarrow t=\frac{3}{2}\end{array}\right]=\frac{4\pi}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\,dt=$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\cdot 2t\,dt-\frac{2\pi}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\,dt=\frac{2\pi}{3}\left.\frac{\left(t^2-\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}-$$

$$-\frac{2\pi}{3}\left.\left(t\cdot\frac{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}{2}-\frac{1}{8}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right|\right)\right|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2\pi}{3}\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}-\right.$$

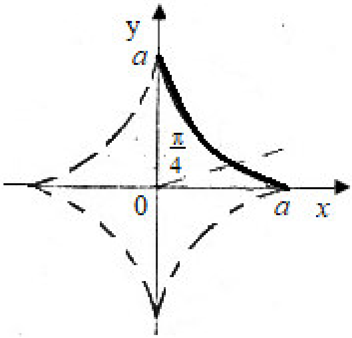
$$\left.-\frac{1}{8}\ln\left|\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right|+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1}{2}\right|\right)=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2\pi}{3}\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{8}\ln\left|3+2\sqrt{2}\right|\right)=$$

$$=\frac{2\pi}{3}\left(\frac{7\sqrt{2}}{12}+\frac{1}{8}\ln\left|3+2\sqrt{2}\right|\right)=\frac{\pi}{36}\left(14\sqrt{2}+3\ln\left|3+2\sqrt{2}\right|\right)\text{(кв.од.).}$$

Відповідь: $Q_x=\frac{\pi}{36}\left(14\sqrt{2}+3\ln\left|3+2\sqrt{2}\right|\right)$ кв.од.

Приклад 178. Знайти площу поверхні тіла, утвореного обертанням астроїди $\begin{cases} x=a\cos^3\dfrac{t}{4} \\ y=a\sin^3\dfrac{t}{4} \end{cases}$, $0\le t\le 2\pi$ навколо осі Ox.

Розв'язання. Зробимо рисунок



Для знаходження площі поверхні, утвореної обертанням астроїди навколо осі Ox, застосуємо формулу (2.58).

Знайдемо $x' = -\frac{3}{4}a\cos^2\frac{t}{4}\sin\frac{t}{4}$, $y' = \frac{3}{4}a\sin^2\frac{t}{4}\cos\frac{t}{4}$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$. Тоді

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{4}a\cos^2\frac{t}{4}\sin\frac{t}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\sin^2\frac{t}{4}\cos\frac{t}{4}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{16}a^2\cos^4\frac{t}{4}\sin^2\frac{t}{4} + \frac{9}{16}a^2\sin^4\frac{t}{4}\cos^2\frac{t}{4}} = \frac{3}{4}a\sqrt{\cos^2\frac{t}{4}\sin^2\frac{t}{4}} =$$

$$= \frac{3}{4}a\cos\frac{t}{4}\sin\frac{t}{4}.$$

Матимемо

$$Q_x = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = 2\pi\int_0^{2\pi} a\sin^3\frac{t}{4}\cdot\frac{3}{4}a\cos\frac{t}{4}\sin\frac{t}{4}\,dt =$$

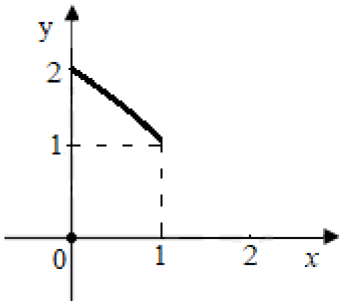
$$= \frac{3}{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{4}\cdot\cos\frac{t}{4}\,dt = 6\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{4}\,d\sin\frac{t}{4} = 6\pi a^2\left.\frac{\sin^5\frac{t}{4}}{5}\right|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{6}{5}\pi a^2 \text{ (кв.од.)}.$$

Відповідь: $Q_x = \frac{6}{5}\pi a^2$ кв.од.

Приклад 179. Знайти площу поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \end{cases}$, $0 \le t \le 1$, навколо осі Oy.

Розв'язання. Зробимо рисунок



Для знаходження площі поверхні, утвореної обертанням кривої навколо осі Oy, застосуємо формулу (2.59).

Знайдемо $x' = 1$, $y' = -1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Тоді

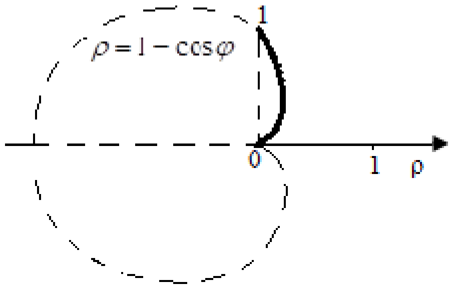
$$Q_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = 2\pi \int_0^1 t\sqrt{1+1}dt = 2\sqrt{2}\pi \int_0^1 t\,dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \sqrt{2}\pi \text{ (кв.од.)}.$$

Відповідь: $Q_y = \sqrt{2}\pi$ кв.од.

Приклад 180. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням кривої $\rho = 1 - \cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ навколо полярної осі.

Розв'язання. Зробимо рисунок.



Для знаходження площі поверхні, утвореної обертанням кривої $\rho = 1 - \cos\varphi$ навколо полярної осі, застосуємо формулу (2.60).

Знайдемо $\rho' = \sin\varphi$ і $\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = \sqrt{(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} =$

$$= \sqrt{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \sqrt{2 - 2\cos\varphi} = \sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} = 2\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$Q_\rho = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\phi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\phi) + (\rho'(\phi))^2}\,d\phi =$$

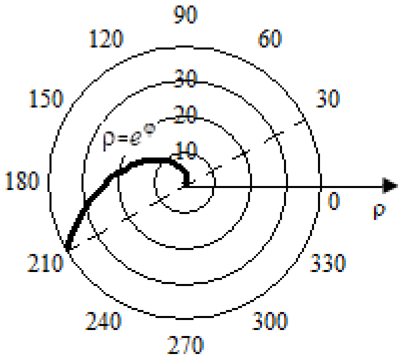
$$= 4\pi\int_0^\pi (1-\cos\varphi)\sin\varphi\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 16\pi\int_0^\pi \sin^2\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= 32\pi\int_0^\pi \sin^4\frac{\varphi}{2}d\sin\frac{\varphi}{2} = 32\pi\left.\frac{\sin^5\frac{\varphi}{2}}{5}\right|_0^\pi = \frac{32}{5}\pi \text{ (кв.од.)}.$$

Відповідь: $Q_\rho = \dfrac{32}{5}\pi$ кв.од.

Приклад 181. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням логарифмічної спіралі $\rho = e^{\varphi}$, $\dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{7\pi}{6}$ навколо прямої, що з'єднує кінцеві точки спіралі.

Розв'язання. Зробимо рисунок



Виберемо декартову систему координат так, щоб початок координат O збігся з полюсом, а додатна піввісь $Ox-$ з проминем $\frac{\pi}{6}$. Тоді

$$x = \rho\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = e^{\varphi - \frac{\pi}{6}}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$y = \rho\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = e^{\varphi - \frac{\pi}{6}}sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right).$$

Знайдемо диференціал дуги $dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi = e^{\varphi}\sqrt{2}d\varphi$.

Оскільки віссю обертання є ось Ox, то $\rho(\varphi) = |y(\varphi)|$. Тому площу поверхні обертання обчислюємо за формулою (2.58)

$$Q_x = 2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho(\varphi)d\,l = 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} e^{\varphi - \frac{\pi}{6}}sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)\sqrt{2}\;e^{\varphi}d\varphi =$$

$$= 2\sqrt{2}\,\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} e^{2\varphi - \frac{\pi}{6}}sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)d\varphi = \left[\begin{array}{c} t = \varphi - \frac{\pi}{6}, \varphi = t + \frac{\pi}{6}, d\varphi = dt \\ \varphi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = 0, \varphi = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow t = \pi \end{array}\right] =$$

$$= 2\sqrt{2}\,\pi\int_0^{\pi} e^{2t + \frac{\pi}{6}}sin\;t\,dt = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}}\;\pi\int_0^{\pi} e^{2t}sin\;t\,dt = \Big[\text{за формулою}$$

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x\right)\Big] = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}}\,\pi\left(\frac{e^{2t}}{5}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(2\sin t - \cos t\right)\right)\Big|_0^{\pi} = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}}\,\pi\left(\frac{e^{2\pi}}{5}+\frac{1}{5}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{5}e^{\frac{\pi}{6}}\left(e^{2\pi}+1\right)\pi\,.$$

Відповідь: $Q_x = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}e^{\frac{\pi}{6}}\left(e^{2\pi}+1\right)\pi$ кв.од.

2.7.4.2 Задачі для самостійної роботи

Знайти площу поверхні, утвореної обертанням дуги кривої L, навколо вказаної осі.

Завдання	Відповідь
1. $L: y = x^3, -1 \le x \le 1$, Ox	$\frac{2\pi}{3}\left(10\sqrt{10}-1\right)$(кв.од.)
2. $L: x = \frac{1}{2}\sqrt{4y-1}, 1 \le y \le 9$, Oy	$\frac{104}{3}\pi$ (кв.од.)
3. $L: y = e^{-x}, 0 \le x < +\infty$, Ox	$\pi\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$(кв.од.)
4. $L: \begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$, Ox	$9{,}6\,\pi$ (кв.од.)
5. $L: \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$, а) Ox; б) Oy	а) $\frac{64}{3}\pi$ (кв.од.) б) $16\pi^2$ (кв.од.)
6. $L: \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2 + \sin t \end{cases}$, а) Ox; б) Oy	а) $8\pi^2$ (кв.од.) б) 4π (кв.од.)
7. $L: \rho = 5\sin\varphi$, полярна вісь	$25\pi^2$ (кв.од.)
8. $L: \rho^2 = \cos 2\varphi$, полярна вісь	$2\pi\left(2-\sqrt{2}\right)$(кв.од.)
9. $L: \rho = 2\left(1+\cos\varphi\right)$, полярна вісь	$25{,}6\,\pi$ (кв.од.)

Завдання	Відповідь
10. $L:\begin{cases} x=t^2 \\ y=\frac{t}{3}\left(t^3-3\right) \end{cases}$, Ox	3π (кв.од.)
11. $L: y^2=2x,\ 0\le x\le 4$, Ox	$\frac{52}{3}\pi$ (кв.од.)
12. $L: 9y^2=x(3-x)^2$, Ox	3π (кв.од.)

2.7.5 Площа циліндричної поверхні

Розглянемо циліндричну поверхню $ABCD$ (Рис. 2.15) з твірними паралельними осі Oz. Нехай ця поверхня задана рівняннями $y=f(x)$, $z=g(x)$, $a\le x\le b$.

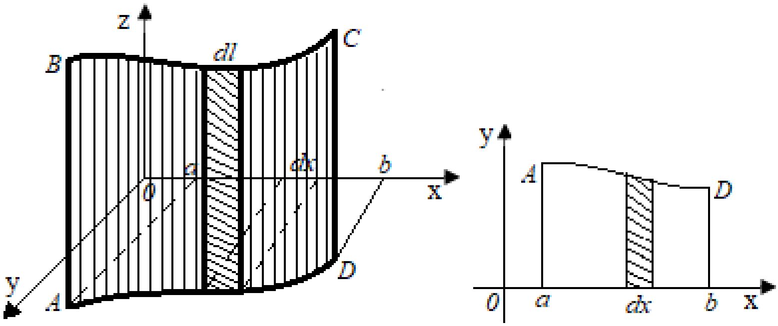


Рисунок 2.15

Виділивши на поверхні смужку, знайдемо її площу

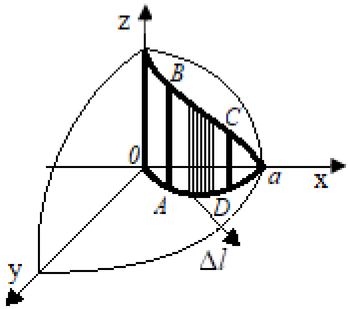
$$dQ = z\,dl = g(x)\sqrt{1+\left(y_x'\right)^2}\,dx.$$

Тоді шукана площа циліндричної поверхні обчислюється за формулою

$$Q=\int_a^b g(x)\sqrt{1+\left(f_x'\right)^2}\,dx \qquad (2.62)$$

Приклад 182. Знайти площу тієї частини поверхні циліндра, $x^2+y^2=ax$, що міститься всередині сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Розв'язання. Твірні циліндра паралельні осі Oz, а напрямною служить коло $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$. Зробимо рисунок чверті шуканої поверхні.



Частину кола на рисунку розділимо на невеликі дуги Δl. Твірні, що проходять через точки поділу, ділять поверхню циліндра на смужки. Якщо знехтувати нескінченно малими вищого порядку, то площа смужки $ABCD$ дорівнює $CD\cdot\Delta l$.

Якщо ρ і $\varphi-$ полярні координати точки D, то $\rho=a\cos\varphi$ і $CD=\sqrt{a^2-\rho^2}=a\sin\varphi$, а $\Delta l=a\cdot\Delta\varphi$.

Звідси знаходимо диференціал площі поверхні:

$$dQ=a^2\sin\varphi\,d\varphi.$$

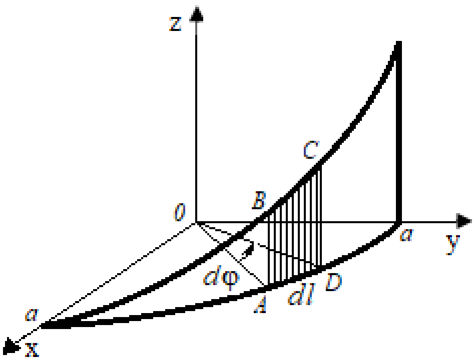
Маємо

$$Q=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin\varphi\,d\varphi=-4a^2\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4a^2 \text{ (кв.од.).}$$

Відповідь: $Q=4a^2$ кв.од.

Приклад 183. Знайти площу поверхні, відсіченої від прямого кругового циліндра площиною, що проходить через діаметр основи і нахиленої до неї під кутом 45°.

Розв'язання. Приймемо вісь циліндра за вісь Oz, а даний діаметр – за вісь Ox. Тоді рівняння циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = a^2$, а рівняння площини, що складає з координатною площиною xOy кут 45°, буде $y = z$. Зробимо рисунок.



Площа нескінченно вузької смужки $ABCD$ з точністю до нескінченно малих вищого порядку буде дорівнює $dQ = z \cdot dl$, де dl – довжина елементарної дуги кола основи. Вводячи полярні координати, матимемо $z = y = a\sin\varphi$, $dl = a\,d\varphi$. Звідси знаходимо диференціал площі поверхні:

$$dQ = a^2 \sin\varphi\, d\varphi.$$

Маємо

$$Q = \int_0^{\pi} a^2 \sin\varphi\, d\varphi = -a^2 \cos\varphi \Big|_0^{\pi} = 2a^2 \text{ (кв.од.)}.$$

Відповідь: $Q = 2a^2$ кв.од.

2.8 Застосування визначеного інтеграла у фізиці та механіці

2.8.1 Маса плоскої кривої

З механіки відомо, якщо маса тіла m і об’єм тіла V, то середня густина γ_c визначається формулою $\gamma_c = \dfrac{m}{V}$. Однак у різних точках тіла вона може бути різною, тобто вона є функцією точки P: $\gamma = \gamma(P)$. Тоді $m = \int\limits_{V} \gamma(P) dV$.

Приклад 184. Знайти масу однорідного стержня, обмеженого замкнутою поверхнею, утвореної обертанням навколо осі Ox лінії $y = 10^{-3}(3 + 5x(3 - x))$. Стержень має довжину 3 м, обмежений площинами $x = 0$ і $x = 3$. Густина матеріалу $\gamma = 8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Розв’язання. Оскільки густина стержня стала, то $m = \int\limits_{V} \gamma dV = \gamma V$, де V – об’єм стержня.

Об’єм стержня обчислимо як суму об’ємів циліндричних елементів, які перпендикулярні осі Ox, мають нескінченно малу товщину dx, перетин – круг радіуса $y(x)$. Об’єм такого елемента $dV = \pi y^2(x) dx$, а об’ємом усього стержня є визначений інтеграл:

$$V = \int\limits_{V} dV = \pi \int\limits_0^3 y^2(x) dx = \pi \cdot 10^{-6} \int\limits_0^3 (3 + 5x(3 - x))^2 dx = 10^{-6} \pi \int\limits_0^3 \big(9 +$$

$$+ 30x(3 - x) + 25x^2 (3 - x)^2 \big) dx = 10^{-6} \pi \int\limits_0^3 \big(9 + 90x - 30x^2 + 225x^2 -$$

$$-150x^3 + 25x^4 \big) dx = 10^{-6} \pi \int\limits_0^3 \big(9 + 90x + 195x^2 - 150x^3 + 25x^4 \big) dx =$$

$$=10^{-6}\pi\left(9x+45x+65x^3-\frac{75}{2}x^4+5x^5\right)\Bigg|_0^3=\frac{729}{2}\cdot 10^{-6}\,\pi\,.$$

Тоді маса стержня

$$m=\gamma V=8\cdot 10^3\cdot\frac{729}{2}\cdot 10^{-6}\,\pi=2916\cdot 10^{-3}\pi=2{,}916\pi\approx 9{,}16\,(\text{кг}).$$

Відповідь: $m=9{,}16$ кг.

Розглянемо неоднорідний стержень, що розташований на відрізку $[a,b]$ осі Ox. Нехай $\gamma(x)$ – лінійна густина стержня. Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n часткових відрізків точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i\ldots<x_n=b$. У кожному частковому відрізку $[x_{i-1};x_i]\;(i=1,\ldots,n)$ візьмемо довільну точку ζ_i і складемо суму $\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma(\zeta_i)\Delta x_i$. Оскільки кожний доданок цієї суми є наближеним значенням маси частини стержня на відрізку $[x_{i-1};x_i]$, то суму можна прийняти за наближене значення маси всього стержня. Масу m всього стержня визначимо як $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 0}}\sum\limits_{i=1}^{n}\gamma(\zeta_i)\Delta x_i$, де $\lambda-$ довжина найбільшого часткового відрізка: ($\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$), тобто як інтеграл $\int\limits_a^b\gamma(x)dx$.

Тому маса стержня з лінійною густиною $\gamma(x)$, $x\in[a,b]$ визначається формулою

$$m=\int\limits_a^b\gamma(x)dx\,. \tag{2.63}$$

Для плоскої кривої L, заданої рівнянням $y=f(x),\,x\in[a,b]$, з лінійною густиною $\gamma=\gamma(x),\,x\in[a,b]$ маса елементарного куска кривої буде $dm = \gamma dL$. Враховуючи, що $dL = \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$, матимемо формулу для знаходження маси кривої

$$m = \int_a^b \gamma(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (2.64)$$

Якщо плоска крива L з лінійною густиною $\gamma = \gamma(\mathrm{t}), t \in [t_1; t_2]$ задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, то масу m кривої знаходимо за формулою

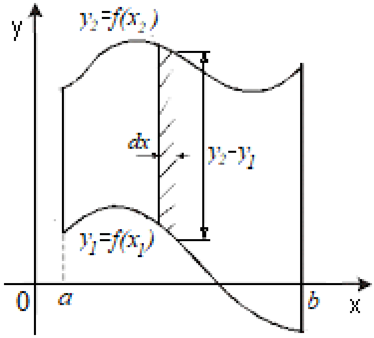
$$m = \int_{t_1}^{t_2} \gamma(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt. \qquad (2.65)$$

Якщо плоска крива L з лінійною густиною $\gamma = \gamma(\varphi), \varphi \in [\alpha; \beta]$ задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha; \beta]$, то масу m кривої знаходимо за формулою

$$m = \int_\alpha^\beta \gamma(\varphi)\sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi. \qquad (2.66)$$

2.8.2 Маса плоскої фігури

Розглянемо плоску фігуру, що обмежена лініями $y_2 = f_2(x)$ і $y_1 = f_1(x)$ та прямими $x = a,\ x = b$ $\left(a < b \text{ і } y_2 \ge y_1\right)$, густина маси якої $\gamma = \gamma(x), x \in [a, b]$.



Виділимо на осі Ox елемент dx $(dx \to 0)$ і побудуємо на ньому прямокутник, паралельний осі Oy, довжина якого $y_2 - y_1 = f_2(x) - f_1(x)$. Густину по всій довжині прямокутника можемо вважати сталою, тому що $\gamma = \gamma(x)$. Маса цього прямокутника $dm = \gamma(x)(f_2(x) - f_1(x))dx$. Тоді маса плоскої фігури обчислюється за формулою

$$m = \int_a^b \gamma(x)(f_2(x) - f_1(x))dx. \quad (2.67)$$

Якщо плоска фігура, густина маси якої $\gamma = \gamma(x), x \in [a, b]$, обмежена кривою $y = f(x)$ та віссю Ox, то масу m плоскої фігури обчислюємо за формулою

$$m = \int_a^b \gamma(x) f(x) dx. \quad (2.68)$$

Якщо плоска фігура, густина маси якої $\gamma = \gamma(\mathrm{t}), t \in [t_1; t_2]$, обмежена кривою, заданою параметричним рівнянням

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, то масу m плоскої фігури обчислюємо за формулою

$$m = \int_{t_1}^{t_2} \gamma\,(\mathrm{t}) y(t)\, x'(t)\, dt\,. \tag{2.69}$$

Якщо плоска фігура, густина маси якої $\gamma = \gamma(\varphi), \varphi \in [\alpha; \beta]$, обмежена кривою, заданою рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha; \beta]$, то масу m плоскої фігури обчислюємо за формулою

$$m = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \gamma(\varphi)\rho^2(\varphi) d\varphi\,. \tag{2.70}$$

<u>Зауваження 2.6</u> Для однорідної кривої або однорідної плоскої фігури лінійна густина $\gamma = \mathrm{c}onst$. Зокрема, при $\gamma = 1$ числове значення маси плоскої кривої збігається з її довжиною, а для пласкої фігури – з її площею.

2.8.3 Статичні моменти та координати центра мас плоскої кривої

Розглянемо деяку однорідну криву з лінійною густиною $\gamma = \gamma(x)$.

<u>Означення 2.7</u> *Статичним моментом M* матеріальної точки маси m відносно деякої осі будемо називати добуток маси m на відстань d точки до осі.

У системі n матеріальних точок з масами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, що лежать в одній площині з віссю, відповідно, на відстанях $d_1, d_2, \ldots, d_n$ від осі, статичний момент виражається сумою $M = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i$. При цьому відстані точок, що лежать по одну сторону від осі, беруться зі знаком плюс, а відстані точок по іншу сторону – зі знаком мінус.

Нехай на площині xOy задана система матеріальних точок $A_1(x_1; y_1), A_2(x_2; y_2), \ldots, A_n(x_n; y_n)$ з масами $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

<u>Означення 2.8</u> *Статичним моментом* M_x цієї системи відносно осі Ox називається сума добутків мас цих точок на їх ординати: $M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$. Аналогічно (як сума добутків мас точок на їх абсциси) визначається статичний момент M_y системи відносно осі Oy: $M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$.

Визначимо статичний момент, якщо маси не зосереджені в окремих точках, а розташовані суцільно, заповнюючи деяку криву $y = f(x), x \in [a, b]$ з лінійною густиною $\gamma = \gamma(x), x \in [a, b]$.

Виділимо елемент dl цієї кривої. Оскільки густина кривої $\gamma(x)$, то маса виділеного елемента $\gamma(x)dl$. Якщо наближено прийняти цей елемент за матеріальну точку, що лежить на відстані y від осі Ox, то матимемо вираз для статичного моменту $dM_x = \gamma(x)ydl$. Аналогічно для $dM_y = \gamma(x)xdl$.

Якщо взяти за незалежну змінну довжину кривої, то підсумовуючі ці елементарні статичні моменти, матимемо формули для знаходження статичних моментів M_x і M_y відносно осей Ox і Oy плоскої кривої $y = f(x), x \in [a, b]$ з лінійною густиною $\gamma = \gamma(x), x \in [a, b]$:

$$M_x = \int_a^b \gamma(x) y dl, \tag{2.71}$$

$$M_y = \int_a^b \gamma(x) x dl, \tag{2.72}$$

де $dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ – диференціал дуги кривої.

Якщо плоска крива з лінійною густиною $\gamma=\gamma(\mathrm{t}),\, t\in[t_1;t_2]$ задана параметричними рівняннями $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},\ t\in[t_1,t_2],$ то статичні моменти M_x і M_y відносно осей Ox та Oy знаходимо за формулами:

$$M_x=\int_{t_1}^{t_2}\gamma(t)y(t)dl\,, \tag{2.73}$$

$$M_y=\int_{t_1}^{t_2}\gamma(t)x(t)dl\,, \tag{2.74}$$

де $dl=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt$ – диференціал дуги кривої.

Якщо плоска крива з лінійною густиною $\gamma=\gamma(\varphi),\,\varphi\in[\alpha;\beta]$ задана явно у полярній системі координат (суміщеній із прямокутною декартовою системою координат) рівнянням $\rho=\rho(\varphi),\,\varphi\in[\alpha;\beta]$, то статичні моменти M_x і M_y відносно осей Ox та Oy знаходимо за формулами:

$$M_x=\int_{\alpha}^{\beta}\gamma(\varphi)\rho(\varphi)\sin\varphi\, dl\,, \tag{2.75}$$

$$M_y=\int_{\alpha}^{\beta}\gamma(\varphi)\rho(\varphi)\cos\varphi\, dl\,, \tag{2.76}$$

де $dl=\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi$ – диференціал дуги кривої.

Статичні моменти M_x, M_y плоскої кривої дозволяють встановити положення її центру мас $C(x_c, y_c)$. Точка C має таку властивість: якщо в ній зосередити всю масу m кривої, то статичний момент цієї маси відносно будь-якої осі дорівнює моменту всієї кривої відносно цієї осі, зокрема, якщо розглянути моменти кривої відносно осей координат, то $m \cdot x_c = M_y$ і $m \cdot y_c = M_x$. Звідки

$$x_c = \frac{M_y}{m}; \quad y_c = \frac{M_x}{m}. \qquad (2.77)$$

Зокрема, якщо крива L однорідна, тобто лінійна густина кривої $\gamma = const$, то для кривої L, що задана на довільному відрізку $[l_1; l_2]$, маємо

$$x_c = \frac{1}{L}\int_{l_1}^{l_2} x dL, \quad y_c = \frac{1}{L}\int_{l_1}^{l_2} y dL, \qquad (2.78)$$

де L – довжина кривої.

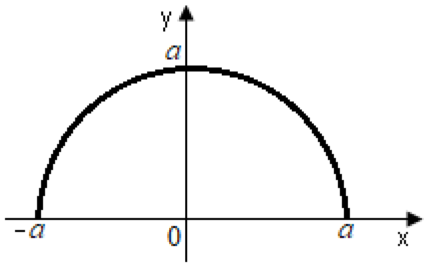
З формули для ординати y_c центру мас отримуємо геометричний наслідок: $y_c \cdot L = \int_{l_1}^{l_2} y dL$, звідки $2\pi y_c \cdot L = 2\pi \int_{l_1}^{l_2} y dL$, але права частина цієї рівності є площа Q поверхні, отриманої від обертання кривої L, в лівій же частині рівності $2\pi y_c$ позначає довжину кола, описаного центром мас кривої при обертанні її навколо осі Ox: $Q = 2\pi y_c \cdot L$. Таким чином, справедлива теорема:

<u>Теорема 2.13</u> (перша теорема Гульдіна). Площа поверхні обертання, отриманої обертанням плоскої кривої навколо осі, що лежить у площині цієї кривої і не перетинає її, дорівнює добутку довжини цієї кривої на довжину кола, описаного її центром ваги.

Ця теорема дозволяє знайти площу поверхні обертання кривої, центр мас якої відомий, навколо осі, що її не перетинає.

Приклад 185. Знайти статичні моменти та координати центру мас однорідної плоскої дуги півкола $x^2 + y^2 = a^2$, розташованої над віссю Ox.

Розв'язання. Зробимо рисунок.



Перший спосіб. Статичні моменти M_x, M_y знайдемо за формулами (2.71), (2.72). Оскільки плоска дуга однорідна, то густина її – стала величина. Покладемо у формулах $\gamma(x) = 1$.

Маємо $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \le x \le a$. Тоді $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ і

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$M_x = \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \int_{-a}^{a} a\,dx = ax\Big|_{-a}^{a} = 2a^2$$

$$M_y = \int_a^b x\sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_{-a}^{a} x \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = -\frac{a}{2}\int_{-a}^{a} \frac{d\left(a^2 - x^2\right)}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= -\frac{a}{2} \cdot 2\sqrt{a^2 - x^2}\Big|_{-a}^{a} = 0.$$

Масу плоскої дуги знайдемо за формулою (2.64).

$$m=\int\limits_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int\limits_{-a}^{a}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=a\cdot arc\sin\frac{x}{a}\Bigg|_{-a}^{a}=a\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\pi a$$

Координати центру мас (x_c, y_c) однорідної плоскої дуги знаходимо за формулами (2.77).

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{0}{\pi a}=0\,,\ y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{2a^2}{\pi a}=\frac{2a}{\pi}\,.$$

Відповідь: $M_x=2a^2$, $M_y=0$, $\left(0;\frac{2a}{\pi}\right)$.

Другий спосіб. У силу симетрії півкола відносно осі Oy абсциса центру мас $x_c=0$. Знайдемо ординату центру мас y_c, застосовуючи першу теорему Гульдіна.

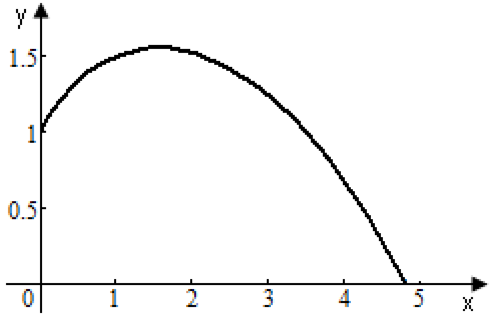
Поверхня, утворена обертанням півкола навколо осі Ox, є сфера з площею $Q=4\pi R^2=4\pi a^2$. Довжина півкола $L=\pi R=\pi a$. Підставимо ці значення у формулу $Q=2\pi\, y_c\cdot L$:

$$4\pi a^2=2\pi\, y_c\cdot\pi a\Rightarrow y_c=\frac{4\pi a^2}{2\pi^2 a}=\frac{2a}{\pi}\,.$$

Відповідь: $\left(0;\frac{2a}{\pi}\right)$.

Приклад 186. Знайти статичні моменти та координати центру мас однорідної плоскої дуги $\begin{cases}x=e^t\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Розв’язання. Зробимо рисунок.



Статичні моменти M_x, M_y знайдемо за формулами (2.73), (2.74). Оскільки плоска дуга однорідна, то густина її стала величина. Покладемо у формулах $\gamma(t)=1$.

Знайдемо $x'=e^t(\sin t+\cos t)$. $y'=e^t(\cos t-\sin t)$. Тоді

$$(x')^2+(y')^2=e^{2t}(\sin t+\cos t)^2+e^{2t}(\cos t-\sin t)^2=2e^{2t},$$

$$\sqrt{(x')^2+(y')^2}=e^t\sqrt{2}.$$

$$M_x=\int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\cos t\cdot e^t\sqrt{2}\,dt=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\cos t\,dt=\left[\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{5}e^{2t}(2\cos t+\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{5}\left(e^{\pi}-2\right).$$

$$M_y=\int_{t_1}^{t_2} x(t)\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\sin t\cdot e^t\sqrt{2}\,dt=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t}\sin t\,dt=\left[\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{5}e^{2t}\left(2\sin t-\cos t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{5}\left(2e^{\pi}+1\right).$$

Масу плоскої дуги знайдемо за формулою (2.65).

$$m=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt==\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^t\sqrt{2}\,dt=\sqrt{2}\,e^t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right).$$

Координати центру мас (x_c, y_c) однорідної плоскої дуги знаходимо за формулами (2.77).

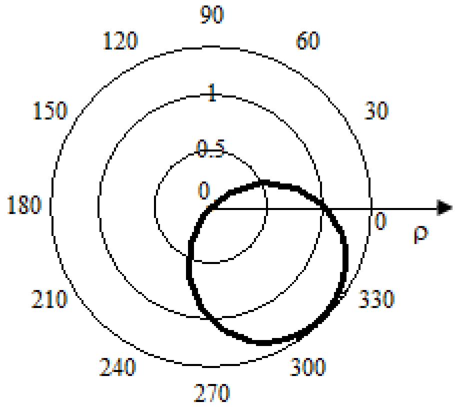
$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{5}\left(2e^{\pi}+1\right)}{\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)}=\frac{2e^{\pi}+1}{5\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)}\approx 2{,}48,$$

$$y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{5}\left(e^{\pi}-2\right)}{\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)}=\frac{e^{\pi}-2}{5\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)}\approx 1{,}11.$$

Відповідь: $M_x=\frac{\sqrt{2}}{5}\left(e^{\pi}-2\right)$, $M_y=\frac{\sqrt{2}}{5}\left(2e^{\pi}+1\right)$, $(2{,}48; 1{,}11)$.

Приклад 187. Знайти статичні моменти та координати центру мас однорідної плоскої кривої $\rho=\cos\varphi-\sin\varphi$.

Розв'язання. Однорідна плоска крива задана у полярній системі координат (суміщеній із прямокутною декартовою системою координат). Зробимо рисунок.



Статичні моменти M_x і M_y відносно осей Ox та Oy знаходимо за формулами (2.75), (2.76). Маємо $0 \le \varphi \le 2\pi$. Знайдемо $\rho' = -\sin\varphi - \cos\varphi$. Оскільки плоска крива однорідна, то густина її – стала величина. Покладемо у формулах $\gamma(\varphi) = 1$. Тоді

$$\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = \sqrt{(\cos\varphi - \sin\varphi)^2 + (-\sin\varphi - \cos\varphi)^2} = \sqrt{2}.$$

$$M_x = \int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} (\cos\varphi - \sin\varphi)\sin\varphi\sqrt{2}\,d\varphi =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left(\cos\varphi \cdot \sin\varphi - \sin^2\varphi\right)d\varphi = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\sin 2\varphi - \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)\right)d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi - \left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-2\pi) = -\pi\sqrt{2}.$$

$$M_y = \int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\cos\varphi\sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi = \int_\alpha^\beta (\cos\varphi - \sin\varphi)\cos\varphi\sqrt{2}\,d\varphi =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left(\cos^2\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi\right)d\varphi = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\pi=\pi\sqrt{2}\ .$$

Масу плоскої дуги знайдемо за формулою (2.65).

$$m=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi=\int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{2}d\varphi=\sqrt{2}\,\varphi\Big|_0^{2\pi}=2\pi\sqrt{2}$$

Координати центру мас (x_c, y_c) однорідної плоскої дуги знаходимо за формулами (2.77).

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{2}}=\frac{1}{2}=0{,}5\,,\ \ y_c=\frac{M_x}{m}=-\frac{\pi\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}=-0{,}5\ .$$

Відповідь: $M_x=-\pi\sqrt{2}$, $M_y=\pi\sqrt{2}$, $(0{,}5;-0{,}5)$.

2.8.4 Статичні моменти та координати центру мас плоскої фігури

Розглянемо плоску фігуру $A_1A_2A_3A_4$, обмежену зверху кривою A_2A_3, яка задана рівнянням $y=f(x)$, двома прямими $x=a$ та $x=b$ і віссю Ox, густина маси якої $\gamma=\gamma(x), x\in[a,b]$.

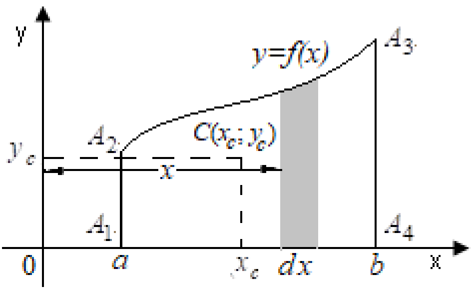


Рисунок 2.16

Щоб визначити статичні моменти M_x, M_y цієї фігури відносно осей координат, виберемо довільний елемент фігури у вигляді нескінченно вузької вертикальної смужки dx. Прийнявши цю смужку наближено за прямокутник, отримуємо, що її маса дорівнює $dm = \gamma(x) f(x) dx$. Далі, припустимо, що вся маса смужки зосереджена в її центрі мас (тобто в центрі прямокутника, що не змінює величини статичних моментів) в точці з координатами $\left(x + \frac{1}{2} dx; \frac{1}{2} y\right)$. Враховуючи, що одержана матеріальна точка розташована від осі Ox на відстані $\frac{1}{2} y$, від осі Oy на відстані $x + \frac{1}{2} dx$, знехтувавши нескінченно малою вищого порядку $\frac{1}{2} y\, dx^2$, отримаємо формули

$$dM_x = \frac{1}{2} \gamma(x)(f(x))^2 dx \text{ і } dM_y = \gamma(x) x f(x) dx$$

Звідси

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \gamma(x) f^2(x) dx, \tag{2.79}$$

$$M_y = \int_a^b \gamma(x) \cdot x \cdot f(x) dx. \tag{2.80}$$

Якщо плоска фігура з лінійною густиною $\gamma = \gamma(x), x \in [a, b]$ обмежена лініями $y_2 = f_2(x)$ і $y_1 = f_1(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ $(a < b \text{ і } y_2 \geq y_1)$, то статичні моменти відносно осей Ox та Oy знаходимо за формулами:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \gamma(x) \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right) dx, \tag{2.81}$$

$$M_y = \int_a^b \gamma(x) \cdot x \cdot (f_2(x) - f_1(x)) dx. \tag{2.82}$$

Якщо плоска фігура з лінійною густиною $\gamma = \gamma(\mathrm{t}), t \in [t_1; t_2]$ обмежена кривою, заданою параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, то статичні моменти відносно осей Ox та Oy знаходимо за формулами:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \gamma(\mathrm{t}) \cdot (y(t))^2 \cdot x'(t)dt, \tag{2.83}$$

$$M_y = \int_{t_1}^{t_2} \gamma(\mathrm{t}) \cdot y(t) \cdot x(t) \cdot x'(t)dt. \tag{2.84}$$

Якщо криволінійний сектор з лінійною густиною $\gamma = \gamma(\varphi), \varphi \in [\alpha; \beta]$ обмежений кривою, заданою в полярній системі координат (суміщеній із прямокутною декартовою системою координат) рівнянням $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha; \beta]$, то статичні моменти її відносно осей Ox та Oy знаходимо за формулами:

$$M_x = \frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta} \gamma(\varphi) \cdot \rho^3(\varphi) \cdot \sin\varphi \, d\varphi, \tag{2.85}$$

$$M_y = \frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta} \gamma(\varphi) \cdot \rho^3(\varphi) \cdot \cos\varphi \, d\varphi. \tag{2.86}$$

Припустимо, що по фігурі, яка обмежена зверху кривою $y = f(x)$, двома прямими $x = a$ та $x = b$ і віссю Ox, рівномірно розподілені маси, так що їх поверхнева густина γ постійна ($\gamma = 1$), тобто фігура однорідна. Маса m фігури збігається з її площею. Тоді статичні моменти M_x, M_y визначаються формулами $M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx$, $M_y = \int_a^b x \cdot y dx$.

За цими статичними моментами нескладно визначить координати (x_c, y_c) центру мас фігури. Якщо через S позначити площу фігури, то за основною властивістю центру мас матимемо

$$S \cdot x_c = M_y = \int_a^b x \cdot y d x, \quad S \cdot y_c = M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 d x .$$

Звідки

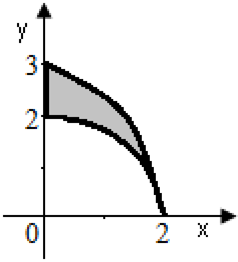
$$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b x \cdot y d x, \quad y_c = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2 d x . \tag{2.87}$$

У даному випадку з формули для ординати y_c центру мас отримуємо геометричний наслідок: $2\pi y_c S = \pi \int_a^b y^2 d x$. Права частина цієї рівності є об’ємом V тіла, отриманого обертанням плоскої фігури $A_1 A_2 A_3 A_4$ навколо осі Ox, а ліва частина є добутком площі цієї фігури на довжину кола, описаного центром мас фігури: $S \cdot 2\pi y_c = V$. Таким чином, справедлива

<u>Теорема 2.14</u> **(*друга теорема Гульдіна*)**. Об’єм тіла, отриманого обертанням плоскої фігури навколо осі, що лежить у площині цієї фігури і не перетинає її, дорівнює добутку площі цієї фігури на довжину кола, описаного її центром мас.

Приклад 188. Знайти статичні моменти та координати центру мас однорідної фігури, обмеженої еліпсом $9x^2 + 4y^2 = 36$ та колом $x^2 + y^2 = 4$, що розташоване у першій чверті координатної площини.

Розв'язання. Побудуємо дуги кола радіуса 2 з центром у початку координат та еліпса з цим же центром та півосями $a = 2$ та $b = 3$, розташованими у першій чверті, які разом із координатними осями обмежують задану фігуру.



Спочатку за формулами (2.81) і (2.82) знаходимо статичні моменти M_x, M_y даної фігури. Оскільки фігура однорідна, покладемо $\gamma(x) = 1$.

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\frac{9}{4}\left(4 - x^2\right) - \left(4 - x^2\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\int_0^2 \left(4 - x^2\right)dx = \frac{5}{8}\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{5}{8}\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{10}{3};$$

$$M_y = \int_a^b x\cdot\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx = \int_0^2 x\cdot\left(\frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2} - \sqrt{4 - x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\,dx = -\frac{1}{4}\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,d\left(4 - x^2\right) = -\frac{1}{4}\frac{\left(4 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Маса m фігури збігається з її площею. Площу заданої фігури знайдемо як різницю площі чверті круга радіуса $r = 2$ (площа круга радіуса r дорівнює πr^2) та чверті еліпса з півосями $a = 2$ та $b = 3$ (площа еліпса з півосями a і b дорівнює πab):

$$m = S = \frac{3}{2}\pi - \pi = \frac{\pi}{2}.$$

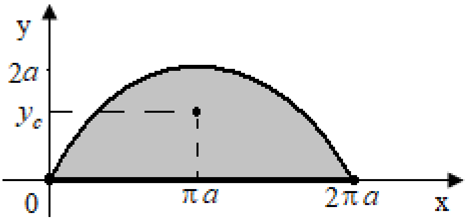
За формулами (2.87) знаходимо координати центру мас заданої фігури:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{8}{3\pi}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{20}{3\pi}.$$

Відповідь: $M_x = \frac{10}{3}$, $M_y = \frac{4}{3}$, $\left(\frac{8}{3\pi}; \frac{20}{3\pi}\right)$.

Приклад 189. Знайти статичні моменти та координати центру мас однорідної фігури, обмеженої першою аркою циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $(0 \le t \le 2\pi)$ та віссю Ox.

Розв'язання. Побудуємо фігуру.



Перший спосіб. Спочатку за формулами (2.83) і (2.84) знаходимо статичні моменти M_x, M_y даної фігури. Оскільки фігура однорідна, покладемо $\gamma(t) = 1$.

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \cdot a(1-\cos t)dt = \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt =$$

$$= \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right)dt =$$

$$= \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1 - 3\cos t + \frac{3}{2}(1+\cos 2t) - \left(1-\sin^2 t\right)\cos t)dt =$$

$$=\frac{a^3}{2}\left(t-3\sin t+\frac{3}{2}t+\frac{3}{4}\sin 2t-\sin t+\frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{a^3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 2\pi=\frac{5}{2}a^3\pi .$$

$$M_y=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a\,(t-\sin t)a\,(1-\cos t)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^2(t-\sin t)dt=a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,t\cdot dt+$$

$$+a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,d\cos t=a^3\int_0^{2\pi} t\cdot\left(1-2\cos t+\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right)dt-$$

$$-\frac{1}{3}a^3(1-\cos t)^3\Big|_0^{2\pi}=a^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}t-2t\cos t+\frac{1}{2}t\cos 2t\right)dt-\frac{a^3}{3}\cdot 0=$$

$$=\left[\int t\cos t dt=t\sin t+\cos t;\int t\cos 2t dt=\frac{1}{2}t\sin 2t+\frac{1}{4}\cos 2t\right]=$$

$$=a^3\left(\frac{3}{4}t^2-2t\sin t-2\cos t+\frac{1}{4}t\sin 2t+\frac{1}{8}\cos 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{3}{4}a^3\cdot 4\pi^2=3a^3\pi^2 .$$

Маса m фігури збігається з її площею (див. Приклад 150) і дорівнює $m=3a^2\pi$.

За формулами (2.87) знаходимо координати центру мас заданої фігури:

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{3a^3\pi^2}{3a^2\pi}=a\pi; \qquad y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{5a^3\pi}{2\cdot 3a^2\pi}=\frac{5}{6}a .$$

Відповідь: $M_x=\frac{5}{2}a^3\pi$, $M_y=3a^3\pi^2$, $\left(\pi a;\frac{5}{6}a\right)$.

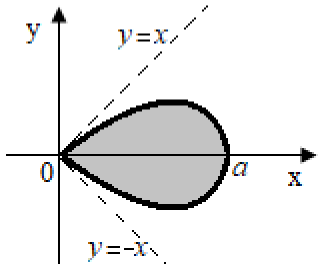
Другий спосіб. Об’єм тіла, утвореного обертанням циклоїди, дорівнює (див. Приклад 173) $V=5a^3\pi^2$. Площа фігури (див.

Приклад 150) дорівнює $S = 3a^2\pi$. Коло, що описується центром мас навколо осі Oy, має радіус y_c і довжину $2\pi y_c$, де y_c – ордината центру мас. За другою теоремою *Гульдіна-Паппа* $S \cdot 2\pi y_c = V$. Звідки $y_c = \dfrac{V}{2\pi S} = \dfrac{5}{6}a$. Фігура є симетричною відносно прямої $x = \pi a$, тому абсциса центру мас $x_c = \pi a$.

Відповідь: $\left(\pi a; \dfrac{5}{6}a\right)$.

Приклад 190. Знайти статичні моменти та координати центру мас однорідної фігури, обмеженої правою петлею лемніскати Бернуллі $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру.



Фігура симетрична відносно полярної осі, тобто відносно осі Ox. Таким чином, центр мас лежить на цій осі, тобто $M_x = 0$. Оскільки фігура однорідна, покладемо $\gamma(\varphi) = 1$.

Статичний момент правої петлі відносно осі Oy знайдемо за формулою (2.86).

$$M_y = \frac{1}{3}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \cdot \cos\varphi \, d\varphi = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^3 \cos^{\frac{3}{2}} 2\varphi \cdot \cos\varphi \, d\varphi =$$

$$=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\cos\varphi\, d\varphi=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-2\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}d\sin\varphi=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,\, d\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t dt\\ \varphi=0\Rightarrow t=0,\quad \varphi=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{array}\right]=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t dt=$$

$$=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2t+\right.$$

$$\left.+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}\left(t+\sin 2t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}\cdot\frac{3}{4}\pi=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi a^3 .$$

Знайдемо масу m фігури за формулою (2.69):

$$m=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\varphi\, d\varphi=a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\, d\varphi=\frac{a^2}{2}\sin 2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{2}$$

За формулами (2.87) знаходимо координати центру мас заданої фігури:

$$x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{16}\pi a^3}{\frac{a^2}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi a,\quad y_c=\frac{M_x}{m}=0 .$$

Відповідь: $M_x=0$, $M_y=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi a^3$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\pi a;0\right)$.

2.8.5 Моменти інерції плоскої кривої та плоскої фігури

При обертальному русі тіла інерція характеризується величиною, званою моментом інерції.

<u>Означення 2.9</u> Моментом інерції I матеріальної точки з масою m, що розташована на відстані r від осі обертання, називають добуток її маси на квадрат відстані до осі: $I = mr^2$.

Для обчислення моменту інерції будь-якого тіла його поділяють на безліч досить малих за масою елементів, кожен з яких може бути наближено прийнятий за матеріальну точку. Для кожного з цих елементів обчислюють добуток маси m на квадрат відстані r^2 центру мас елемента від центру обертання і потім підсумовують. Тоді момент інерції тіла дорівнює

$$I = \sum_{k=1}^{n} I_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \, r_k{}^2 .$$

Нехай на площині в декартовій системі координат xOy задана система n матеріальних точок $A_{\mathrm{k}}(x_k; y_k)$ з масами m_k, $\left(k = \overline{1, n}\right)$.

<u>Означення 2.10</u> *Моментами інерції* I_x і I_y системи матеріальних точок $A_{\mathrm{k}}(x_k; y_k)$ відносно осей Ox і Oy називаються суми добутків мас точок на квадрати їх відстаней до відповідної осі: $I_x = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \, y_k{}^2$, $I_y = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \, x_k{}^2$.

Визначимо моменти інерції, якщо маси не зосереджені в окремих точках, а розташовані суцільно, заповнюючи деяку плоску криву $y = f(x), x \in [a, b]$ з лінійною густиною $\gamma = \gamma(x), x \in [a, b]$.

Виділимо елемент dl цієї кривої. Оскільки густина кривої $\gamma(x)$, то маса виділеного елемента $\gamma(x)dl$. Якщо наближено прийняти цей елемент за матеріальну точку, що лежить на відстані y від осі Ox, то матимемо вираз для моменту інерції $dI_x = \gamma(x)y^2 dl$. Аналогічно для $dI_y = \gamma(x)x^2 dl$.

Якщо взяти за незалежну змінну довжину кривої, то підсумовуючи ці елементарні моменти інерції, матимемо формули для знаходження моментів інерції I_x і I_y відносно осі Ox і Oy плоскої кривої $y = f(x), x \in [a, b]$ з лінійною густиною $\gamma = \gamma(x), x \in [a, b]$:

$$I_x = \int_a^b \gamma(x) \mathrm{y}^2 dl, \tag{2.88}$$

$$I_y = \int_a^b \gamma(x) \mathrm{x}^2 dl, \tag{2.89}$$

де $dl = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$ – диференціал дуги кривої.

Момент інерції I_o відносно початку координат точки O плоскої кривої $y = f(x), x \in [a, b]$ з лінійною густиною $\gamma = \gamma(x), x \in [a, b]$ обчислюється за формулою:

$$I_o = \int_a^b \gamma(x)\left(\mathrm{x}^2 + y^2\right) dl, \tag{2.90}$$

де $dl = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$ – диференціал дуги кривої.

Якщо плоска крива з лінійною густиною $\gamma = \gamma(\mathrm{t}), t \in [t_1; t_2]$ задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$, то моменти інерції I_x і I_y відносно осі Ox і Oy обчислюються за формулами:

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} \gamma(t) y^2(t) dl, \qquad (2.91)$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} \gamma(t) x^2(t) dl, \qquad (2.92)$$

де $dl = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt$ – диференціал дуги кривої.

Якщо плоска крива з лінійною густиною $\gamma = \gamma(\varphi), \varphi \in [\alpha; \beta]$ задана в полярній системі координат (суміщеній із прямокутною декартовою системою координат) рівнянням $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha; \beta]$, то моменти інерції I_x і I_y відносно осі Ox і Oy обчислюються за формулами:

$$I_x = \int_{\alpha}^{\beta} \gamma(\varphi) \rho^2(\varphi) \sin^2 \varphi\, dl, \qquad (2.93)$$

$$I_y = \int_{\alpha}^{\beta} \gamma(\varphi) \rho^2(\varphi) \cos^2 \varphi\, dl, \qquad (2.94)$$

де $dl = \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi$ – диференціал дуги кривої.

Розглянемо плоску фігуру $A_1A_2A_3A_4$, обмежену зверху кривою A_2A_3, яка задана рівнянням $y = f(x)$, двома прямими $x = a$ та $x = b$ і віссю Ox, густина маси якої $\gamma = \gamma(x), x \in [a, b]$ (Рис. 2.16). Виберемо довільний елемент фігури у вигляді нескінченно вузької вертикальної смужки dx і будемо наближено вважати її прямокутником. Зауважимо, що для знаходження моментів інерції кожну смужку шириною dx можна розбити на елементарні прямокутники зі сторонами dx і dy. Тоді моменти інерції цих елементарних прямокутників відносно осей Ox і Oy відповідно рівні

$$\left(y+\frac{1}{2}dy\right)^2 dxdy \text{ і } \left(x+\frac{1}{2}dx\right)^2 dxdy .$$

Звідси отримаємо, що моменти інерції смужки відносно осей Ox і Oy обчислюються за формулами: $dI_x = \frac{1}{3}y^3 dx$, $dI_y = x^2 y dx$. Підсумувавши всі моменти інерції по всіх смужках, на які розбита фігура, маємо

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b \gamma(x)\mathrm{y}^3 dx , \tag{2.95}$$

$$I_y = \int_a^b \gamma(x)\mathrm{x}^2\mathrm{y}dx . \tag{2.96}$$

Полярний момент інерції, тобто момент інерції відносно початку координат, у цьому випадку обчислюється за формулою

$$I_0 = \int_a^b \gamma(x)y\left(\mathrm{x}^2 + \frac{\mathrm{y}^2}{3}\right)dx . \tag{2.97}$$

Якщо плоска фігура з лінійною густиною $\gamma = \gamma(x), x \in [a, b]$ обмежена лініями $y_2 = f_2(x)$ і $y_1 = f_1(x)$, прямими $x = a,\ x = b$ $(a < b \text{ і } y_2 \geq y_1)$, то моменти інерції I_x і I_y відносно осей Ox та Oy обчислюються за формулами

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b \gamma(x)\left(\mathrm{y}_2{}^3 - \mathrm{y}_1{}^3\right)dx , \tag{2.98}$$

$$I_y = \int_a^b \gamma(x)\mathrm{x}^2(\mathrm{y}_2 - y_1)dx . \tag{2.99}$$

Якщо плоска фігура з лінійною густиною $\gamma=\gamma(\mathrm{t}), t\in[t_1;t_2]$ обмежена кривою, заданою параметричними рівняннями $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t)\end{cases}$, $t\in[t_1,t_2]$, то моменти інерції I_x і I_y відносно осей Ox та Oy обчислюються за формулами

$$I_x=\frac{1}{3}\int_{t_1}^{t_2}\gamma(\mathrm{t})(y(t))^3\, x'(t)\,dt\,, \qquad (2.100)$$

$$I_y=\int_{t_1}^{t_2}\gamma(\mathrm{t})\,y(t)x^2(t)x'(t)\,dt\,. \qquad (2.101)$$

Якщо криволінійний сектор, з лінійною густиною $\gamma=\gamma(\varphi), \varphi\in[\alpha;\beta]$, обмежений кривою, заданою в полярній системі координат (суміщеній із прямокутною декартовою системою координат) рівнянням $\rho=\rho(\varphi), \varphi\in[\alpha;\beta]$, то моменти інерції I_x і I_y відносно осей Ox та Oy обчислюються за формулами

$$I_x=\frac{1}{4}\int_{\alpha}^{\beta}\gamma(\varphi)\cdot\rho^4(\varphi)\cdot\sin^2\varphi\, d\varphi\,, \qquad (2.102)$$

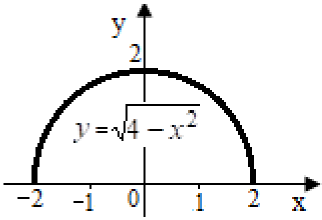
$$I_y=\frac{1}{4}\int_{\alpha}^{\beta}\gamma(\varphi)\cdot\rho^4(\varphi)\cdot\cos^2\varphi\, d\varphi\,. \qquad (2.103)$$

Зауваження 2.6 Зазвичай за моменти інерції плоских дуг і фігур приймаються відповідні моменти умовних мас, рівномірно розподілених уздовж цих дуг і фігур із густиною, що дорівнює одиниці.

Зауваження 2.7 Слід пам'ятати, що момент інерції – величина додатна.

Приклад 191. Знайти моменти інерції I_x і I_y відносно осей Ox та Oy однорідної плоскої дуги кола $y=\sqrt{4-x^2}$.

Розв'язання. Зробимо рисунок.



Моменти інерції I_x і I_y знайдемо за формулами (2.87), (2.88). Оскільки плоска дуга однорідна, то густина її – стала величина. Покладемо у формулах $\gamma(x)=1$. Знайдемо $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$. Тоді $dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{4-x^2}}\,dx=\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ і $a=-2, b=2$.

$$I_x=\int_a^b y^2\,dl=\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=2\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=$$

$$=4\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\left[\begin{array}{c}\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=x\cdot\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\\ +\dfrac{a^2}{2}arc\sin\dfrac{x}{a}\end{array}\right]=$$

$$=4\left(\frac{x}{2}\cdot\sqrt{4-x^2}+2arc\sin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^2=4\pi\,.$$

$$I_y=\int_a^b \mathrm{x}^2\,dl=\int_{-2}^{2}\frac{2\mathrm{x}^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=-4\int_0^2\frac{4-\mathrm{x}^2-4}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=$$

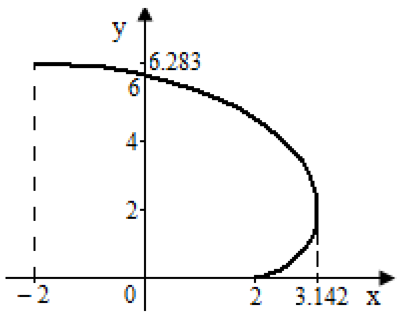
$$= -4\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx + 16\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = -4\left(\frac{x}{2}\cdot\sqrt{4-x^2} + 2arc\sin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^2 +$$

$$+16\left(arc\sin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^2 = -4\pi + 8\pi = 4\pi .$$

Відповідь: $I_x = 4\pi$, $I_y = 4\pi$.

Приклад 192. Знайти моменти інерції однорідної плоскої дуги розгортка (евольвента) кола $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t) \\ y = 2(\sin t - t\cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$ відносно осей Ox та Oy.

Розв'язання. Зробимо рисунок.



Моменти інерції I_x і I_y знайдемо за формулами (2.91), (2.92). Оскільки плоска дуга однорідна, то густина її – стала величина. Покладемо у формулах $\gamma(t) = 1$. Знайдемо $x' = 2t\cos t$, $y' = 2t\sin t$. Тоді $\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = \sqrt{4t^2\cos^2 t + 4t^2\sin^2 t} = 2t$.

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = \int_0^{\pi} 4(\sin t - t\cos t)^2\,2t\,dt =$$

$$= 8\int_0^{\pi} t\left(\sin^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t\right)dt = 8\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}(t - t\cos 2t) - \right.$$

$$-t^2 \sin 2t + \frac{1}{2}\left(t^3 + t^3 \cos 2t\right)\Big) dt = 4\int_0^{\pi} \left(t - t\cos 2t - 2t^2 \sin 2t +\right.$$

$$\left. + t^3 + t^3 \cos 2t\right) dt = 4\int_0^{\pi}\left(t + t^3\right)dt - 4\int_0^{\pi} t\cos 2t\,dt - 8\int_0^{\pi} t^2 \sin 2t dt +$$

$$+ 4\int_0^{\pi} t^3 \cos 2t dt = \left[\begin{array}{c} u = t^3, du = 3t^2 dt \\ dv = \cos 2t dt, v = \frac{1}{2}\sin 2t \end{array}\right] = 4\int_0^{\pi}\left(t + t^3\right)dt -$$

$$- 4\int_0^{\pi} t\cos 2t\,dt - 8\int_0^{\pi} t^2 \sin 2t dt + 2t^3 \sin 2t\Big|_0^{\pi} - 6\int_0^{\pi} t^2 \sin 2t dt = \left(2t^2 + t^4\right)\Big|_0^{\pi} -$$

$$- 4\int_0^{\pi} t\cos 2t\,dt - 14\int_0^{\pi} t^2 \sin 2t dt = \left[\begin{array}{c} u = t^2, du = 2t dt \\ dv = \sin 2t dt, v = -\frac{1}{2}\cos 2t \end{array}\right] = 2\pi^2 +$$

$$+ \pi^4 - 4\int_0^{\pi} t\cos 2t\,dt + 7t^2 \cos 2t\Big|_0^{\pi} - 14\int_0^{\pi} t\cos 2t\,dt = 2\pi^2 + \pi^4 + 7\pi^2 -$$

$$- 18\int_0^{\pi} t\cos 2t\,dt = \left[\begin{array}{c} u = t, du = dt \\ dv = \cos 2t dt, v = \frac{1}{2}\sin 2t \end{array}\right] = 9\pi^2 + \pi^4 - 9t\sin 2t\Big|_0^{\pi} +$$

$$+ 9\int_0^{\pi} \sin 2t\,dt = 9\pi^2 + \pi^4 - \frac{9}{2}\cos 2t\Big|_0^{\pi} = 9\pi^2 + \pi^4.$$

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = \int_0^{\pi} 4(\cos t + t\sin t)^2\, 2t dt =$$

$$= 8\int_0^{\pi} t\left(\cos^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2 \sin^2 t\right)dt = 8\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2}(t + t\cos 2t) +\right.$$

$$+ t^2 \sin 2t + \frac{1}{2}\left(t^3 - t^3 \cos 2t\right)\Big) dt = 4\int_0^{\pi} \left(t + t\cos 2t + 2t^2 \sin 2t +\right.$$

$$\left. + t^3 - t^3 \cos 2t\right) dt = 4\int_0^{\pi}\left(t + t^3\right)dt + 4\int_0^{\pi} t\cos 2t\,dt + 8\int_0^{\pi} t^2 \sin 2t dt -$$

$$-4\int_0^{\pi} t^3\cos 2t\,dt = \begin{bmatrix} u = t^3,\, du = 3t^2 dt \\ dv = \cos 2t\,dt,\, v = \frac{1}{2}\sin 2t \end{bmatrix} = 4\int_0^{\pi}\left(t + t^3\right)dt +$$

$$+4\int_0^{\pi} t\cos 2t\,dt + 8\int_0^{\pi} t^2\sin 2t\,dt - 2t^3\sin 2t\Big|_0^{\pi} + 6\int_0^{\pi} t^2\sin 2t\,dt = \left(2t^2 + t^4\right)\Big|_0^{\pi} +$$

$$+4\int_0^{\pi} t\cos 2t\,dt + 14\int_0^{\pi} t^2\sin 2t\,dt = \begin{bmatrix} u = t^2,\, du = 2t\,dt \\ dv = \sin 2t\,dt,\, v = -\frac{1}{2}\cos 2t \end{bmatrix} = 2\pi^2 +$$

$$+\pi^4 - 4\int_0^{\pi} t\cos 2t\,dt - 7t^2\cos 2t\Big|_0^{\pi} + 14\int_0^{\pi} t\cos 2t\,dt = 2\pi^2 + \pi^4 - 7\pi^2 +$$

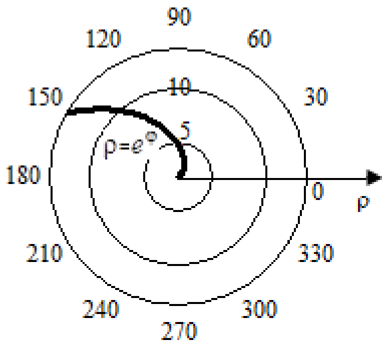
$$+14\int_0^{\pi} t\cos 2t\,dt = \begin{bmatrix} u = t,\, du = dt \\ dv = \cos 2t\,dt,\, v = \frac{1}{2}\sin 2t \end{bmatrix} = -5\pi^2 + \pi^4 + 7t\sin 2t\Big|_0^{\pi} -$$

$$-7\int_0^{\pi}\sin 2t\,dt = -5\pi^2 + \pi^4 + \frac{7}{2}\cos 2t\Big|_0^{\pi} = \pi^4 - 5\pi^2$$

Відповідь: $I_x = 9\pi^2 + \pi^4$, $I_y = \pi^4 - 5\pi^2$.

Приклад 193. Знайти моменти інерції I_x і I_y відносно осей Ox та Oy однорідної плоскої дуги логарифмічної спіралі $\rho = e^{\varphi}$, $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6}$.

Розв'язання. Зробимо рисунок.



Моменти інерції I_x і I_y знайдемо за формулами (2.93), (2.94). Оскільки плоска дуга однорідна, то густина її – стала величина. Покладемо у формулах $\gamma(\varphi)=1$. Знайдемо $\rho' = e^{\varphi}$. Тоді $dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi = \sqrt{e^{2\varphi} + e^{2\varphi}}\, d\varphi = e^{\varphi}\sqrt{2}\, d\varphi$ і $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5\pi}{6}$.

$$I_x = \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\sin^2\varphi\, dl = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} e^{2\varphi}\sin^2\varphi\, e^{\varphi}\sqrt{2}\, d\varphi = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} e^{3\varphi}\sin^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} e^{3\varphi}(1-\cos 2\varphi)\, d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(e^{3\varphi} - e^{3\varphi}\cdot\cos 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \left[\int e^{\alpha x}\cos\beta x\, dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{3}e^{3\varphi} -\right.$$

$$\left.- \frac{1}{13}\cdot e^{3\varphi}(3\cos 2\varphi + 2\sin 2\varphi)\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{3}e^{\frac{5\pi}{2}} - \frac{1}{13}e^{\frac{5\pi}{2}}\right..$$

$$\cdot\left(3\cos\frac{5\pi}{3}+2\sin\frac{5\pi}{3}\right)-\frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{13}e^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos\frac{\pi}{3}+2\sin\frac{\pi}{3}\right)\Bigg)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{\frac{5\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{13}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)-e^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{13}\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{156}\left(e^{\frac{5\pi}{2}}\left(17+6\sqrt{3}\right)-e^{\frac{\pi}{2}}\left(17-6\sqrt{3}\right)\right).$$

$$I_y=\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\cos^2\varphi\,dl=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}e^{2\varphi}\cos^2\varphi\,e^{\varphi}\sqrt{2}\,d\varphi=\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}e^{3\varphi}\cos^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}e^{3\varphi}\left(1+\cos 2\varphi\right)d\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(e^{3\varphi}+e^{3\varphi}\cdot\cos 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\left[\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{3}e^{3\varphi}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{13}e^{3\varphi}\left(3\cos 2\varphi+2\sin 2\varphi\right)\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{3}e^{\frac{5\pi}{2}}+\frac{1}{13}e^{\frac{5\pi}{2}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(3\cos\frac{5\pi}{3}+2\sin\frac{5\pi}{3}\right)-\frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{13}e^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos\frac{\pi}{3}+2\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{\frac{5\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{13}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)-e^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{13}\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)\right)\right)\right)=$$

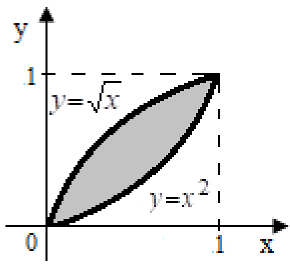
$$=\frac{\sqrt{2}}{156}\left(e^{\frac{5\pi}{2}}\left(35-6\sqrt{3}\right)-e^{\frac{\pi}{2}}\left(35+6\sqrt{3}\right)\right).$$

Відповідь: $I_x=\frac{\sqrt{2}}{156}\left(e^{\frac{5\pi}{2}}\left(17+6\sqrt{3}\right)-e^{\frac{\pi}{2}}\left(17-6\sqrt{3}\right)\right)$,

$$I_y=\frac{\sqrt{2}}{156}\left(e^{\frac{5\pi}{2}}\left(35-6\sqrt{3}\right)-e^{\frac{\pi}{2}}\left(35+6\sqrt{3}\right)\right).$$

Приклад 194. Знайти моменти інерції I_x і I_y однорідної фігури, обмеженої лініями $y=x^2$ та $y=\sqrt{x}$ відносно осей Ox та Oy.

Розв'язання. Побудуємо задану фігуру. Лінії $y=x^2$ і $y=\sqrt{x}$ перетинаються у точках $(0;0)$ і $(1;1)$, тобто $x\in[0;1]$.



Моменти інерції I_x і I_y знайдемо за формулами (2.97), (2.98). Оскільки фігура однорідна, то густина її – стала величина. Покладемо у формулах $\gamma(x)=1$, $y_1=x^2$, $y_2=\sqrt{x}$, $a=0,\ b=1$.

$$I_x=\frac{1}{3}\int_a^b\left(y_2{}^3-y_1{}^3\right)dx=\frac{1}{3}\int_0^1\left(x^{1,5}-x^6\right)dx=\frac{1}{3}\left(\frac{x^{2,5}}{2,5}-\frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{35}=\frac{3}{35}.$$

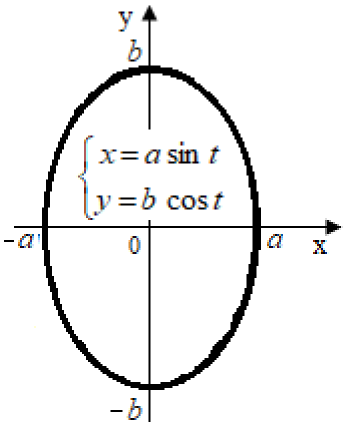
$$I_y=\int_a^b x^2\left(y_2-y_1\right)dx=\int_0^1 x^2\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\int_0^1\left(x^{2,5}-x^4\right)dx=$$

$$= \int_0^1 \left(x^{2,5} - x^4\right) dx = \left.\left(\frac{x^{3,5}}{3,5} - \frac{x^5}{5}\right)\right|_0^1 = \frac{2}{7} - \frac{1}{5} = \frac{3}{35}.$$

Відповідь: $I_x = \dfrac{3}{35}$, $I_y = \dfrac{3}{35}$.

Приклад 195. Знайти моменти інерції I_x і I_y однорідної фігури, обмеженої лінією $\begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\cos t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$ відносно осей Ox та Oy.

Розв'язання. Маємо рівняння еліпса. Зробимо рисунок.



При зміні t від 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ відбувається зростання x від 0 до a. У силу симетрії фігури відносно осей координат достатньо знайти моменти інерції четвертої частини її за формулами (2.99) та (2.100) і отримані результати збільшити в чотири рази. Оскільки фігура однорідна, то густина її – стала величина. Покладемо у формулах $\gamma(t) = 1$. Маємо $x'(t) = a\cos t$, $t_1 = 0,\ t_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

$$I_x = \frac{4}{3}\int_{t_1}^{t_2} \left(y(t)\right)^3 x'(t)\,dt = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} b^3\, a\cos^4 t\,dt = \frac{4}{3}ab^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}ab^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos 2t\right)^2 dt = \frac{1}{3}ab^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{3}ab^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2t+\frac{1}{2}\left(1+\cos 4t\right)\right)dt = \frac{1}{3}ab^3\left(\frac{3}{2}t+\sin 2t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab^3\pi}{4}.$$

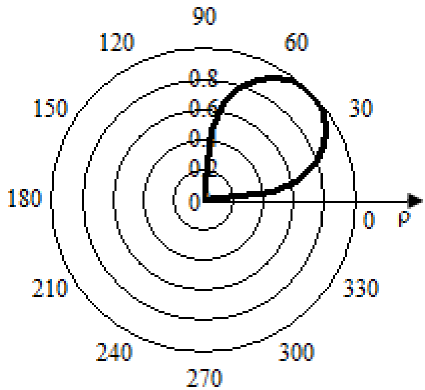
$$I_y = 4\int_{t_1}^{t_2} y(t)x^2(t)x'(t)\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\,a^3\sin^2 t\cos^2 t\,dt = a^3 b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt =$$

$$= \frac{a^3 b}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos 4t\right)dt = \frac{a^3 b}{2}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3 b\pi}{4}.$$

Відповідь: $I_x = \dfrac{ab^3\pi}{4}$, $I_y = \dfrac{a^3 b\pi}{4}$.

Приклад 196. Знайти моменти інерції I_x і I_y однорідної фігури, обмеженої лінією $\rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ відносно осей Ox та Oy.

Розв'язання. Зробимо рисунок.



Фігура обмежена кривою, заданою в полярній системі координат (суміщеній із прямокутною декартовою системою координат), тому моменти інерції I_x і I_y відносно осей Ox та Oy обчислюються за формулами (2.102), (2.103).

Оскільки фігура однорідна, то густина її – стала величина. Покладемо у формулах $\gamma(\varphi)=1$, $\alpha=0$, $\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

$$I_x=\frac{1}{4}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^4(\varphi)\cdot\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi\cdot\sin^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos4\varphi)\cdot\frac{1}{2}(1-\cos2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{16}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos2\varphi-\cos4\varphi+\cos4\varphi\cdot\cos2\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{16}\left\{\varphi-\frac{1}{2}\sin2\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\sin4\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{16}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(\cos2\varphi+\cos6\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{16}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{32}\left(\frac{1}{2}\sin2\varphi+\right.$$

$$+\frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{32}.$$

$$I_y=\frac{1}{4}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^4(\varphi)\cdot\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi\cdot\cos^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 4\varphi)\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{16}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi-\cos 4\varphi-\cos 4\varphi\cdot\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{1}{16}\Big\{\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi-$$

$$-\frac{1}{4}\sin 4\varphi\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{16}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(\cos 2\varphi+\cos 6\varphi)d\varphi=\frac{1}{16}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{32}\Big(\frac{1}{2}\sin 2\varphi+$$

$$+\frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{32}.$$

Відповідь: $I_x=\frac{\pi}{32}$, $I_y=\frac{\pi}{32}$.

2.8.6 Задачі для самостійної роботи

1. Знайти масу однорідного стержня довжиною $2\,\text{м}$, обмеженого замкненою поверхнею, утвореною обертанням навколо осі Ox лінії $y=10^{-3}\left(4+12x-3x^2\right)$ при $x=0, x=2$, густина матеріалу стержня $\gamma=6\cdot 10^3$ кг/м³.

Відповідь: $m=5{,}91\,\text{кг}$.

2. Знайти масу неоднорідного стержня завдовжки $40\,\text{см}$, якщо його лінійна густина змінюється за законом $\gamma(x)=2x^2+1\,\text{кг/м}$.

Відповідь: $m \approx 0{,}44$ кг.

3. Знайти статичні моменти M_x, M_y та координати центра мас $C(x_c, y_c)$ для однорідної кривої L або для однорідної фігури Φ, обмеженої заданими лініями.

Завдання	Відповідь
1. L: відрізок прямої $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$, обмежений осями координат	$M_x=10$, $M_y=7{,}5$, $C(2;1{,}5)$
2. L: дуга ланцюгової лінії $y=4\,\mathrm{c}h\frac{x}{4}$, $-4\le x\le 4$.	$M_x=8(2+sh2)$, $M_y=0$, $C\left(0;\frac{2+sh2}{sh1}\right)$
3. L: астроїді $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=5^{\frac{2}{3}}$, розташована в І чверті.	$M_x=15$, $M_y=15$, $C(2;2)$
3. L: дуга ланцюгової лінії $y=4\,\mathrm{c}h\frac{x}{4}$, $-4\le x\le 4$.	$M_x=8(2+sh2)$, $M_y=0$, $C\left(0;\frac{2+sh2}{sh1}\right)$
4. L: астроїді $\begin{cases} x=2\cos^3\frac{t}{4} \\ y=2\sin^3\frac{t}{4} \end{cases}$ розташована в І чверті.	$M_x=2{,}4$, $M_y=2{,}4$, $C(0{,}8;0{,}8)$
5. L: $\rho=2\sin\varphi$ від т. $(0;0)$ до т. $\left(\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)$	$M_x=1$, $M_y=0{,}5(\pi-2)$, $C\left(\frac{2}{\pi};\frac{\pi-2}{\pi}\right)$

Завдання	Відповідь
6. $L:\ \rho=5e^{\varphi},\quad \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi$	$M_x=5\sqrt{2}\left(e^{2\pi}-2e^{\pi}\right)$, $M_y=-5\sqrt{2}\left(2e^{2\pi}+e^{\pi}\right)$, $C(-59{,}69;26{,}69)$
7. $\Phi:\ y=\sin x$, відрізок Ox від $x=0$ до $x=\pi$	$M_x=\frac{\pi}{4}, M_y=\pi, C\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{8}\right)$
8. Φ: еліпс $\begin{cases}x=3\cos t\\ y=4\sin t\end{cases}$ розташований в I чверті	$M_x=16, M_y=12, C\left(\frac{4}{\pi};\frac{16}{3\pi}\right)$
9. $\Phi:\ \begin{cases}x^2=20y\\ y^2=20x\end{cases}$	$M_x=1200, M_y=1200$, $C(9;9)$
10. Φ: сектор $\begin{cases}x=6\cos t\\ y=6\sin t\end{cases}$, $\frac{\pi}{3}\le t\le\frac{2\pi}{3}$	$M_x=0, M_y=72, C\left(\frac{2}{\pi};0\right)$
11. Φ: кардіоїда $\rho=6(1+\cos\varphi)$	$M_x=0, M_y=240\pi$, $C(5;0)$

2.8.7 Застосування визначеного інтеграла до розв'язання деяких фізичних задач

Робота змінної сили

Нехай матеріальна точка M рухається під дією змінної сили $\vec{F}=\vec{F}(x)$, спрямованої вздовж осі Ox, де x – абсциса рухомої точки M. Знайдемо роботу A сили $\vec{F}$ по переміщенню точки M вздовж осі Ox від точки $x=a$ до точки $x=b$ $(a<b)$. Для цього відрізок $[a,b]$ розіб'ємо точками $x_0=a$, x_1, $x_2,\ldots$, $x_n=b$ на n елементарних відрізків $\lfloor x_{i-1};x_i\rfloor$, $i=\overline{1,n}$. Якщо довжина Δx_i відрізка $\lfloor x_{i-1};x_i\rfloor$ є достатньо малою, то сила $\vec{F}$ на цьому відрізку

змінюється незначно і її можна наближено вважати на цьому відрізку сталою величиною, що дорівнює значенню функції $F = F(x)$ у довільно вибраній точці $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Тому робота, виконана силою $\vec{F}$ на відрізку $[x_{i-1}; x_i]$, наближено дорівнює добутку $F(\xi_i) \cdot \Delta x_i$. Наближене значення роботи A сили $\vec{F}$ по переміщенню матеріальної точки M з положення $x = a$ у положення $x = b$ дорівнює $A_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) \cdot \Delta x_i$. Точність цього наближення зростає при зменшенні довжин Δx_i елементарних відрізків, на які було поділено $[a, b]$. Тому за точне значення роботи можна прийняти границю, до якої прямує сума A_n, коли найбільша довжина λ довжин елементарних відрізків прямує до нуля, тобто $A = \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ \lambda \to 0}} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b F(x)\,dx$.

Фізичний зміст визначеного інтеграла полягає у тому, що робота змінної сили $\vec{F}$, величина якої є неперервною функцією $F = F(x)$, діючою на відрізку $[a, b]$, дорівнює визначеному інтегралу від величини сили $F(x)$, взятому по відрізку $[a, b]$:

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{2.103}$$

Залежність між об’ємом V і тиском p газу при ізотермічній зміні стану газу, тобто постійній температурі, відповідно до закону Бойля-Маріотта, має вигляд $pV = p_0 \mathrm{v}_0 = c$, де c – const. Робота при зміні об’єму газу від значення V_1 до V_2 визначається за формулою

$$A=\int_{V_1}^{V_2} p\,dV \tag{2.104}$$

або на підставі закону Бойля-Маріотта за формулою

$$A=c\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}=c\ln\frac{V_2}{V_1}=c\ln\frac{p_1}{p_2}, \tag{2.105}$$

де p_1 і p_2 – тиск на початку та наприкінці процесу.

Робота, що витрачається на стиснення газу в циліндрі при зміні положення поршня на величину h, знаходиться за формулою

$$A=c\int_{0}^{h}\frac{dx}{H-x}, \tag{2.106}$$

де H – висота циліндра.

У разі адіабатичного процесу, коли при розширенні об’єму газу температура знижується, а при стисненні – підвищується, об’єм V і тиск пов'язані співвідношенням Пуассона $pV^k=p_0\mathrm{v}_0^{\mathrm{k}}=c-const$, де k – постійна для даного газу величина, завжди більше одиниці (для повітря $k=1{,}4$).

Робота, при адіабатичній зміні об’єму газу дорівнює

$$A=c\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V^k}=\frac{c}{1-k}\left(V_2^{\,1-k}-V_1^{\,1-k}\right). \tag{2.107}$$

При русі поршня в циліндрі робота визначається, відповідно, за формулою

$$A=\frac{c}{S^{k-1}}\int_{0}^{h}\frac{dx}{(H-x)^k}=\frac{p_0V_0^{\,k}}{S^{k-1}(k-1)}\left(\frac{1}{(H-h)^{k-1}}-\frac{1}{H^{k-1}}\right), \tag{2.108}$$

де S – площа поршня.

Кожна з наведених нижче задач вимагає застосування відповідних законів фізики, але всі вони вирішуються, підкоряючись загальній схемі:

1) обчислення елементарної роботи $\Delta \mathrm{A}_i$;

2) побудова інтегральної суми $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta \mathrm{A}_i$;

3) перехід до границі: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta \mathrm{A}_i = \int\limits_a^b dA$.

Єдиного підходу вимагають також задачі на обчислення роботи, яку потрібно докласти при відкачуванні рідини з резервуарів різної форми, засипанні піску у вигляді купи певної форми тощо.

Для вирішення таких задач слід розбити тіло висотою H на n елементарних шарів і знайти роботу ΔA_i $(i = 1,2,...,n)$, яку потрібно затратити на підняття i-го елементарного шару на висоту h_i. Підсумувавши ΔA_i і переходячи до границі при $n \to \infty$, знайдемо

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \int_0^H dA .$$

Величину ΔA_i визначаємо виходячи з того, що робота дорівнює добутку ваги ΔP_i елементарного шару цього тіла на висоту його підняття h_i:

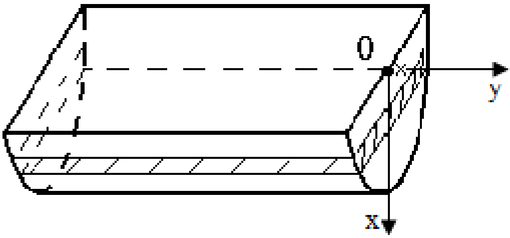
$$\Delta A_i = \Delta \mathrm{P}_i \cdot h_i = S(h_i) \cdot \Delta h_i \cdot \gamma \cdot g \cdot h_i ,$$

де $S(h_i)$ – площа елементарного шару на висоті h_i; Δh_i – товщина цього шару; γ – густина матеріалу, що заповнює шар. Таким чином, в разі однорідного матеріалу $(\gamma = const)$

$$A = \gamma g \int_0^H S(h) h \cdot dh .$$

Приклад 197. Знайти роботу, затрачену на викачування води з корита, що має форму напівциліндра, довжина якого a, радіус r.

Розв'язання. Об'єм елементарного шару води, що перебуває на глибині x і має довжину a, ширину $m = 2\sqrt{r^2 - x^2}$ і товщину dx, дорівнює $dV = amdx = 2a\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$.



Елементарна робота, що здійснюються для підняття цього шару води на висоту x, дорівнює $dA = 2\gamma g\,ax\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$, де γ – густина води.

Отже,

$$A = 2\gamma g\,a\int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = -\gamma g\,a\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,d\left(r^2 - x^2\right) =$$

$$= -\frac{2}{3}\gamma g\,a\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^r = \frac{2}{3}\gamma g\,ar^3.$$

Відповідь: $A = \dfrac{2}{3}\gamma g\,ar^3$.

Приклад 198. Знайти затрачену роботу при стисненні буферної пружини залізничного вагону на $0{,}05$ м, якщо для стиснення цієї пружини на $0{,}01$ м витрачається сила 3000 Н?

Розв'язання. Згідно із законом Гука, модуль сили пружності пропорційний деформації пружини, тобто $F = kx$, де k – коефіцієнт пропорційності, а x – стиснення пружини.

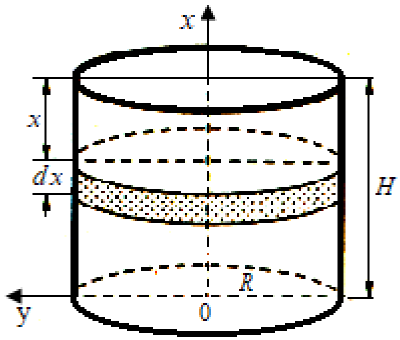
З умови задачі $\mathrm{F} = 3000\,\mathrm{H}$, при $x = 0{,}01\,\mathrm{м}$. Визначимо k: $k = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{x}} = \frac{3000}{0{,}01} = 300000$ (Н/м), отже $F = 300000x$. Тоді шукана робота за формулою (2.103) дорівнює

$$A = \int_0^{0,05} F(x)\,dx = \int_0^{0,05} 300000x\,dx = 300000 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0,05} = 150000(0{,}05)^2 = 375$$

Відповідь: $A = 375$ Дж.

Приклад 199. Знайти роботу, яку необхідно затратити, щоб викачати через край рідину з вертикального циліндричного резервуара висоти H м і радіусом основи R м.

Розв'язання. Введемо систему координат. Розглянемо рисунок.



Робота, що затрачується на підняття тіла вагою p на висоту h, дорівнює $p \cdot h$. Але різні шари рідини в резервуарі знаходяться на різних глибинах і висота підняття (до краю резервуара) різних шарів не однакова.

Робота, що затрачується на викачування з резервуара шару рідини товщиною x $(0 \le x \le H)$, є функцією від x, тобто $A = A(x)$, де $0 \le x \le H$ $\left(A(0) = 0,\ A(H) = A_0\right)$.

Знайдемо головну частину приросту ΔA при зміні x на величину $\Delta x = dx$, тобто знаходимо диференціал dA функції $A(x)$.

Враховуючи малість dx вважаємо, що "елементарний" шар рідини перебуває на одній глибині x (від краю резервуара). Тоді $dA = xdp$, де dp – вага цього шару; вона дорівнює $g\gamma dV$, де g – прискорення вільного падіння, γ – густина рідини, dV – об'єм "елементарного" шару рідини (на рисунку він виділений), тобто $dp = g\gamma dV$. Об'єм зазначеного шару рідини, очевидно, дорівнює $\pi R^2 dx$, де dx – висота циліндра (шару), πR^2 – площа його з основи, тобто $dV = \pi R^2 dx$.

Таким чином, $dp = g\gamma \cdot \pi R^2 dx$ і $dA = x \cdot g\gamma\pi R^2 dx$.

Інтегруючи отриману рівність в межах від $x = 0$ до $x = H$, знаходимо роботу A:

$$A = \int_0^{A_0} dA = \int_0^H xg\gamma\pi R^2 dx = g\gamma\pi R^2 \int_0^H xdx = g\gamma\pi R^2 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^H =$$

$$= \frac{1}{2} g\gamma\pi R^2 H^2 \text{(Дж.)}.$$

Відповідь: $A = \frac{1}{2} g\gamma\pi R^2 H^2$ Дж.

Приклад 200. Електричний заряд e_1, розташований на початку координат, відштовхує заряд e_2 з точки $(x_1; 0)$ у точку $(x_2; 0)$. Знайти роботу A сили відштовхування F.

Розв'язання. Відомо, що електричні заряди відштовхуються з силою $F = \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}$, де e_1 та e_2 – величини зарядів, r – відстань між ними.

Диференціал роботи сили F на переміщенні dx дорівнює :

$$dA = F(x)dx = \frac{e_1 \cdot e_2}{x^2} dx.$$

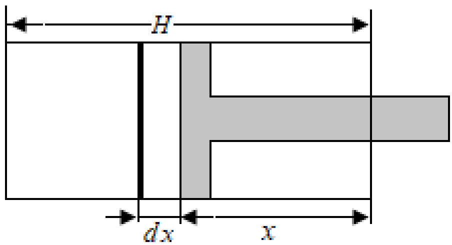
Звідси знаходимо:

$$A=\int_{x_1}^{x_2}F(x)dx=e_1e_2\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^2}=-e_1e_2\frac{1}{x}\Bigg|_{x_1}^{x_2}=e_1e_2\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right).$$

Відповідь: $A=e_1e_2\left(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right)$.

Приклад 201. Газ під атмосферним тиском $p_0=10330$ кг/м^2 закритий рухомим поршнем у циліндрі висотою $H=1{,}2$ м і радіусом $R=0{,}35$ м. Знайти роботу, затрачену на ізотермічний стиск газу при переміщенні поршня на відстань $h=0{,}8$ м всередині циліндру (температуру газу вважати постійною).

Розв'язання. Згідно закону Бойля-Маріотта при ізотермічній зміні стану газу, коли його температура залишається незмінною, залежність між об'ємом V і тиском p газу виражається формулою $pV=p_0\text{v}_0=c$, де c – const.



Якщо поршень зайде на x м всередину циліндра, то тиск $p(x)$ газу на одиницю площі S поршня буде

$$p(x)=\frac{c}{V(x)}=\frac{c}{S(H-x)},$$

а тиск на всю площу S поршня буде $P(x)=S\,p(x)=\dfrac{c}{H-x}$.

Вважаючи, що робота, яка затрачується при русі всередину поршня на x м, є деяка функція $A(x)$, і припускаючи, що при подальшому русі поршня всередину на малу відстань dx

випробуваний ним тиск $p(x)$ залишається незмінним, знайдемо наближену величину приросту (диференціал) функції $A(x)$:

$$\Delta A \approx P(x)dx = \frac{c}{H-x}dx = dA .$$

Шуканій роботі A відповідає зміна x від 0 до h, тому

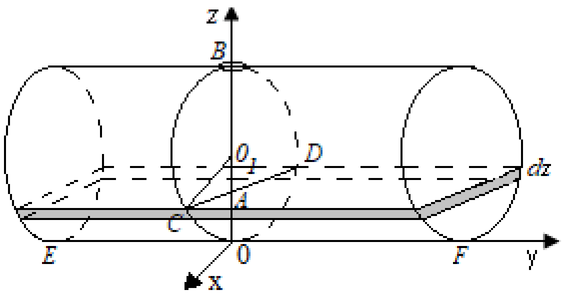
$$A = \int_0^h \frac{c}{H-x}dx = -c\,ln\left|H-x\right|\Big\|_0^h = c\ln\left|\frac{H}{H-h}\right| .$$

При $H = 1{,}2$ м, $R = 0{,}35$ м, $h = 0{,}8$ м, $p_0 = 10330$ кг/м^2 знайдемо $V_0 = \pi R^2 H = 0{,}147\pi$ (м^3), $c = p_0 V_0 = 1518{,}51\pi$, $A \approx 12528{,}97\,кГм$.

Відповідь: $A \approx 12528{,}97\,кГм = 122909{,}2\,Дж$.

Приклад 202. Знайти роботу, яку необхідно затратити на викачування води з резервуара у формі лежачого на боці кругового циліндра довжиною $h = 5$ м і радіусом основи $R = 1$м, через отвір, який розташовано зверху ємності. Питома вага води $\rho = 9{,}81$ кН/м^3?

Розв'язання. Зробимо рисунок.



Маємо $EF = h$, $BO = 2R$, $CO_1 = R$. Позначимо $AB = z$, $CD = x$. Тоді $CA = \frac{x}{2}$. Робота, що витрачається на викачування з резервуара шару рідини товщиною z $(0 \le z \le 2R)$, є функцією від z, тобто $A = A(z)$. Знайдемо диференціал цієї функції.

При збільшенні z на величину dz об'єм v шару води збільшиться на величину $\Delta v = hxdz = dv$, його вага p збільшиться на величину $\Delta p = \rho hxdz = dp$, а затрачувана робота збільшиться на величину $\Delta A = \rho hxzdz = dA$.

Виразимо x через z. З трикутника ACO_1 маємо $CO_1{}^2 = CA^2 + AO_1{}^2$. Звідси $CA = \sqrt{CO_1{}^2 - AO_1{}^2}$, де $AO_1 = z - R$. Тоді $CA = \sqrt{R^2 - (z-R)^2}$ і $x = 2\sqrt{R^2 - (z-R)^2}$.

Шукану роботу знайдемо інтегруючи $dA = 2\rho h\sqrt{R^2 - (z-R)^2}\, zdz$ в межах від $z = 0$ до $z = 2R$.

$$A = \int_0^{2R} 2\rho h\sqrt{R^2 - (z-R)^2}\, zdz = 2\rho h\int_0^{2R} \sqrt{R^2 - (z-R)^2}\, zdz =$$

$$= \left[\begin{array}{l} z - R = R\sin t,\, t_{\text{н}} = -\dfrac{\pi}{2} \\ dz = R\cos t\,dt,\, t_{\text{в}} = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right] = 2\rho h\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^3\cos^2 t\,(1 + \sin t)dt =$$

$$= 2\rho hR^3\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\; dt + \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\sin t\,dt}_{=0}\right) = \rho hR^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt =$$

$$= \rho hR^3\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \rho hR^3\pi.$$

При $h = 5\,\text{м}$, $R = 1\,\text{м}$, $\rho = 9{,}81\,\text{кН/м}^3$ робота по викачуванню води з резервуара $A \approx 154\,\text{кДж}$.

Відповідь: $A \approx 154\,\text{кДж}$.

Приклад 203. Крапля з початковою масою M падає під дією сили тяжіння і рівномірно випаровується, втрачаючи щомиті масу, рівну m. Яка робота сили тяжіння за час від початку руху до повного випаровування краплі? (Опором повітря нехтуємо).

Розв'язання. Через t секунд від початку падіння маса краплі буде дорівнює $M - mt$. Знайдемо момент часу T, коли крапля повністю випарується, Оскільки до цього моменту $M - mT = 0$, то $T = \dfrac{M}{m}$, тобто $t \in \left[0; \dfrac{M}{m}\right]$.

Елементарна робота ΔA_i, здійснена силою тяжіння за час $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, приблизно дорівнює

$$\Delta A_i \approx (M - mt_i)g \cdot \Delta S_i,$$

де ΔS_i – шлях, пройдений краплею за час Δt_i; g – прискорення вільного падіння; $(M - mt_i)g$ – сила тяжіння.

Вважаємо при цьому, що за час Δt_i маса краплі залишається постійною, рівною масі краплі в початковий момент t_i. Величина $\Delta A_i > 0$, Оскільки напрямок руху збігається з напрямком сили тяжіння, враховуючи, що $\Delta S_i \approx V_i \Delta t_i$ і те, що при відсутності опору $V_i = gt_i$, отримуємо $\Delta A_i = (M - mt_i)g^2 t_i \Delta t_i$. Тоді

$$A = \int_0^{\frac{\mathrm{M}}{m}} (\mathrm{M} - mt)g^2 \cdot t\,dt = g^2 \left(\frac{\mathrm{M}t^2}{2} - \frac{mt^3}{3} \right)\Bigg|_0^{\frac{M}{m}} = \frac{g^2 \mathrm{M}^3}{6m^2}.$$

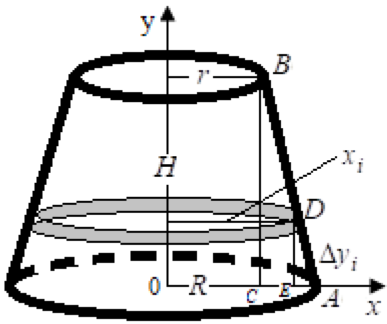
Відповідь: $A = \dfrac{g^2 \mathrm{M}^3}{6m^2}$.

Приклад 204. Яку роботу потрібно провести, щоб насипати купу піску в формі усіченого конуса висоти H, з радіусами основ R та r $(r < R)$? Густина піску дорівнює γ, пісок піднімають з поверхні Землі, на якій міститься більша основа конуса.

Розв'язання. Дотримуючись загальної схеми, розіб'ємо усічений конус на елементарні шари. Припустимо, що елементарний шар має форму кругового циліндра висотою Δy_i і радіуса x_i. Тоді об’єм елементарного шару $\Delta V_i = \pi x_i^2 \Delta y_i$, а маса піску, що заповнює цей шар: $\Delta m_i \approx \gamma \cdot \pi x_i^2 \Delta y_i$. Робота, що затрачується на підняття одного шару піску на висоту y_i:

$$\Delta \mathrm{A}_i \approx \gamma \cdot g \cdot \pi x_i^2 y_i \cdot \Delta y_i .$$

Виразимо величину x_i через y_i. Розглянемо рисунок



З подібності трикутників ABC і ADE маємо

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{ED} \text{ або } \frac{R-r}{H} = \frac{R-x_i}{y_i},$$

звідки $x_i = \dfrac{RH-(R-r)y_i}{H}$.

Тоді $\Delta \mathrm{A}_i = \gamma g \pi \left(\dfrac{RH-(R-r)y_i}{H}\right)^2 y_i \Delta y_i$, а інтегральна сума – $\dfrac{\gamma \pi g}{H^2}\sum_{i=1}^{n}\left(RH-(R-r)y_i\right)^2 y_i \Delta y_i$. Переходячи до границі, отримуємо роботу

$$\mathrm{A} = \frac{\gamma \pi g}{H^2}\int_0^H (RH-(R-r)y)^2\, y\,dy = \frac{\gamma \pi g H^2}{12}(R^2+2Rr+3r^2).$$

Відповідь: $A = \dfrac{\gamma \pi g H^2}{12}(R^2+2Rr+3r^2)$.

Приклад 205. Розміри піраміди Хеопса приблизно такі: висота $H = 140$ м, ребро основи (квадрата) $a = 200$ м. Густина каменю, з якого вона зроблена, приблизно $\gamma = 2{,}5\,\text{г/см}^3$. Обчислити роботу, витрачену при її будівництві на подолання сили тяжіння.

Розв'язання. Виділимо елементарний шар піраміди з висотою Δy_i, приймаючи цей шар за пряму призму з площею основи S_i. Маса каменю, що заповнює цей шар піраміди, $\Delta m_i = \gamma \cdot S_i \cdot \Delta y_i$, а робота, необхідна для підняття цього шару на висоту y_i, $\Delta \text{A}_i = \gamma \cdot S_i \Delta y_i \cdot g \cdot y_i$.

Величину S_i знайдемо із співвідношення

$$\frac{S_i}{S_{OCH}} = \frac{H_i^2}{H^2};\ S_{OCH} = a^2;\ H_i = H - y_i;\ S_i = \frac{a^2 (H - y_i)^2}{H^2}.$$

Тоді $\Delta \text{A}_i = \gamma \cdot g \dfrac{a^2}{H^2} (H - y_i)^2 y_i \cdot \Delta y_i$.

Підсумовуючи і переходячи до границі, отримуємо роботу

$$A = \gamma g \frac{a^2}{H^2} \int_0^H y (H - y)^2 dy = \frac{\gamma g a^2 H^2}{12}.$$

Враховуючи, що $\gamma = 2{,}5\,\text{г/см}^3 = 25 \cdot 10^2\ \text{кг/м}^3$, і підставляючи значення a і H, отримуємо

$$\text{A} \approx \frac{1}{12} \cdot 25 \cdot 10^2 \cdot 9{,}8 \cdot 200^2 \cdot 140^2 \approx 1{,}6 \cdot 10^{12}\ \text{(Дж)}.$$

Відповідь: $A \approx 1{,}6 \cdot 10^{12}$ Дж.

Шлях, пройдений тілом

Нехай матеріальна точка переміщується по прямій з змінною швидкістю $v = v(t)$. Знайдемо шлях s, пройдений нею за проміжок часу від t_1 до t_2.

З фізичного змісту похідної відомо, що при русі точки в одному напрямку "швидкість прямолінійного руху дорівнює похідній від шляху за часом", тобто $v(t)=\frac{ds}{dt}$. Звідси випливає, що $ds=v(t)dt$. Інтегруючи отримане рівняння в межах від t_1 до t_2, матимемо

$$s=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \,. \qquad (2.109)$$

Приклад 206. Швидкість падіння парашутиста визначається формулою $v(t)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right)$, де g – прискорення вільного падіння, m – маса парашутиста, k – коефіцієнт пропорційності, що залежить від розмірів парашута. Визначити, з якої висоти стрибав парашутист, якщо падіння продовжувалося три хвилини.

Розв'язання. Оскільки закон зміни швидкості відомий, висоту падіння визначимо за формулою (2.109), де $t_1=0$, а $t_2=3\cdot 60=180$ (с).

$$s=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt=\frac{mg}{k}\int_0^{180}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right)dt=\frac{mg}{k}\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{kt}{m}}\right)\Bigg|_0^{180}=$$

$$=\frac{mg}{k}\left(180+\frac{m}{k}e^{-\frac{180k}{m}}-\frac{m}{k}\right)\text{(м)}.$$

Відповідь: $s=\frac{mg}{k}\left(180+\frac{m}{k}e^{-\frac{180k}{m}}-\frac{m}{k}\right)$ м.

Приклад 207. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t)=\left(3t^2+1\right)$ м/с. Знайти шлях, який пройшло тіло за п'яту секунду від початку руху.

Розв'язання. Шлях, який тіло пройде за п'яту секунду від початку руху, обчислюється за формулою (2.109), де $t_1 = 4$, а $t_2 = 5$.

$$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \int\limits_4^5 \left(3t^2 + 1\right)dt = \left(t^3 + t\right)\Big|_4^5 = 125 + 5 - 64 - 4 = 62 \text{ (м)}.$$

Відповідь: $s = 62$ м.

Приклад 208. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = (2t + a)$ м/с. Знайти значення параметра a, якщо відомо, що за проміжок часу від $t_1 = 0$ (с) до $t_2 = 2$ (с) тіло пройшло шлях довжиною 40 м.

Розв'язання. Шлях, пройдений тілом за проміжок часу від $t_1 = 0$ (с) до $t_2 = 2$ (с) обчислюється за формулою (2.109). Матимемо $s = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \int\limits_0^2 (2t + a)\,dt = \left(t^2 + at\right)\Big|_0^2 = 4 + 2a$ (м).

З умови відомо, що він складає 40 м. Тоді з рівняння $4 + 2a = 40$ знаходимо, що $a = 18$.

Відповідь: $a = 18$.

Тиск рідини на вертикальну пластинку

Для обчислення сили тиску рідини використовують закон Паскаля, згідно з яким тиск рідини на горизонтальну пластину дорівнює її площі S, помноженій на глибину занурення h, на густина γ і прискорення сили тяжіння g, тобто $P = \rho g h S$.

За цією формулою не можна шукати тиск рідини на вертикально занурену пластинку, оскільки її різні точки лежать на різних глибинах.

Нехай у рідину занурена вертикально пластинка, яка обмежена лініями $y_2 = f_2(x)$, $y_1 = f_1(x)$, прямими $x = a$ та $x = b$ $(a < b$ і $y_2 \geq y_1)$ (Рис. 2.16), і частина шуканої величини P є функція від x: $p = p(x)$, тобто $p = p(x)$ – тиск на частину пластини, відповідну відрізку $[a, b]$ значень змінної x ($x \in [a, b]$, $p(a) = 0$, $p(b) = P$).

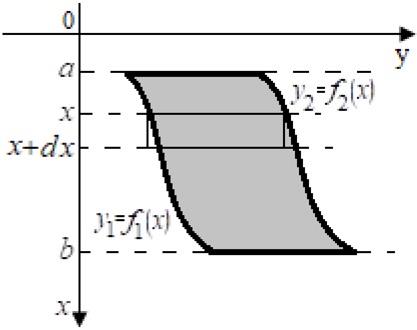


Рисунок 2.16

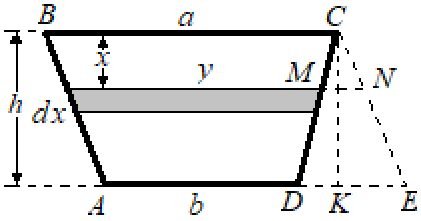
Дамо аргументу приріст $\Delta x = dx$. Функція $p(x)$ одержить приріст Δp (на Рис. 2.16 – "смужка-шар" товщини dx). Знайдемо диференціал dp цієї функції. Через малість dx будемо наближено вважати смужку прямокутником, всі точки якого розташовані на одній глибині x, тобто ця пластина – горизонтальна. Тоді за законом Паскаля $dp = \gamma g x(y_2 - y_1)dx$.

Інтегруючи отриману рівність від $x = a$ до $x = b$, матимемо

$$P = \gamma g \int_a^b x(y_2 - y_1)dx. \qquad (2.110)$$

Приклад 209. Визначити тиск води на вертикальну греблю, що має форму трапеції з розмірами: верхня основа $a = 80$ м, нижня основа $b = 50$ м, висота греблі $h = 20$ м.

Розв'язання. Розглянемо розв'язування задачі у загальному вигляді. Зробимо рисунок.



Припускаючи, що виділена смужка розташована на глибині x в горизонтальній площині і що вона є прямокутником зі сторонами y і dx, знайдемо наближену величину тиску води на цю смужку $\Delta p \approx xydx = dp$. Тиск води на всю греблю $P = \int_0^h xydx$. Для знаходження інтеграла виразимо змінну y через змінну x. Нехай пряма CE паралельна прямій AB. З подібності трикутників DCE і MCN матимемо пропорцію: $(a-b):(a-y) = h:x \Rightarrow y = a - \frac{x}{h}(a-b)$. Тоді

$$P = \int_0^h xydx = \int_0^h x\left(a - \frac{x}{h}(a-b)\right)dx = \int_0^h \left(ax - \frac{x^2}{h}(a-b)\right)dx =$$

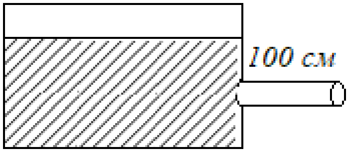
$$= \left(a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3h}(a-b)\right)\Bigg|_0^h = a\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3h}(a-b) = \frac{h^2}{6}(a+2b).$$

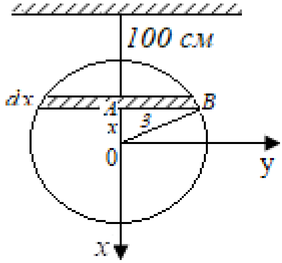
Враховуючи дані в завданні, матимемо $P = \frac{20^2}{6}(80+100) = 400 \cdot 30 = 12000$.

Відповідь: $P = 12000$.

Приклад 210. Водопровідна труба має діаметр 6 см. Один її кінець з'єднаний з баком, в якому рівень води на 100 см вище верхнього краю труби, а інший закритий заслінкою. Знайти силу тиску на заслінку.

Розв’язання. Зробимо рисунок.





Заслінка являє собою круг радіуса 3 см. Розіб'ємо площу цього круга на елементи – смужки, паралельні поверхні води. З трикутника OAB маємо $AB=\sqrt{0{,}0009-x^2}$. Тоді площа одного такого елемента, що перебуває на відстані x від центру, дорівнює (з точністю до нескінченно малих вищого порядку) $dS=2\cdot AB\cdot dx=2\sqrt{0{,}0009-x^2}\,dx$. Знайдемо силу тиску, що випробовується цим елементом (густина рідини $\gamma=1000$ кг/м^3):

$$dp=2\gamma g(1{,}03-x)\sqrt{0{,}0009-x^2}\,dx=19600(1{,}03-x)\sqrt{0{,}0009-x^2}\,dx.$$

Отже $P=19600\int\limits_{-0{,}03}^{0{,}03}(1{,}03-x)\sqrt{0{,}0009-x^2}\,dx=19600\cdot 103\cdot$

$$\cdot\int\limits_{-0{,}03}^{0{,}03}\sqrt{0{,}0009-x^2}\,dx=196\cdot 206\int\limits_{0}^{0{,}03}\sqrt{0{,}0009-x^2}\,dx=196\cdot 206\cdot$$

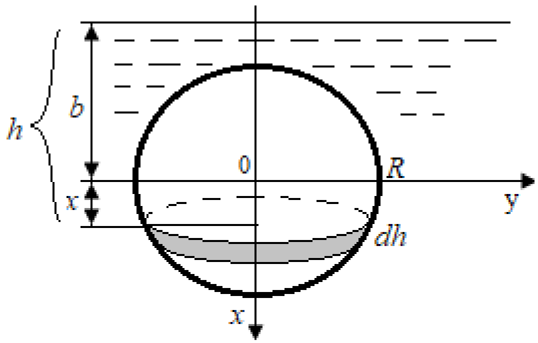
$$\cdot\left(\frac{x}{2}\sqrt{0{,}0009-x^2}+\frac{0{,}0009}{2}\arcsin\frac{x}{0{,}03}\right)\Bigg|_0^{0{,}03}=40376\cdot\frac{0{,}0009}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\approx$$

$$\approx 10094\cdot 0{,}0009\pi\approx 9{,}0846\pi\,.$$

Відповідь: $P\approx 9{,}0846\pi$.

Приклад 211. Знайти тиск води на поверхню кулі радіусом $R=2$ м, якщо її центр перебуває на глибині $b=3$ м від поверхні води.

Розв’язання. Зробимо рисунок.



Проведемо через центр кулі вертикальну площину і виберемо на ній прямокутну систему координат xOy, як показано на рисунку.

Зробимо перетин кулі на глибині h горизонтальною площиною. Тоді тиск води на відсічену частину поверхні кулі буде деякою функцією $P(h)$.

При зміні h на величину dh площа S відсіченої поверхні кулі як площа поверхні обертання навколо осі Oy, зміниться на величину $dS = 2\pi y dl$, де dl – диференціал дуги кола, а тиск $P(h)$ зміниться на величину $dP = 2\pi h y dl$.

Виразимо dP через одну змінну x і, інтегруючи в межах від $x = -2$ до $x = 2$, знайдемо тиск води на всю поверхню кулі. З рівняння кола $x^2 + y^2 = R^2$ знайдемо $y' = -\frac{x}{y}$. Тоді

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\,dx = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y^2}}\,dx = \frac{R}{y}dx = \frac{2}{y}dx .$$

З умови слідує, що $h = x + b = x + 3$. Отже, тиск води

$$P = 2\pi \int_{-2}^{2} (x+3)y \cdot \frac{2}{y}\,dx = 4\pi \int_{-2}^{2} (x+3)\,dx = 2\pi (x+3)^2 \Big|_{-2}^{2} = 48\pi .$$

Відповідь: $P = 48\pi$.

Швидкість витікання рідини з отвору

Швидкість витікання рідини з отвору на відстані h від вільної поверхні, за законом Торрічеллі, дорівнює $v = \mu\sqrt{2gh}$, де μ – коефіцієнт, що залежить від в'язкості рідини, форми посудини і отвору (для води $\mu = 0{,}6$), g – прискорення вільного падіння.

Якщо за час t рівень рідини у посудині знизився на величину x , то, допускаючи, що швидкість витікання протягом малого періоду Δt постійна, її значення визначається виразом $v = \mu\sqrt{2g(h-x)}$.

З рівності об'єму рідини, що витекла через отвір, і об'єму частини посудини, який випорожнився за цей же проміжок:

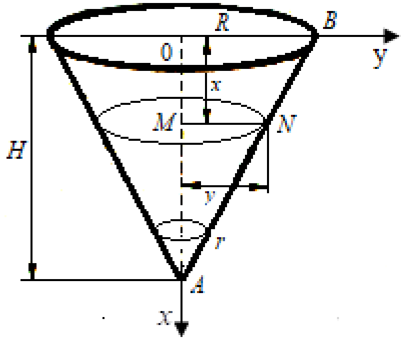
$$\mu s\sqrt{2g(h-x)}\Delta t \approx S(x)\Delta x ,$$

де s – площа отвору, $S(x)$ – площа поверхні рідини, знаходимо, що час повного спорожнення посудини визначається за формулою:

$$T = \frac{1}{\mu s\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{S(x)}{\sqrt{h-x}}dx . \qquad (2.111)$$

Приклад 212. Конічна воронка має розміри: висота – H , радіус нижньої основи – r , а верхньої – R . За якийсь час вода витече з воронки: а) повністю; б) якби спадання води постійно відшкодовувалось.

Розв'язання. а**)** За час t рівень води у воронці буде $H - x$. Знайдемо площу поверхні води на цьому рівні. З метою спрощення обчислень вважатимемо, що осьовий переріз воронки є трикутником, внаслідок малості r у порівнянні з іншими розмірами воронки, а не трапецією. Зробимо рисунок.



З подібності трикутників AOB і AMN матимемо пропорцію:

$$\frac{AO}{OB}=\frac{AM}{M\mathrm{N}} \Rightarrow \frac{H}{R}=\frac{H-x}{y}, \quad y=\frac{H-x}{H}\cdot R\ .$$

Площа поверхні $S(x)=\pi R^2\left(\frac{H-x}{H}\right)^2$. Враховуючи, що $\mu=0{,}6$, а $s=\pi r^2$, за формулою (2.111) знаходимо час повного спорожнення воронки

$$T=\frac{1}{\mu s\sqrt{2g}}\int_0^H\frac{S(x)}{\sqrt{h-x}}dx=\frac{1}{0{,}6\pi r^2\sqrt{2g}}\int_0^H\frac{\pi R^2\left(\frac{H-x}{H}\right)^2}{\sqrt{H-x}}dx=$$

$$=-\frac{R^2}{0{,}6r^2H^2\sqrt{2g}}\int_0^H(H-x)^{\frac{3}{2}}d(H-x)=-\frac{R^2}{0{,}6r^2H^2\sqrt{2g}}\frac{(H-x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^H=$$

$$=\frac{R^2}{0{,}6r^2H^2\sqrt{2g}}\cdot\frac{2}{5}H^{\frac{5}{2}}=\frac{2R^2}{3r^2}\sqrt{\frac{H}{2g}}\ .$$

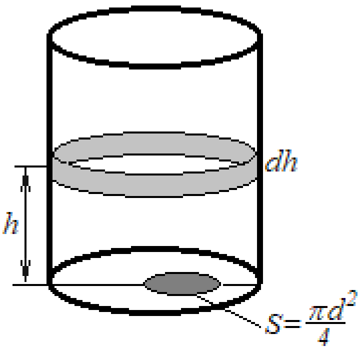
б) У разі, якщо спадання води постійно відшкодовується, тобто при $x=0$, час витікання дорівнюватиме відношенню об’єму води, що уміщується у воронці, до об'єму води, яка витікає через отвір за 1 секунду $0{,}6\pi r^2\sqrt{2gH}$, тобто

$$T=\frac{\frac{1}{3}\pi R^2 H}{0{,}6\pi r^2\sqrt{2gH}}=\frac{5R^2}{9r^2}\sqrt{\frac{H}{2g}}\ \text{(відповід. од.).}$$

Відповідь: а) $T=\dfrac{2R^2}{3r^2}\sqrt{\dfrac{H}{2g}}$; б) $T=\dfrac{5R^2}{9r^2}\sqrt{\dfrac{H}{2g}}$ відповід. од.

Приклад 213. Вертикальна циліндрична бочка діаметром D, висоти H наповнена доверху рідиною. За який час рідина витече з бочки через круглий отвір у дні діаметра d ?

Розв’язання. Зробимо рисунок.



За законом Торрічеллі, швидкість витікання рідини дорівнює $v=\mu\sqrt{2gh}$, де h – висота рівня рідини над отвором, μ – коефіцієнт, що залежить від в'язкості рідини форми посудини і отвору, g – прискорення вільного падіння. У процесі витікання рідини через отвір діаметром d зі швидкістю v об'ємна витрата складе $\dfrac{\pi d^2}{4}v$. Тоді за проміжок часу dt будемо спостерігати зміну об’єму: $dV=\dfrac{\pi d^2}{4}v\,dt=\dfrac{\pi d^2}{4}\mu\sqrt{2gh}\,dt$.

З іншого боку, $dV = -\frac{\pi D^2}{4} dh$. Прирівнявши обидва вирази, матимемо рівняння $d^2 \mu \sqrt{2gh} dt = -D^2 dh$. Розв'яжемо його відносно dt:

$$dt = -\frac{D^2 dh}{\mu d^2 \sqrt{2gh}} = -\frac{D^2}{\mu d^2 \sqrt{2g}} \cdot \frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

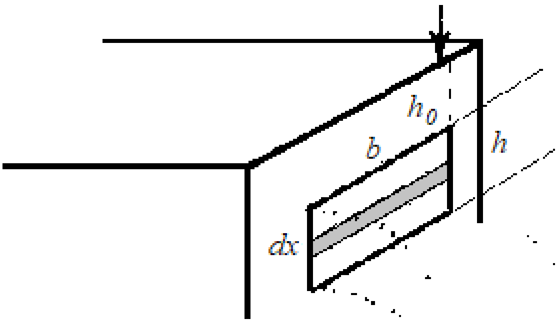
Бочка спорожниться при зміні h від H до 0 за час t, що зміниться від 0 до T. Інтегруючи дану рівність, знаходимо час T спорожнювання циліндра:

$$\int_0^T dt = -\frac{D^2}{\mu d^2 \sqrt{2g}} \int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} \Rightarrow T = -\frac{D^2}{\mu d^2 \sqrt{2g}} \cdot 2\sqrt{h}\Big|_H^0 = \frac{D^2 \sqrt{2H}}{\mu d^2 \sqrt{g}}.$$

Відповідь: $T == \frac{D^2 \sqrt{2H}}{\mu d^2 \sqrt{g}}$ відповід. од.

Приклад 214. Визначити витрату рідини через водозлив прямокутного перетину. Висота водозливу h, ширина b.

Розв'язання: Нехай водозлив перебуває на відстані h_0, від поверхні води.



Виділимо на глибині x елементарну смужку шириною dx. Оскільки площа елементарної смужки дорівнює bdx, а швидкість витікання води через неї $v=\mu\sqrt{2gx}$, то витрата води буде $dQ=\mu\sqrt{2gx}\,b\,dx$. Інтегруючи диференціал витрати води по висоті водозливу, отримаємо

$$Q=\mu b\int_{h_0}^{h+h_0}\sqrt{2gx}\,dx=\mu b\sqrt{2g}\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_{h_0}^{h+h_0}=\frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\left(\left(h+h_0\right)^{\frac{3}{2}}-h_0^{\frac{3}{2}}\right).$$

Якщо верхня кромка водозливу збігається з вільною поверхнею води, тобто $h_0=0$, то витрата води через прямокутний водозлив визначається за формулою

$$Q=\frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\,h^{\frac{3}{2}}\text{ (відповід. од.).}$$

Відповідь: $Q=\frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\left(\left(h+h_0\right)^{\frac{3}{2}}-h_0^{\frac{3}{2}}\right)$ відповід. од.

Кінетична енергія тіла

Кінетична енергія матеріальної точки, що має масу m і швидкість v, визначається виразом $K=\frac{mv^2}{2}$.

Кінетична енергія системи n матеріальних точок з масами m_1, m_2,…, m_n і швидкостями v_1, v_2,…, v_n дорівнює

$$K=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}$$

Щоб обчислити кінетичну енергію тіла, його розбивають відповідним чином на елементарні частини, які відіграють роль матеріальних точок. Підсумовуючи кінетичні енергії цих частин у границі при $n\to\infty$ замість суми

$$K = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^{\,2} \qquad (2.112)$$

за допомогою інтегрального переходу отримують визначений інтеграл, який відповідає кінетичній енергії всього тіла.

Якщо матеріальна точка обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю $\omega = \frac{v}{r}$, то її кінетична енергія визначається за формулою

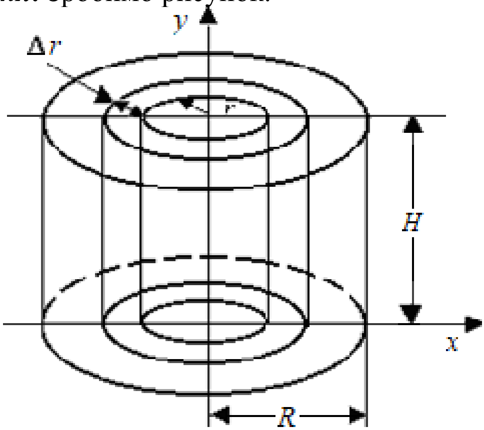
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2, \qquad (2.113)$$

де $I = mr^2$ – момент інерції відносно осі обертання, r – відстань від осі обертання.

Кінетична енергія тіла, що обертається навколо нерухомої осі, обчислюється аналогічно, за допомогою інтегрального переходу.

Приклад 215. Знайти кінетичну енергію однорідного кругового циліндра, заповненого середовищем густини ρ, що має радіус основи R, висоту H і обертається з кутовою швидкістю ω навколо своєї осі.

Розв'язання. Зробимо рисунок.



Приймемо за елементарну частину порожнистий циліндр висоти H , з внутрішнім радіусом r і товщиною стінки Δr. Його (елементарна) маса дорівнює

$$\Delta m = \rho\left(\pi(\mathrm{r}+\Delta \mathrm{r})^2 H - \pi r^2 H\right) = \pi\rho\left(2r\Delta r + (\Delta r)^2\right)H \approx 2\pi r H \rho \Delta r.$$

Оскільки лінійна швидкість маси Δm дорівнює $v = r\omega$, то елементарна кінетична енергія дорівнює

$$\Delta K = \frac{v^2 dm}{2} = \pi r^3 \omega^2 H \rho \Delta r .$$

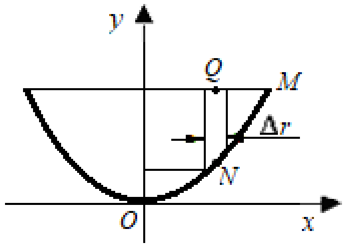
Отже,

$$K = \pi\omega^2 H\rho\int_0^R r^3\, dr = \pi\omega^2 H\rho \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = \frac{\pi\rho}{4}\omega^2 R^4 H \text{ (відповід. од.).}$$

Відповідь: $K = \frac{\pi\rho}{4}\omega^2 R^4 H$ відповід. од.

Приклад 216. Пластина у формі параболічного сегмента обертається навколо осі параболи з постійною кутовою швидкістю ω. Основа сегмента – a, висота – h, товщина – d, густина матеріалу – γ Знайти кінетичну енергію пластинки.

Розв'язання. Зробимо рисунок. Розташуємо координатні осі як показано на рисунку.



Тоді рівняння параболи буде $y = 2px^2$. Знаючи координати точки $M\left(\frac{a}{2}; h\right)$, з рівняння параболи знаходимо параметр параболи $h = 2p\dfrac{a^2}{4} = p\dfrac{a^2}{2}$, $p = \dfrac{2h}{a^2}$.

Розіб'ємо параболічний сегмент на елементарні частини площинами, паралельними осі Oy, перпендикулярними площині сегмента і віддаленими одна від одної на відстані Δr.

Об'єм елементарної частини буде $\Delta V = \left|QN\right| d\Delta r$. Переходячи до диференціала, маса елементарної частини дорівнює $dm = \rho\left|QN\right| d\,dr$. Підставляючи сюди висоту елементарної частини $\left|QN\right| = h - y = h - \dfrac{4hx^2}{a^2} = h\left(1 - \dfrac{4r^2}{a^2}\right)$,

отримаємо $dm = \gamma hd\left(1 - \dfrac{4r^2}{a^2}\right)dr$.

Елементарний момент інерції дорівнює $dI = r^2dm$. Таким чином, кінетична енергія сегмента буде

$$K = \frac{\omega^2}{2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} r^2dm = \frac{\omega^2}{2}\gamma hd\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} r^2\left(1 - \frac{4r^2}{a^2}\right)dr = \frac{\omega^2}{2}\gamma hd\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(r^2 - \frac{4r^4}{a^2}\right)dr =$$

$$= \frac{\omega^2}{2}\gamma hd\left(\frac{r^3}{3} - \frac{4r^5}{5a^2}\right)\Bigg|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{\omega^2}{60}\gamma hda^3 \text{ (відповід. од.).}$$

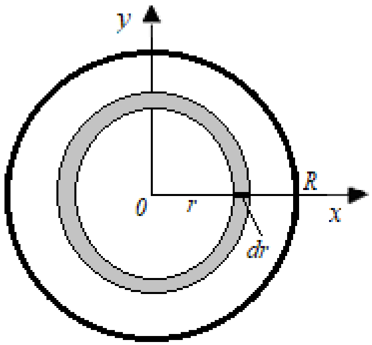
Відповідь: $K = \dfrac{\omega^2}{60}\gamma hda^3$ відповід. од.

Приклад 217. Знайти кінетичну енергію диска маси M і радіуса R, що обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі, що проходить через його центр перпендикулярно до його площини.

Розв'язання. Кінетична енергія елемента диска

$$dK = \frac{mV^2}{2} = \frac{\gamma r^2 \omega^2}{2} ds,$$

де r – відстань елемента диска (кругового кільця) до осі обертання. Зробимо рисунок.



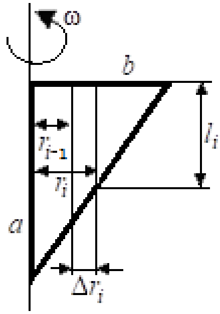
Поверхнева густина маси $\gamma = \frac{M}{\pi R^2}$. Тоді $dK = \frac{M r^2 \omega^2}{2\pi R^2} ds$, $ds = 2\pi r dr$. Кінетична енергія диска

$$K = \frac{M\omega^2}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{M\omega^2}{R^2} \frac{r^4}{4} \Bigg|_0^R = \frac{M\omega^2 R^2}{4} \text{ (відповід. од.).}$$

Відповідь: $K = \frac{M\omega^2 R^2}{4}$ відповід. од.

Приклад 218. Пластинка, що має форму прямокутного трикутника з катетами a і b, обертається з кутовою швидкістю ω навколо катета a. Питома поверхнева густина пластинки дорівнює γ. Знайти кінетичну енергію пластинки.

Розв'язання. Зробимо рисунок.



Перший спосіб. Розіб'ємо пластину на n вертикальних смуг і розглянемо i-ту смужку шириною Δr_i, віддалену від осі обертання на відстань від r_{i-1} до r_i. Якщо Δr_i мале, то цю смужку можна приблизно вважати прямокутником із висотою l_i, усі точки якого віддалені від осі обертання приблизно на одну й ту саму відстань r_i. Тоді кінетична енергія i-тої смужки (або, що те ж саме, приріст сумарної кінетичної енергії при додаванні до пластини i-тої смужки) приблизно дорівнює

$$\Delta K_i \approx \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i \omega^2 r_i^2}{2}.$$

Площу i-тої смужки приблизно обчислюємо як площу прямокутника: $\Delta S \approx l_i \cdot \Delta r_i$. Висоту l_i знайдемо з подібності трикутників:

$$\frac{a}{b} = \frac{l_i}{b - r_i} \Rightarrow l_i = \frac{a}{b}(b - r_i).$$

Звідси маса i-тої смужки $\Delta m_i = \gamma \cdot \Delta S_i = \gamma \frac{a}{b}(b - r_i)\Delta r_i$. Тоді кінетична енергія i-тої смужки буде

$$\Delta K_i \approx \frac{\omega^2 \gamma a}{2b} r_i^2 (b - r_i)\Delta r_i.$$

Точне значення сумарної кінетичної енергії $K = \sum_{i=1}^{n} \Delta K_i$ по всій пластині отримаємо як границю, коли $\Delta r_i \to 0$:

$$K = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta r_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega^2 \gamma a}{2b} r_i^2 (b - r_i) \Delta r_i = \frac{\omega^2 \gamma a}{2b} \int_0^b r^2 (b-r) dr = \frac{\omega^2 \gamma a}{2b} \left(b\frac{r^3}{3} - \right.$$

$$\left. - \frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_0^b = \frac{\omega^2 \gamma a}{2b} \left(b\frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} \right) = \frac{\omega^2 \gamma a b^3}{24} \text{ (відповід. од.).}$$

Другий спосіб. Оскільки приріст незалежної змінної $\Delta r_i = dr$, а приріст залежних змінних $\Delta K_i = dK$, $\Delta m_i = dm$, то рівність для ΔK_i у диференціальній формі матиме вигляд $dK = \frac{\omega^2 r^2 dm}{2}$, причому маса dm елементарної смужки виражається через ширину смужки, яку приблизно вважаємо прямокутником: $dm = \gamma \cdot dS = \gamma l dr$. З подібності трикутників знайдемо висоту елементарної смужки $l = \frac{a}{b}(b - r)$, підставимо у формулу для dm. Тоді диференціальна форма для dK матиме вигляд:

$$dK = \frac{\omega^2 r^2 \gamma}{2} \frac{a}{b} (b - r) dr .$$

Маємо рівність диференціалів двох функцій. Отже, кінетична енергія $K(r)$ трапецієподібної пластини, що має довільну ширину r, може бути записана у вигляді інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування

$$K(r) = \frac{\omega^2 \gamma a}{2b} \int_0^r (b - r) r^2 dr .$$

Нижня межа інтегрування дорівнює нулю, оскільки $K(r)\big|_{r=0} = 0$. Кінетична енергія пластини нульової товщини, що розташована на осі, дорівнює нулю. Значення кінетичної енергії усієї трикутної пластини матимемо при $r = b$:

$$K=\frac{\omega^2\gamma a}{2b}\int_0^b (b-r)r^2\,dr=\frac{\omega^2\gamma ab^3}{24}\ \text{(відповід. од.)}.$$

Відповідь: $K=\dfrac{\omega^2\gamma ab^3}{24}$ відповід. од.

Приклад 219. Яку роботу необхідно затратити, щоб зупинити сталевий шар радіуса R, який обертається з кутовою швидкістю ω навколо свого діаметра?

Розв'язання. У даному випадку робота дорівнює значенню кінетичної енергії шара $K=\dfrac{mv^2}{2}$. Для знаходження її розіб'ємо шар на концентричні порожнисті циліндри завтовшки dx і радіуса x. Швидкість точок такого циліндра дорівнює ωx. Диференціал об'єму $dV=4\pi x\sqrt{R^2-x^2}\,dx$, диференціал маси $dm=\gamma dV$, де γ – густина сталі, а диференціал кінетичної енергії $dK=2\pi\gamma\omega^2x^3\sqrt{R^2-x^2}\,dx$. Тоді шукана робота

$$A=K=2\pi\gamma\omega^2\int_0^R x^3\sqrt{R^2-x^2}\,dx=-\pi\gamma\omega^2\int_0^R x^2\sqrt{R^2-x^2}\,d\left(R^2-x^2\right)=$$

$$=\pi\gamma\omega^2\int_0^R\left(R^2-x^2-R^2\right)\sqrt{R^2-x^2}\,d\left(R^2-x^2\right)=$$

$$=\pi\gamma\omega^2\int_0^R\left(R^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}d\left(R^2-x^2\right)-\pi\gamma\omega^2R^2\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,d\left(R^2-x^2\right)=$$

$$=\pi\gamma\omega^2\left.\left(\frac{\left(R^2-x^2\right)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-R^2\,\frac{\left(R^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\right|_0^R=\pi\gamma\omega^2\left(-\frac{2}{5}R^5+\frac{2R^2}{3}R^3\right)=$$

$$=\frac{4}{15}\pi\gamma\omega^2R^5=\frac{4}{3}\pi\gamma R^3\cdot\frac{\omega^2R^2}{5}=m\frac{\omega^2R^2}{5}\ \text{(відповід. од.)}.$$

Відповідь: $A = m\dfrac{\omega^2 R^2}{5}$ відповід. од.

Кількість електрики

Нехай по провіднику тече струм змінної сили $i(t)$, де $i(t) \geq 0$. Знайдемо кількість електрики, що протече за проміжок часу $[T_1;T_2]$ $(T_1 < T_2)$. Розіб'ємо проміжок часу $[T_1;T_2]$ точками $T_1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{\text{n}} = T_2$. Нехай $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i, i = 0,1,\ldots,n-1$. Тоді кількість електрики, що протече по провіднику за час Δt_i, дорівнює $\Delta q_i = i(\tau_i)\Delta t_i$, де τ_i – деякий момент часу між моментами t_i і $t_{i+1} = t_i + \Delta t_i$. Підсумовуючи кількість електрики по всіх ділянках розбивки і переходячи до границі при $n \to \infty$, отримуємо величину кількості електрики, що протікає по провіднику за проміжку часу $[T_1;T_2]$, рівну

$$q = \int_{T_1}^{T_2} i(t)dt\,, \tag{2.114}$$

де сила $i(t)$ виражена в амперах, а час t – у секундах. Якщо сила струму $i(t)$ змінює знак за проміжок часу $[T_1;T_2]$, то кількість електрики $q = \int\limits_{T_1}^{T_2} i(t)dt$ дорівнює різниці між кількістю електрики, що протече по провіднику в ту і іншу сторони.

Приклад 220. Протягом 7 с величина струму в провіднику змінювалася за законом $i(t) = 3t^2 + 2t$ (А). Знайти кількість електрики, що пройшла через провідник за цей час.

Розв'язання: Кількість електрики знайдемо за формулою (2.114), де $T_1 = 0$ і $T_2 = 7$.

$$q=\int_{T_1}^{T_2} i(t)dt=\int_0^7 \left(3t^2+2t\right)dt=\left(t^3+t^2\right)\Big|_0^7=343+49=392 \text{ (Кл)}.$$

Відповідь: $q=392$ Кл.

Приклад 221. Напруга u на затискачах певної ділянки електричного ланцюга з опором $R=20$ Ом рівномірно спадає від $U_0=60$ В до $U_1=40$ В. Визначити кількість електрики q, що проходить через провідник протягом часу $t=10$ хв.

Розв'язання: Як відомо, залежність між напругою і часом виражається формулою

$$u(t)=U_0+kt,$$

де k – коефіцієнт пропорційності, при цьому $k=\dfrac{U_1-U_0}{t_1-t_0}$.

У відповідності до умови, знаходимо k, вважаючи, що $T_1=0$ с, а $T_2=600$ с: $k=\dfrac{40-60}{600-0}=-\dfrac{1}{30}$. Тоді $u(t)=60-\dfrac{1}{30}t$.

Кількість електрики q, що проходить через провідник протягом часу від T_1 до T_2, обчислюється за формулою (2.114)

$$q=\int_{T_1}^{T_2} i(t)dt=\int_{T_1}^{T_2}\frac{u(t)}{R}dt.$$

Отже, кількість електрики q, що проходить через провідник протягом часу від $T_1=0$ с до $T_2=600$ с

$$q=\int_0^{600}\frac{60-\frac{1}{30}t}{20}dt=\frac{1}{20}\left(60t-\frac{1}{60}t^2\right)\Bigg|_0^{600}=\frac{1}{20}\left(60\cdot 600-\frac{1}{60}600^2\right)=$$

$$=\frac{1}{20}\left(36000-6000\right)=1500 \text{ (Кл)}.$$

Відповідь: $q=1500$ Кл.

Приклад 222. Напруга $u(t)$ на затискачах резистора з опором $R=10$ Ом рівномірно зростає від $U_0=100$ В до

$U_1 = 120$ В протягом часу $t_1 = 60$ с. Визначити середнє значення струму протягом цього часу.

Розв'язання: Оскільки, у відповідності до умови, напруга і струм на затискачах резистора пов'язані лінійною залежністю $u(t) = U_0 + kt$, то $U_1 = U_0 + kt_1$, звідки $k = \dfrac{U_1 - U_0}{t_1}$. Тоді $k = \dfrac{120 - 100}{60} = \dfrac{1}{3}$. Знаходимо миттєве значення струму за формулою $i(t) = \dfrac{u(t)}{R} = \dfrac{U_0 + kt}{R}$, звідки середнє значення струму за час t_1 визначається формулою

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} i(t)dt .$$

Матимемо

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} \frac{U_0 + kt}{R}\, dt = \frac{1}{t_1 R}\left(U_0 t + k\,\frac{t^2}{2} \right)\Bigg|_0^{t_1} = \frac{1}{t_1 R}\left(U_0 t_1 + k\,\frac{t_1^{\,2}}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{R}\left(U_0 + k\,\frac{t_1}{2} \right).$$

Таким чином, $I_{\text{ср}} = \dfrac{1}{10}(100 + 10) = 11$ (А).

Відповідь: $I_{\text{ср}} = 11$ А.

Приклад 223. Падіння напруги в електричному ланцюзі 220 В. В ланцюг включене постійне навантаження з опором 15 Ом і додатково вводиться опір зі швидкістю $0{,}2$ Ом/с. Яка кількість електрики протече по ланцюгу за 1 хв?

Розв'язання: Згідно із законом Ома, падіння напруги $u(t)$, сила струму $i(t)$ і опір R пов'язані між собою співвідношенням $i(t) = \dfrac{u(t)}{R(t)}$. За умовою, опір ланцюга змінюється за законом

$R(t)=15+\int\limits_0^t 0{,}2dt=15+0{,}2t$. Тоді, за законом Ома, сила струму змінюється за законом $i(t)=\dfrac{U}{R(t)}=\dfrac{220}{15+0{,}2t}$. Тому кількість електрики, що протече по ланцюгу за 1хв, за формулою (2.114)

$$q=\int\limits_{T_1}^{T_2} i(t)dt=\int\limits_0^{60}\frac{220}{15+0{,}2t}dt=\frac{220}{0{,}2}\ln\left|15+0{,}2t\right|\Big|_0^{60}=1100(\ln 27-\ln 15)=$$

$=1100\ln 1{,}8$ (Кл.).

Відповідь: $q=1100\ln 1{,}8$ Кл.

Прогнозування обсягів споживання електроенергії

Споживання енергії кожної лампою або ліхтарем пропорційне числу годин від заходу сонця до його сходу. Чим коротше ніч, тим менше потрібно електроенергії. Найкоротша ніч у році припадає на 22 червня. У цей день електроенергії буде потрібно менше, ніж в найдовшу ніч – 22 грудня. Таким чином, споживання енергії є коливальний процес. Цей процес може бути описаний функцією

$$\omega=b+c\cdot\cos\left(2\pi(t+0{,}025)\right). \qquad (2.115)$$

Тут доданок 0,025 визначає, що максимум припадає на $t=0{,}025$, тобто за $0{,}025\cdot 365\approx 9$ днів до початку кожного року, тобто на 22 грудня. Множник 2π визначає довжину періоду, що дорівнює 1 (року).

Приклад 224. Обчислити споживання енергії мережею за рік від $t_1=0$ до $t_2=1$, якщо споживання енергії мережею за рік описується рівнянням (2.115).

Розв'язання.

Споживання енергії протягом часу dt складе ωdt, а за рік

$$W=\int_{t_1}^{t_2}\omega\,dt=\int_0^1\bigl(b+c\cdot\cos\bigl(2\pi(t+0{,}025)\bigr)\bigr)dt=\int_0^1 b\,dt+$$

$$+c\int_0^1\cos\left(2\pi t+0{,}05\pi\right)dt=bt\Big|_0^1+\frac{c}{2\pi}\sin\left(2\pi t+0{,}05\pi\right)\Big|_0^1=b+0=b\,.$$

Звідси випливає, що споживання енергії за рік становить b одиниць потужності.

Відповідь: $W=b$ од. потужності.

Приклад 225. Споживання енергії кожної лампою і ліхтарем за рік описується рівнянням (2.115), де b і c – деякі числа. Мережа освітлення в районі лінійно зростає за законом $u=u_0+at$, де t вимірюється в роках. Обчислити споживання енергії мережею за рік від $t_1=0$ до $t_2=1$.

Розв'язання. Споживання енергії протягом часу dt складе $u\omega dt$, а за рік

$$W=\int_{t_1}^{t_2}u\,\omega\,dt=\int_0^1\left(u_0+at\right)\bigl(b+c\cdot\cos\bigl(2\pi(t+0{,}025)\bigr)\bigr)dt=\int_0^1 u_0 b\,dt+$$

$$+\int_0^1 abt\,dt+cu_0\int_0^1\cos\left(2\pi t+0{,}05\pi\right)dt+ac\int_0^1 t\cos\left(2\pi t+0{,}05\pi\right)dt=$$

$$=\begin{bmatrix} u=t,\,dv=\cos\left(2\pi t+0{,}05\pi\right)dt \\ du=dt,\,v=\dfrac{1}{2\pi}\sin\left(2\pi t+0{,}05\pi\right)\end{bmatrix}=u_0bt\Big|_0^1+ab\frac{t^2}{2}\Big|_0^1+$$

$$+\frac{cu_0}{2\pi}\underbrace{\sin\left(2\pi t+0{,}05\pi\right)\Big|_0^1}_{=0}+\frac{act}{2\pi}\sin\left(2\pi t+0{,}05\pi\right)\Big|_0^1-$$

$$-\frac{ac}{2\pi}\int_0^1\sin\left(2\pi t+0{,}05\pi\right)dt=u_0b+\frac{ab}{2}+\frac{ac}{2\pi}\sin\left(0{,}05\pi\right)+\frac{ac}{\left(2\pi\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\underbrace{\cos\left(2\pi t+0{,}05\pi\right)\Big|_0^1}_{=0}=u_0b+\frac{ab}{2}+0{,}024897ac\text{ (од. потужності).}$$

Відповідь: $W = u_0 b + 0{,}5ab + 0{,}025ac$ од. потужності.

2.8.8 Інші задачі на застосування визначеного інтеграла

Приклад 226. Знайти кількість тепла, що виділяється змінним синусоїдальним струмом $I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right)$ протягом періоду T у провіднику з опором R.

Розв'язання: Для постійного струму кількість тепла за одиницю часу визначається законом Джоуля-Ленца

$$Q = 0{,}24 I^2 Rt .$$

При змінному струмі диференціал кількості тепла дорівнює $dQ = 0{,}24 I^2(t) R dt$, звідки

$$Q = 0{,}24 R \int_{t_1}^{t_2} I^2(t) dt . \qquad (2.116)$$

У нашому випадку за формулою (2.116) матимемо

$$Q = 0{,}24 R \int_{t_1}^{t_2} I^2(t) dt = 0{,}24 R I_0^2 \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right) dt =$$

$$= 0{,}12 R I_0^2 \int_0^T \left(1 - \cos 2\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right)\right) dt = 0{,}12 R I_0^2 \left(t - \frac{T}{4\pi}\sin 2\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right)\right)\Bigg|_0^T =$$

$$= 0{,}12 R I_0^2 \left(T - \frac{T}{4\pi}\sin 2\left(\frac{2\pi}{T}T - \varphi\right) - \frac{T}{4\pi}\sin 2\varphi\right) = 0{,}12 R I_0^2 T .$$

Відповідь: $Q = 0{,}12 R I_0^2 T$ відповід. од.

Приклад 227. Знайти силу тяжіння, з якою діє матеріальний стержень довжини l і маси M на матеріальну точку маси m, що розташована на одній прямій зі стрижнем на відстані a від одного з його кінців.

Розв'язання. Сила F взаємодії двох точкових мас визначається законом Ньютона $F = \dfrac{kmM}{r^2}$, де r – відстань між точками, m і M – маси точок, k – коефіцієнт пропорційності.

Маса одиниці довжини стержня (лінійна густина) $\dfrac{M}{l} = const$ – величина постійна. Виділимо елемент стержня довжиною dx, віддалений від його кінця на відстані x. Сила взаємодії виділеного елемента з точковою масою m дорівнює $dF = \dfrac{kmM}{(a+x)^2 l} dx$. Звідси вся сила тяжіння буде

$$F = \int_0^l \frac{kmM}{(a+x)^2 l} dx = -\frac{kmM}{l} \frac{1}{a+x}\Bigg|_0^l = -\frac{kmM}{l}\left(\frac{1}{a+l} - \frac{1}{a}\right) = \frac{kmM}{a(a+l)}.$$

Відповідь: $F = \dfrac{kmM}{a(a+l)}$ відповід. од.

Приклад 228. Швидкість розчинення солі в воді пропорційна кількості нерозчиненої солі і різниці між концентрацією насиченого розчину та концентрацією розчину в даний момент часу. Концентрація насиченого розчину дорівнює C_0 (кг/л). Масу M_0 (кг) солі розчиняють в N літрах води. За час T розчинилася половина солі. За який час розчиниться $\dfrac{3}{4}$ солі, якщо $M_0 = \dfrac{2}{3} N C_0$?

Розв'язання. Позначимо через $m(t)$ кількість солі, яка розчинилася за час t. Тоді швидкість розчинення дорівнює похідній $m'(t)$, концентрація розчину в даний момент часу дорівнює $\dfrac{m(t)}{N}$. За умовою

$$m'(t) = k(M_0 - m(t))\cdot\left(C_0 - \frac{m(t)}{N}\right),$$

де k – невідомий коефіцієнт пропорційності. Звідси

$$\frac{m'(t)}{(M_0 - m(t))\cdot(C_0 N - m(t))} = \frac{k}{N}.$$

Інтегруємо цю рівність від 0 до t. Маємо:

$$\int_0^t \frac{m'(\tau)d\tau}{(M_0 - m(\tau))\cdot(C_0 N - m(\tau))} = \int_0^t \frac{k}{N} d\tau.$$

Зробимо в лівому інтегралі заміну Тоді $m(\tau) = z$, $dz = m'(\tau)d\tau$.

$$\int_{m(0)}^{m(t)} \frac{dz}{(M_0 - z)\cdot(C_0 N - z)} = \int_0^t \frac{k}{N} d\tau$$

Обчислимо інтеграли: $\frac{1}{C_0 N - M_0} \ln\left|\frac{C_0 N - z}{M_0 - z}\right|\Bigg|_{m(0)}^{m(t)} = \frac{k}{N}\tau\Bigg|_0^t$.

Оскільки $m(0) = 0$, $NC_0 = \frac{3}{2}M_0$, то $\frac{2}{M_0}\ln\frac{3M_0 - 2m(t)}{2(M_0 - m(t))} - \frac{2}{M_0}\ln\frac{3}{2} = \frac{k}{N}t$. Тоді

$$\frac{2}{M_0}\ln\frac{3M_0 - 2m(t)}{3(M_0 - m(t))} = \frac{k}{N}t.$$

Візьмемо $t = T$, $m(T) = \frac{M_0}{2}$. Буде $\frac{2}{M_0}\ln\frac{4}{3} = \frac{k}{N}T$. Звідси $\frac{k}{N} = \frac{2}{M_0 T}\ln\frac{4}{3}$. Підставимо в попереднє рівняння:

$$\frac{2}{M_0}\ln\frac{3M_0 - 2m(t)}{3(M_0 - m(t))} = \frac{2t}{M_0 T}\ln\frac{4}{3}.$$

Виразимо

$$t=\frac{T}{\ln\frac{4}{3}}\ln\frac{3M_0-2m(t)}{3(M_0-m(t))}.$$

Позначимо через t_1 шукану величину часу, за який розчиняється $\frac{3}{4}$ солі, тобто $m(t_1)=\frac{3M_0}{4}$. Тоді

$$t_1=\frac{T}{\ln\frac{4}{3}}\ln\frac{3M_0-2m(t_1)}{3(M_0-m(t_1))}=\frac{T}{\ln\frac{4}{3}}\ln\frac{3M_0-\frac{3M_0}{2}}{3\left(M_0-\frac{3M_0}{4}\right)}=\frac{T}{\ln\frac{4}{3}}\ln 2.$$

Відповідь: $t_1=\frac{T}{\ln\frac{4}{3}}\ln 2$ відповід. од.

Приклад 229. Експериментально встановлено, що продуктивність праці робітника наближено виражається формулою $f=-0{,}0033t^2-0{,}089t+20{,}96$, де t – робочій час у годинах. Обчислити обсяг випуску продукції за квартал, вважаючи робочий день восьмигодинним, а кількість робочих днів у кварталі – 62.

Розв'язання. Обсяг випуску продукції V протягом зміни є первісною від функції, що виражає продуктивність праці:

$$V=\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)\,dt, \qquad (2.117)$$

де τ_1 – початок робочого дня, τ_2 – кінець робочого дня.

За k робочих днів обсяг випуску продукції $V=k\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)\,dt$.

Протягом кварталу обсяг випуску продукції становитиме

$$V = 62\int_0^8 \left(-0{,}0033t^2 - 0{,}089t + 20{,}96\right)dt = 62\left(-0{,}0033\cdot\frac{t^3}{3} - 0{,}089\cdot\frac{t^2}{2} + \right.$$

$$\left. + 20{,}96t\right)\Big|_0^8 = 62\left(-0{,}0033\cdot\frac{512}{3} - 0{,}089\cdot\frac{64}{2} + 20{,}96\cdot 8\right) = 62\cdot 164{,}2688 =$$

$$= 10184{,}6656.$$

Оскільки обсяг випуску продукції ціле число, то $V = 10184$ (од. прод.)

Відповідь: $V = 10184$ од. прод.

Приклад 230. Експериментально встановлено, що залежність витрати бензину автомобілем від швидкості на 100 км шляху виражається формулою $q(v) = 18 - 0{,}3v + 0{,}003v^2$, де $30 \le v \le 100$ Обчислити середню витрату бензину, якщо швидкість руху автомобіля $50 - 60$ км/год.

Розв'язання. Середня витрата бензину на 100 км обчислюється за формулою

$$m = \frac{1}{v_{\text{ср}}}\int_{v_1}^{v_2} q(v)\,dv, \tag{2.118}$$

де $v_{\text{ср}} = v_2 - v_1$ зміна швидкості в межах $v_1 \le v \le v_2$.

За умовою задачі, $v_1 = 50$, $v_2 = 60$, $v_{\text{ср}} = v_2 - v_1 = 10$. Тоді за формулою (2.118) знайдемо

$$m = \frac{1}{10}\int_{50}^{60}\left(18 - 0{,}3v + 0{,}003v^2\right)dv = \frac{1}{10}\left(18v - 0{,}3\frac{v^2}{2} + 0{,}003\frac{v^3}{3}\right)\Bigg|_{50}^{60} =$$

$$= \frac{1}{10}\left(18(60-50) - 0{,}15(3600-2500) + 0{,}001(216000-125000)\right) =$$

$$= \frac{1}{10}(180 - 165 + 91) = 10{,}6 \text{ (л)}.$$

Відповідь: Автомобіль на 100 км шляху, рухаючись зі швидкістю $50 - 60$ км/год., витрачає в середньому $10{,}6$ л бензину.

2.8.9 Задачі для самостійної роботи

1. Матеріальна точка рухається зі швидкістю $v(t)=0{,}1t^3$ м/с. Знайти шлях S, який пройшла точка за проміжок часу 10 с від початку руху. Знайти середню швидкість точки на цьому проміжку.

Відповідь: $S=250$ м, $v_{\text{ср}}=25$ м/с.

2. Швидкість матеріальної точки $v(t)=te^{-0{,}01t}$ м/с. Знайти шлях, який пройшла точка від початку руху до повної зупинки.

Відповідь: $S=10000$ м.

3. Швидкість матеріальної точки змінюється за законом $v(t)=2(6-t)$ м/с. Знайти найбільшу відстань, пройдену матеріальною точкою від початку руху.

Відповідь: $S=36$ м.

4. Циліндр радіуса $R=0{,}1$ м і висотою $H=0{,}8$ м заповнений парою під тиском $p_0=10^5$ кГ/м^2. Яку роботу потрібно здійснити, щоб зменшити об'єм пари у два рази (температура пари залишається постійною)?

Відповідь: $A=17411{,}85$ Дж.

5. У циліндрі під поршнем міститься повітря об'ємом $V_0=0{,}9$ м^3 при атмосферному тиску $P_0=10000$ кг/м^2. Яку роботу потрібно здійснити, щоб при постійній температурі об'єм повітря зменшився у три рази?

Відповідь: $A=96996{,}47$ Дж.

6. Знайти роботу з викачування води з ями форми прямокутного паралелепіпеда висоти 4 м, що має квадратний переріз зі стороною 2 м, якщо густина води $\gamma=10^3$ кг/м^3.

Відповідь: $A=3{,}1\cdot 10^5$ Дж.

7. Знайти роботу з викачування води з резервуара у формі правильної чотирикутної піраміди зі стороною основи 2 м і

висотою 5 м. Отвір для викачування розташований у вершині піраміди зверху. Густина води $\gamma = 9{,}81$ кН/м^3.

Відповідь: $A = 245$ кДж.

8. Трикутна пластина з основою 6 м занурена вертикально у рідину з густиною $\gamma = 0{,}9$ т/м^3 так, що основа паралельна поверхні рідини і перебуває на відстані 1 м від поверхні рідини. Висота трикутної пластини дорівнює 4 м. Знайти силу тиску на кожну сторону пластини

Відповідь: $P = 246{,}96$ кН.

9. При сталій ламінарній течії (течія, при якій рідина або газ переміщаються шарами без перемішування і пульсації) визначити витрату рідини через трубу круглого перерізу радіуса r і довжини l, якщо різниця тиску рідини на кінцях труби – P.

Відповідь: $Q = \dfrac{\pi P r^4}{8\mu l}$ відповід. од.

10. Питома теплоємкість тіла при температурі t дорівнює $c = 0{,}2 + 0{,}001t$. Яку кількість тепла потрібно витратити, щоб тіло масою 1 г нагріти від $0^o C$ до $100^o C$.

Відповідь: 25 кал.

11. Концентрація речовини у воді змінюється за законом $c = \dfrac{10x}{x+1}$ г/м^3, де x – глибина шару. Скільки речовини Q міститься у вертикальному стовпі води, площа поперечного перерізу якого дорівнює 1 м^2, а глибина змінюється від 0 м до 200 м.

Відповідь: 1947 г.

12. Циліндричний бак висотою 5 м і радіусом основи $0{,}8$ м заповнений водою. За який час витече вода з бака через круговий отвір радіуса $0{,}1$ м на дні бака?

Відповідь: 108 с.

13. Знайти роботу витрачену на спорудження кургану конічної форми, радіус основи якого 2 м, а висота 3 м, з однорідного будівельного матеріалу, густина якого $2{,}5$ т/м^3.

Відповідь: $7{,}5\pi g$.

14. Акваріум форми прямокутного паралелепіпеда заповнений водою. Знайти силу тиску води на задню стіну акваріума, розмір якщо його глибина $0{,}4$ м, а ширина $0{,}7$ м (густина води 1000 кг/м^3).

Відповідь: 549 Н.

15. Протягом часу від $t_1 = 2$ с до $t_2 = 5$ с величина струму в провіднику змінювалась за законом $i(t) = 3t^2 + 2$ (А). Знайти кількість електрики, що пройшла через провідник за цей час.

Відповідь: 123 Кл.

16. Знайти кількість електрики, що пройшла через поперечний переріз провідника за 20 с, якщо величина струму в провіднику змінюється за законом $i(t) = 2t + 1$ (А).

Відповідь: 420 Кл.

17. Продуктивність праці бригади робітників протягом зміни наближено визначається формулою $f(t) = -2{,}53t^2 + 24{,}75t + 111{,}1$, де t – робочий час у годинах. Визначити об’єм продукції, виготовленої бригадою за п’яту робочу годину.

Відповідь: $\mathrm{V} \approx 171$ відповід. од.

18. Котел має форму параболоїда обертання і наповнений рідиною, густина якої γ. Радіус основи котла R, а глибина H. Знайти роботу з викачування рідини з котла.

Відповідь: $A = \dfrac{\gamma g \pi R^2 H^2}{6}$ відповід. од.

19. Знайти силу тиску рідини на півкруг, вертикально занурений у рідину, якщо його радіус R, а центр O розташований на поверхні рідини, густина якої γ.

Відповідь: $\frac{2}{3}\gamma g R^3$ відповід. од.

20. Первісне падіння напруги в електричному ланцюзі $220\,\text{В}$. В ланцюг включене постійне навантаження з опором $10\,\text{Ом}$, додатково вводиться опір зі швидкістю $0{,}25\,\text{Ом/с}$, і падіння напруги збільшується зі швидкістю $0{,}02\,\text{В/с}$. Яка кількість електрики протече по ланцюгу за $2\,\text{хв}$.?

Відповідь: $876{,}8\ln 4 + 96$ відповід. од.

21. Знайти роботу, необхідну для запуску ракети вагою P з поверхні Землі (радіус Землі R) вертикально вгору на висоту h.

Відповідь: $A = \frac{PRh}{R+h}$ відповід. од.

22. Знайти кінетичну енергію однорідної кулі радіуса R і густини γ, що обертається з кутовою швидкістю ω навколо свого діаметра.

Відповідь: $K = \frac{4}{15}\pi\omega^2\gamma R^5$ відповід. од.

23. Знайти кількість тепла, що виділяється змінним синусоїдальним струмом $I = I_0 \sin \omega t$ протягом періоду T у провіднику з опором R.

Відповідь: $Q = 0{,}24\frac{\pi R I_0^2}{\omega}$ відповід. од.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – С-П.: Лань, 2010. – 608 с.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. (В 3-х томах). Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Дрофа, 2004. – 512 с.

3. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч.1 /Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М.; за заг. ред. П.П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2007. – 600 с.

4. Вища математика: підручник: у 2 кн. / [Г.Й. Призва, В.В. Плахотник, Л.Д. Гординський та ін.]; за ред. Г.Л. Кулініча. – К. : Либідь, 2003. – Кн. 1. Основні розділи. – 2003. – 400 с.

5. Вища математика. Модуль 3. Невизначений та визначений інтеграли: Навч. посібник / Ластівка І.О., Коновалюк В.С., Ковтонюк І.Ю. [та ін.] – К. : НАУ-друк, 2007. – 208 с.

6. Вірченко Н.О., Ляшко І.І. Графіки елементарних та спеціальних функцій. Довідник.– К.: Наукова думка, 1996.– 582 с.

7. Вся высшая математика: учеб. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко и др. – Т. 2. – М.: Эдиториал УРСС, 2007. – 192 с. – ISBN 978-5-38200208-8.

8. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. – АСТ: Астрель, 2006. – 991 с.

9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблица интегралов, сумм, рядов, произведений. – БХВ-Петербург, 2011. – 1182 с. ISBN 978-5-9775-0360-0, 978-5-9775-0360-0

10. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1: учеб. пособие для вузов / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М. : ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2003. – 304 с.

11. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и др. математические формулы. – М., 1983. – 223 с

12. Денисьєвський М.О. Збірник задач з математичного аналізу: функції однієї змінної. /М.О. Денисьєвський, О.О. Курченко, В.Н. Нагорний, О.Н. Нестеренко, Т.О Петрова, А.В. Чайковський. – ВПЦ “Київський університет”, 2005. – 240 с.

13. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П Дубовик., І.І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.

14. Задачи и упражнения по математическому аналізу для втузов: учеб. пособие для студентов высш. техн. учеб. заведений / [Бараненков Г.С., Демидович Б.П., Ефименко В.А. и др.]; под ред. Б.П. Демидовича. – М. : ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2004. – 495 с.

15. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. – СПб. : Лань, 2010. – 464 с.

16. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие для техн. специальностей вузов: в 4 ч. Ч. 2 /[А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть]; под ред. А. П. Рябушко. – Минск: Вышэйш. шк., 2007. – 395 с.

17. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие для техн. специальностей вузов: в 4 ч. Ч. 2 /[А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть]; под ред. А. П. Рябушко. – Минск: Вышэйш. шк., 2007. – 395 с.

18. Коваленко, І.П. Вища математика : Навчальний посібник для студ ВНЗ. /І.П. Коваленко. – К.: Вища школа, 2006. – 343 с.: іл.

19. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1984. – 830 с.

20. Краснов М.Л. Вся высшая математика: в 7 т.: учебник / [Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. и др.] – М. : Едиториал УРСС, 2004. – Т. 2. – 192 с.

21. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие для вузов /Б.П. Демидович, В.А. Кудрявцев. – М.: ООО «Издательство АСТ», 2001. – 656 с.: ил.

22. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. В 2 т. Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функции одной переменной. Ряды. – М. : Физматлит, 2005. – 400 с.

23. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной: Учебное пособие. – 3-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 400 с.:ил.

24. Математический анализ в вопросах и задачах: Учеб. пособие для вузов. Под ред. В.Ф. Бутузова. – М.: Высш.шк., 1984. – 200 с.

25. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика: Підручник. – Д.: « Видавництво Сталкер», 2003. – 496 с.

26. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т. Т.1: – М.: Интеграл-Пресс, 2001. – 416 с.

27. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник: в 3 томах / Г.М. Фихтенгольц. – 14-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2020. – Т. 2. – 800 с.:ил.

28. Шипачев В.С. Курс высшей математики: учебник для вузов / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. – М.: Оникс, 2009. – 608 с.

29. Шкіль М.І. Вища математика: Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди: підручник у 3 кн. Кн. 2 / М. І. Шкіль, Т.В: Колесник. – К.: Либідь, 2004. – 251 с.

Навчальне видання

КИЛИМНИК Ірина Михайлівна
ПОЛЯКОВА Тетяна Гнатівна

ПРАКТИКУМ З ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

Комп'ютерний набір: *Килимник І.М., Полякова Т.Г.*
Комп'ютерна верстка: *Дяченко О.О.*

Підписано до друку 06.03.2020. Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 17,78.
Тираж 100 прим. Зам. № 452.

Національний університет «Запорізька політехніка»
Україна, 69063, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64
Тел.: (061) 769–82–96, 220–12–14

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6952 від 22.10.2019