

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ ТА ВКАЗІВКИ

до контрольної роботи з дисципліни “Вища математика”
для студентів економічних спеціальностей заочної форми навчання
Частина 2

Індивідуальні завдання та вказівки до контрольної роботи з дисципліни “Вища математика” для студентів економічних спеціальностей заочної форми навчання. Частина 2. / Укл.: Н.О. Нечипоренко, О.А. Щербина - Запоріжжя: НУ “Запорізька політехніка”, 2020. – 50 с.

Укладачі: Н.О. Нечипоренко, доцент, к. ф.-м.н.
О.А. Щербина, асистент

Рецензент: О.В. Коротунова, доцент, к.т.н.

Відповідальний за випуск: Н.О. Нечипоренко, доцент, к. ф.-м.н.

Затверджено
на засіданні кафедри
прикладної математики
Протокол № 6 від 22.01.2020 р.

Рекомендовано до видання
НМК факультету
економіки та управління
Протокол № 24 від 12.02.2020 р.

ЗМІСТ

	с.
ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ РОБОТИ.....	4
ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ.....	26
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ.....	48
ЛІТЕРАТУРА.....	50

ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Основні правила інтегрування

- 1) Якщо $F'(x) = f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$,
- 2) $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$, де a – сталий множник;
- 3) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1)$.
4. $\int e^x dx = e^x + C$.
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
9. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$.
10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, (a \neq 0)$.
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < |a|$.

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

$$13. \int shx dx = chx + C.$$

$$14. \int chx dx = shx + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C.$$

$$16. \int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C.$$

Розглянемо розв'язок типових завдань контрольної роботи.

ЗАВДАННЯ 1.

Зазначимо, що немає універсального методу інтегрування функцій, проте існують класичні, або основні методи інтегрування, до яких належать: метод безпосереднього інтегрування, метод підстановки (метод заміни) й метод інтегрування частинами.

Знаходження невизначеного інтеграла шляхом зведення його до табличного називається безпосереднім інтегруванням.

Приклад 1

$$\begin{aligned} \int (5x^3 + 3x^2 + 4) dx &= 5 \int x^3 dx + 3 \int x^2 dx + 4 \int dx = 5 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 4x + C = \\ &= \frac{5}{4} x^4 + x^3 + 4x + C. \end{aligned}$$

Приклад 2

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{\frac{1}{6}} dx + \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{1+\frac{1}{6}}}{1+\frac{1}{6}} + \frac{x^{1-\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{3}} + C = \\ &= \frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7} + \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C. \end{aligned}$$

Приклад 3

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \sin^2 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx - \\ &- \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctgx} - \operatorname{tgx} + C. \end{aligned}$$

Заміна змінної в невизначеному інтегралі виконується за допомогою підстановки двох видів:

- 1) $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ - монотонна, безперервно диференційована функція нової змінної t . Формула заміни змінної в цьому випадку:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt;$$

- 2) $u = \psi(t)$, де u - нова змінна. Формула заміни змінної при цій підстановці:

$$\int f[\psi(t)] \cdot \psi'(t) dt = \int f(u) du.$$

Такий варіант заміни змінної часто називають підведенням під знак диференціала. Користуючись цим правилом, можна поширити таблицю основних інтегралів.

$$17. \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

$$18. \int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$$

Приклад 4

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= -\frac{1}{2} \int \frac{d(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2} \int (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d(a^2 - x^2) = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(a^2 - x^2)^{1-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{a^2 - x^2} + C. \end{aligned}$$

Приклад 5

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a}} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + a)}{\sqrt{x^2 + a}} = \frac{1}{2} \int (x^2 + a)^{-\frac{1}{2}} d(x^2 + a) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + a)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\sqrt{x^2 + a} + C.\end{aligned}$$

Цими інтегралами можна користуватися як табличними.

Приклад 6

Знайти $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}.$

Розв'язання

Нехай $2x-9 = u^2$, тоді $x = \frac{u^2+9}{2}$, $dx = u du$.

Маємо

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} &= \int \frac{udu}{\frac{u^2+9}{2} \cdot u} = 2 \int \frac{du}{u^2+9} = 2 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{u}{3} + C = \\ &= \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C.\end{aligned}$$

Приклад 7

Знайти $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}}.$

Розв'язання

Нехай $\cos^2 x = t$, тоді $dt = -2 \cos x \sin x dx$, $dt = -\sin 2x dx$.

Маємо

$$\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3-\cos^4 x}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{3-t^2}} = -\arcsin \frac{t}{\sqrt{3}} + C = C - \arcsin \frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}}.$$

Приклад 8

Знайти $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10} - 2}}.$

Розв'язання

Тому що x^4 є похідною $\frac{1}{5}x^5$, то замінивши x^5 на t , отримаємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10} - 2}} &= \int \frac{\frac{1}{5} dt}{\sqrt{t^2 - 2}} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - (\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{5} \ln \left| t + \sqrt{t^2 - 2} \right| + C = \\ &= \frac{1}{5} \ln \left| x^5 + \sqrt{x^{10} - 2} \right| + C. \end{aligned}$$

Метод інтегрування частинами:

якщо $u(x)$ та $v(x)$ диференційовані функції, то справедлива наступна формула

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du.$$

Цією формулою можна користуватися неодноразово.

Треба вказати 4 основні випадки, коли використовується метод інтегрування частинами.

1) Інтеграли виду $\int P_n(x) e^x dx$.

Тому що при диференціюванні показник ступеня многочлена $P_n(x)$ зменшується, то підінтегральні вирази треба розподілити так:

$$P_n(x) = u, \quad e^x dx = dv.$$

$$\text{Тоді } du = P'_n(x) dx \quad \text{та} \quad v = \int e^x dx = e^x.$$

З формули $\int u dv = u \cdot v - \int v du$ маємо:

$$\int P_n(x) e^x dx = P_n(x) e^x - \int P'_n(x) e^x dx.$$

До інтегралу справа можна знову застосувати формулу інтегрування частинами.

Приклад 9

Знайти $\int x^2 e^x dx$,

Розв'язання

Нехай $u = x^2$ та $dv = e^x dx$, тоді $du = 2x dx$ та $v = e^x$.

З формули інтегрування частинами маємо:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx.$$

Для інтегралу $\int 2x e^x dx$ знову застосуємо формулу інтегрування

частинами: $u = x$, $dv = e^x dx \Rightarrow du = dx$, $v = e^x$,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

2) Для інтегралів виду: $\int P_n(x) \sin x dx$ та $\int P_n(x) \cos x dx$
діємо аналогічно, як і в випадку 1).

Приклад 10

Знайти $\int x \cos x dx$.

Розв'язання

Нехай $u = x$ та $dv = \cos x dx$, тоді $du = dx$ та $v = \sin x$.

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

3) Інтеграли виду: $\int P_n(x) \ln x dx$.

В цьому випадку логарифмічну функцію слід прийняти за u , тому що після диференціювання вона спроститься:

$$u = \ln x, \quad dv = P_n(x) dx,$$

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \int P_n(x) dx.$$

$$\int P_n(x) \ln x dx = \ln x \cdot \int P_n(x) dx - \int \left[\frac{1}{x} \int P_n(x) dx \right] dx + C.$$

Приклад 11Знайти $\int x \ln x dx$.**Розв'язання**Нехай $u = \ln x$, $dv = x dx$, $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$.

Зробив інтегрування частинами, знайдемо:

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

4) Для інтегралів виду: $\int P_n(x) \arcsin x dx$, $\int P_n(x) \arccos x dx$,
 $\int P_n(x) \arctg x dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx$, діємо аналогічно випадку 3).

Приклад 12Знайти $\int x \arctg x dx$.**Розв'язання**Нехай $u = \arctg x$, $dv = dx$, тоді $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$.

$$\int \arctg x dx = x \cdot \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

ЗАВДАННЯ 2.

Площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f_1(x)$,
 $y = f_2(x)$, $x \in [a, b]$, такими що $f_2(x) \geq f_1(x)$, обчислюється за
 формулою:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

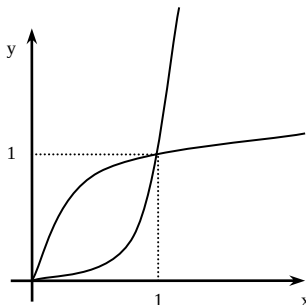
Приклад 13

Знайти площу фігури, обмеженої заданими лініями:

$$y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$$

Розв'язання

Побудуємо графіки функцій та визначимо фігуру, площу якої шукаємо:



Знайдемо координати точок перетину парабол:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = x^2 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 1 \\ y_1 = 0, y_2 = 1 \end{cases}.$$

Оскільки на відрізку $[0, 1]$ виконується нерівність $\sqrt{x} \geq x^2$, то:

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ кв. од.}$$

ЗАВДАННЯ 3.Приклад 14

Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами:

$$V'(t) = 6 + 4 \cdot \sqrt[4]{t^3}; \quad D'(t) = 13 - 3 \cdot \sqrt[4]{t^3}.$$

$V(t)$ і $D(t)$ вимірюється у мільйонах гривень, а t – у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і знайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

Розв'язання

Оптимальний час t_0 для прибутку підприємства одержимо з умови: $V'(t) = D'(t)$.

$$6 + 4 \cdot \sqrt[4]{t^3} = 13 - 3 \cdot \sqrt[4]{t^3}, \quad 7 \cdot \sqrt[4]{t^3} = 7, \quad t_0 = 1.$$

Отже, підприємство було прибутковим 1 рік. За цей час одержано прибутку:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^1 (D'(t) - V'(t)) dt = \int_0^1 (13 - 3 \cdot \sqrt[4]{t^3} - 6 - 4 \cdot \sqrt[4]{t^3}) dt = \\ &= \int_0^1 (7 - 7 \cdot \sqrt[4]{t^3}) dt = \left(7t - \frac{7 \cdot t^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} \right) \Bigg|_0^1 = 7 - 4 = 3 \text{ (млн. грн.)} \end{aligned}$$

ЗАВДАННЯ 4.

Диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$N(x) \cdot Q(y) dx + M(y) \cdot F(y) dy = 0$$

називають рівнянням з відокремлюваними змінними. Це рівняння розв'язується методом відокремлення змінних.

Приклад 15

Знайти

частинний

розв'язок

рівняння

$$x\sqrt{1-y^2} dx + y\sqrt{1+x^2} dy = 0, \text{ якщо } y(0) = 1.$$

Розв'язання

Приведемо це рівняння до рівняння з відокремленими змінними вигляду

$$N(x) dx + M(y) dy = 0.$$

Для цього поділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{1-y^2} \cdot \sqrt{1+x^2}$ та дістанемо

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} dy = 0.$$

Інтегруючи обидві частини рівняння, дістанемо загальний розв'язок:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} dy = C; \Rightarrow \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-y^2} = C.$$

Підставимо в загальний розв'язок початкову умову $y(0) = 1$ та отримуємо:

$$\sqrt{1+0^2} + \sqrt{1-1^2} = C, \quad C = 1.$$

Отже, частинний розв'язок заданого рівняння має вид:

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1.$$

ЗАВДАННЯ 5.

Однорідним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння, яке можна звести до вигляду

$$y' = f(x, y),$$

де функція $f(x, y)$ не змінюється при заміні x та y на tx та ty , тобто задовольняє умові

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Приклад 16

Розв'язати рівняння
$$y' = \frac{y}{x+y}.$$

Розв'язання

Це рівняння є однорідним тому, що для правої частини рівняння виконується умова:

$$\frac{ty}{tx + ty} = \frac{ty}{t \cdot (x + y)} = \frac{y}{x + y}$$

Введемо допоміжну функцію u від змінної x , тобто зробимо підстановку $u = \frac{y}{x}$. Маємо $y = u \cdot x \Rightarrow y' = u' \cdot x + u$.

Тому задане рівняння прийме вигляд

$$\begin{aligned} u' \cdot x + u &= \frac{u \cdot x}{x + u \cdot x} \Rightarrow u' \cdot x = \frac{u}{1 + u} - u \Rightarrow \\ x \cdot \frac{du}{dx} &= \frac{u - u - u^2}{1 + u} \Rightarrow x \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{u^2}{1 + u} \Rightarrow \frac{1 + u}{u^2} du = -\frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Останнє рівняння є рівнянням з відокремленими змінними. Інтегруючи його, знаходимо:

$$\int \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} \right) du = - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{u} - \ln u = \ln x + \ln C \Rightarrow \frac{1}{u} = \ln(Cux).$$

Підставимо замість u вираз $\frac{y}{x}$ та одержимо загальний розв'язок:

$$\frac{x}{y} = \ln Cy \Rightarrow x = \ln(Cy)^y.$$

ЗАВДАННЯ 6.

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння, яке містить шукану функцію y та її похідну y' у першому степені. Таке рівняння можна привести до вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Приклад 17

Розв'язати рівняння $(x^2 - 1) \cdot y' + y = \sqrt{x - 1}$.

Розв'язання

Запишемо це рівняння у вигляді

$$y' + \frac{y}{x^2 - 1} = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 1}.$$

Це рівняння є лінійне диференціальне рівняння першого порядку, його розв'язок будемо шукати у вигляді

$$y = u(x) \cdot v(x).$$

Одну із цих функцій можна взяти довільно, а друга буде визначатися так, щоб їх добуток задовольняв рівняння.

Знайдемо

$$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

та підставимо у задане рівняння. Тоді

$$u' \cdot v + u \cdot v' + \frac{1}{x^2 - 1} \cdot u \cdot v = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 1},$$

або

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + \frac{1}{x^2 - 1} \cdot v) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 1}.$$

Визначимо v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто виконувалась рівність

$$v' + \frac{1}{x^2 - 1} \cdot v = 0.$$

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} &= -\frac{dx}{x^2 - 1} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x^2 - 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln|v| &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \Rightarrow v(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Знайдемо тепер функцію u із рівняння :

$$u' \cdot \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 1} \Rightarrow du = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 1} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot dx$$

$$u = \int \frac{dx}{(x+1)^{3/2}} = \int (x+1)^{-3/2} d(x+1) = -\frac{2}{\sqrt{x+1}} + C.$$

Підставимо одержані функції u , v у формулу $y = u(x) \cdot v(x)$ та отримаємо загальний розв'язок

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{x+1}} + C \right) = -\frac{2}{\sqrt{x-1}} + C \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

ЗАВДАННЯ 7.

Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Складемо до нього характеристичне рівняння:

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0.$$

При знаходженні коренів характеристичного рівняння k_1 та k_2 в залежності від дискримінанту D можливі наступні випадки:

Дискримінант	Характер коренів характеристичного рівняння	Частинні розв'язки диференціального рівняння
1. $D > 0$	$k_1 \neq k_2$, дійсні	$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}$
2. $D = 0$	$k_1 = k_2$, дійсні	$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = x e^{k_2 x}$
3. $D < 0$	$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, комплексні	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$

Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

де y_1, y_2 - частинні розв'язки диференціального рівняння,
 C_1, C_2 - довільні сталі.

Приклад 18

Розв'язати рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 5k + 6 = 0$.

Воно має два корені $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, тоді частинні розв'язки диференціального рівняння: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{3x}$.

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Приклад 19

Розв'язати рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння: $k^2 + 6k + 9 = 0$.

Розв'язавши його, отримаємо два корені $k_1 = k_2 = -3$, тоді частинні розв'язки диференціального рівняння:

$$y_1 = e^{-3x}, \quad y_2 = x e^{-3x}.$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}.$$

Приклад 20

Розв'язати рівняння $y'' - 6y' + 25y = 0$.

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 6k + 25 = 0$.

Розв'язавши його, отримаємо два комплексні корені $k_{1,2} = 3 \pm 4i$.

Тоді частинні розв'язки диференціального рівняння:

$$y_1 = e^{3x} \cos 4x, \quad y_2 = e^{3x} \sin 4x.$$

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{3x} \cos 4x + C_2 e^{3x} \sin 4x.$$

ЗАВДАННЯ 8.

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння складається із суми його частинного розв'язку (y_u) й загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (y_o), тобто

$$y = y_o + y_u.$$

Спочатку знайдемо y_o , розв'язавши відповідне однорідне рівняння

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Частинний розв'язок y_u знайдемо методом невизначених коефіцієнтів, використовуючи вигляд правої частини $f(x)$.

1. Нехай $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$, де $P(x)$ - многочлен степеня n .

Частинний розв'язок залежить від взаємозв'язку між α та коренями характеристичного рівняння k_1 та k_2 .

№	Взаємозв'язок між α та k_1 і k_2	Вигляд частинного розв'язку
1	$\alpha \neq k_1 \neq k_2$	$y_u = e^{\alpha x} M(x),$ $M(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n$
2	$\alpha = k_1$ або $\alpha = k_2$	$y_u = x e^{\alpha x} M(x),$ $M(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n$
3	$\alpha = k_1 = k_2$	$y_u = x^2 e^{\alpha x} M(x),$ $M(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n$

б) $f(x) = e^{\alpha x} [P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x]$, де $P(x)$ - многочлен степеня m_1 , $Q(x)$ - многочлен степеня m_2 .

Обчислимо $n = \max(m_1, m_2)$ та $z = \alpha + i\beta$.

Вигляд частинного розв'язку залежить від взаємозв'язку між z та коренями характеристичного рівняння k_1 та k_2 . Можливі наступні випадки:

№	Взаємозв'язок між z та k_1 і k_2	Вигляд частинного розв'язку
1	$z \neq k_1 \neq k_2$	$y_{\text{ч}} = e^{\alpha x} [M(x) \cos \beta x + N(x) \sin \beta x],$ $M(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n$ $N(x) = B_0 + B_1 x + \dots + B_n x^n$
2	$z = k_1$ або $z = k_2$	$y_{\text{ч}} = x e^{\alpha x} [M(x) \cos \beta x + N(x) \sin \beta x],$ $M(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n$ $N(x) = B_0 + B_1 x + \dots + B_n x^n$

Приклад 21

Визначити та записати структуру частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння по виду правої частини $f(x)$:

$$y'' - 5y' + 6y = 13 \sin 3x.$$

Розв'язання

Знайдемо y_o , розв'язавши відповідне однорідне рівняння

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

$$k^2 - 5k + 6 = 0 \Rightarrow k_1 = 2, k_2 = 3 \Rightarrow y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{3x} \Rightarrow$$

$$\underline{y_o = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}}.$$

Запишемо тепер структуру частинного розв'язку $y_{\text{ч}}$ лінійного неоднорідного диференціального рівняння по виду правої частини $f(x)$:

$$f(x) = 13\sin 3x = e^{0x}[0 \cdot \cos 3x + 13\sin 3x] \Rightarrow$$

$P(x) = 0$, $Q(x) = 13$ - це многочлени нульового степеня ($n = 0$);

Обчислимо $z = \alpha + i\beta = 0 + 3i = 3i$. Оскільки $z \neq k_1 \neq k_2$, то за таблицею частинний розв'язок матиме вигляд

$$y_{\text{ч}} = e^{0x}[A_0 \cos 3x + B_0 \sin 3x] = A_0 \cos 3x + B_0 \sin 3x,$$

де $M(x) = A_0$ та $N(x) = B_0$.

Отже, загальний розв'язок:

$$y = y_o + y_{\text{ч}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + A_0 \cos 3x + B_0 \sin 3x.$$

ЗАВДАННЯ 9.

Приклад 22

Для функції $z = x^y + \ln \frac{x}{y}$:

- знайти частинні похідні I-го порядку;
- знайти градієнт у точці $M_0(1,1)$ та у загальному вигляді.

Розв'язання

а) При обчисленні частинних похідних потрібно користуватися відомими правилами та формулами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи при цьому другу змінну постійною.

Вважаючи змінну y сталою, отримаємо

$$z'_x = y \cdot x^{y-1} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = y \cdot x^{y-1} + \frac{1}{x}.$$

Якщо вважати x сталою, отримаємо

$$z'_y = x^y \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) = x^y \ln x - \frac{1}{y}.$$

б) Градієнтом функції $z = f(x, y)$ називається вектор, координатами якого є частинні похідні цієї функції, тобто

$$\text{grad } z = \{z'_x, z'_y\} = z'_x \cdot \bar{i} + z'_y \cdot \bar{j}.$$

У нашому випадку

$$\text{grad } z = \left(y \cdot x^{y-1} + \frac{1}{x} \right) \cdot \bar{i} + \left(x^y \cdot \ln x - \frac{1}{y} \right) \cdot \bar{j},$$

а у точці $M_0(1, 1)$:

$$\begin{aligned} \text{grad } z(M_0) &= \left(y \cdot x^{y-1} + \frac{1}{x} \right) \Big|_{M_0} \cdot \bar{i} + \left(x^y \cdot \ln x - \frac{1}{y} \right) \Big|_{M_0} \cdot \bar{j} = \\ &= \left(1 \cdot 1^0 + \frac{1}{1} \right) \cdot \bar{i} + \left(1^1 \cdot \ln 1 - \frac{1}{1} \right) \cdot \bar{j} = 2 \cdot \bar{i} - 1 \cdot \bar{j}. \end{aligned}$$

ЗАВДАННЯ 10.

Приклад 23

Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох видів ресурсів x та y і виражається функцією $z = -2x^2 - 4y^2 + 2xy + 20x + 200y - 2800$. Визначити витрати ресурсів x та y , що забезпечують максимальний прибуток підприємства та знайти його.

Розв'язання

Рішення зводиться до пошуку екстремуму функції $z = f(x, y)$. Знайдемо частинні похідні:

$$z'_x = -4x + 2y + 20; \quad z'_y = -8y + 2x + 200.$$

Необхідні умови екстремуму функції двох змінних мають вигляд:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$$

Точки, які задовольняють цю систему рівнянь, називають критичними.

У нашому випадку критичні точки задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -4x + 2y + 20 = 0, \\ -8y + 2x + 200 = 0. \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -2x + y = -10, \\ x - 4y = -100. \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} -2(4y - 100) + y = -10, \\ x = 4y - 100. \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 30, \\ x = 20. \end{cases} \end{aligned}$$

Отже, функція має критичну точку $M_1(20, 30)$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$A = z''_{xx} = -4; \quad B = z''_{xy} = 2; \quad C = z''_{yy} = -8.$$

Обчислимо $\Delta = A \cdot C - B^2$ у критичній точці:

$\Delta(M_1) = (-4) \cdot (-8) - 2^2 = 28$. Оскільки $\Delta > 0$, то у точці M_1 є екстремум, причому максимум (тому що $A < 0$).

Отже, $z_{\max} = z(20, 30) = 400$.

Таким чином, витрати ресурсів x та y , що забезпечують максимальний прибуток підприємства, складають 20 та 30 одиниць, причому максимальний прибуток підприємства дорівнює 400 ум. од.

ЗАВДАННЯ 11.Приклад 24

Дослідити на збіжність ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3 + 4n - 1}{3n^4 + 2} \right);$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{3^n};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{2n-1} \right)^n.$$

Розв'язання

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3 + 4n - 1}{3n^4 + 2} \right).$$

Застосовуємо граничну ознаку порівняння: якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

– ряди з додатними членами і існує скінчена границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$,

то ряди одночасно будуть або збіжними, або розбіжними.

У нашому випадку $a_n = \frac{n^3 + 4n - 1}{3n^4 + 2}$, виберемо $b_n = \frac{n^3}{n^4} = \frac{1}{n}$.

Відомо, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний ряд. Обчислимо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3 + 4n - 1) \cdot n}{(3n^4 + 2)} = \frac{1}{3}.$$

Тобто даний ряд, як і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, є розбіжним.

$$\text{б)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{3^n}.$$

Застосуємо ознаку Даламбера. Обчислимо $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Якщо $l < 1$ – ряд збіжний, $l > 1$ – ряд розбіжний, $l = 1$ – ознака не чинна, рекомендовано використовувати інші ознаки збіжності.

У нашому випадку:

$$a_n = \frac{(2n+1)!}{3^n}; \quad a_{n+1} = \frac{(2(n+1)+1)!}{3^{n+1}};$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)! \cdot 3^n}{3^{n+1} \cdot (2n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2) \cdot (2n+3)}{3} = \infty > 1.$$

За ознакою Даламбера ряд розбіжний.

$$\text{в)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{2n-1} \right)^n.$$

Застосуємо ознаку Коші. Обчислимо $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Якщо $l < 1$ – ряд збіжний, $l > 1$ – ряд розбіжний, $l = 1$ – ознака не чинна, рекомендовано використовувати інші ознаки збіжності.

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1+n}{2n-1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1, \quad \text{тобто ряд збіжний.}$$

ЗАВДАННЯ 12.

Приклад 25

Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n \cdot x^n}{n^2}$.

Розв'язання

Цей ряд є степеневим. Радіус збіжності R степеневому ряду

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$ можна знайти за формулою:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad \text{або} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}.$$

У нашому випадку маємо:

$$a_{n+1} = \frac{100^{n+1}}{(n+1)^2}; \quad a_n = \frac{100^n}{n^2};$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100^n \cdot (n+1)^2}{n^2 \cdot 100^{n+1}} = \frac{1}{100}.$$

Ряд збігається, якщо $|x| < \frac{1}{100}$, тобто $-\frac{1}{100} < x < \frac{1}{100}$.

Нехай $x = \frac{1}{100}$. Тоді матимемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, який збіжний,

оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ збігається при $\alpha > 1$.

Нехай $x = -\frac{1}{100}$. Тоді матимемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Це

знакозмінний ряд, який абсолютно збігається, оскільки ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ — збіжний.}$$

Остаточно, для області збіжності даного ряду маємо:

$$-\frac{1}{100} \leq x \leq \frac{1}{100}.$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

ЗАВДАННЯ 1.

Знайти невизначений інтеграл:

1. а) $\int (x^4 - 5\sqrt[3]{x^2} + \frac{7}{4x-3} - 9)dx$; б) $\int \frac{5dx}{3x^2 - 7}$;
 в) $\int e^{\sin 3x} \cos 3x dx$; г) $\int x \sin 3x dx$.
2. а) $\int ((2x+6)^3 + \sqrt[4]{x^7} - \frac{9}{x} + 4)dx$; б) $\int \frac{3dx}{8x^2 + 5}$;
 в) $\int \sqrt[6]{3-4\cos 3x} \cdot \sin 3x dx$; г) $\int x e^{-2x} dx$.
3. а) $\int (5x^8 + \sqrt[3]{(4x+3)^2} + \frac{2}{x} - 5)dx$; б) $\int \frac{9dx}{\sqrt{5x^2 - 6}}$;
 в) $\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}$; г) $\int x \sin 8x dx$.
4. а) $\int (3x^4 + \sqrt[6]{x^5} + \frac{2}{9x+5} - 3)dx$; б) $\int \frac{8dx}{\sqrt{5-3x^2}}$;
 в) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx$; г) $\int \arctg x dx$.
5. а) $\int ((9x-6)^8 + \sqrt{x^3} - \frac{5}{x} + 4)dx$; б) $\int \frac{2dx}{7x^2 - 1}$;
 в) $\int \sqrt[5]{3-5\cos 7x} \cdot \sin 7x dx$; г) $\int x \ln x dx$.
6. а) $\int (5 + \sqrt[9]{(7x-5)^2} - \frac{4}{x} - 3x^4)dx$; б) $\int \frac{6dx}{3x^2 + 2}$;
 в) $\int 3x^2 e^{-x^3} dx$; г) $\int (5x-7)e^x dx$.

7. a) $\int (8x^5 + 2\sqrt{x^5} - \frac{4}{3x+5} + 7)dx$; б) $\int \frac{7dx}{\sqrt{2x^2-3}}$;
 в) $\int \frac{e^{ctg 3x}}{\sin^2 3x} dx$; г) $\int x \cos 5x dx$.
8. a) $\int ((7-5x)^3 - \sqrt{x^5} - \frac{9}{4x} + 3)dx$; б) $\int \frac{3dx}{\sqrt{2-8x^2}}$;
 в) $\int \sqrt[3]{2+e^{3x}} \cdot e^{3x} dx$; г) $\int (1-4x) \sin 2x dx$.
9. a) $\int (1 - \sqrt[6]{(4x-7)^5} + \frac{6}{5x} - 7x^9)dx$; б) $\int \frac{4dx}{6x^2-5}$;
 в) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$; г) $\int arctg 2x dx$.
10. a) $\int (3x^4 - 7\sqrt{x^9} + \frac{5}{3-9x} + 4)dx$; б) $\int \frac{3dx}{\sqrt{8x^2+7}}$;
 в) $\int \sqrt{3-5\cos 2x} \cdot \sin 2x dx$; г) $\int x e^{7x} dx$.
11. a) $\int ((3x+1)^4 + 5\sqrt[5]{x^3} + \frac{2}{7x} + 3)dx$; б) $\int \frac{7dx}{5x^2+2}$;
 в) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$; г) $\int e^x 5x dx$.
12. a) $\int (8 + \sqrt[3]{(2x+9)^7} + \frac{1}{6x} - 5x^2)dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{10-3x^2}}$;
 в) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$; г) $\int x \ln 3x dx$.
13. a) $\int (9x^6 + 7\sqrt{x^3} - \frac{10}{3x+7} + 2)dx$; б) $\int \frac{2dx}{\sqrt{8x^2+3}}$;

$$\text{B) } \int \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} dx; \quad \text{Г) } \int \arccos x dx.$$

14. а) $\int (4 + \sqrt[4]{(3x-8)^5} - \frac{7}{2x} - x^3) dx$; б) $\int \frac{15dx}{2x^2-7}$;

Б) $\int \sin^{13} x \cos x dx$; Г) $\int x e^{-x} dx$.

15. а) $\int ((6-3x)^4 - 9\sqrt{x^3} - \frac{1}{4x} + 8)dx$; б) $\int \frac{9dx}{2x^2+5}$;

$$\text{B) } \int \frac{(x+2)^3}{\sqrt{x}} dx; \quad \text{r) } \int x \sin 7x dx.$$

16. а) $\int (4x^7 + \sqrt[4]{(3+8x)^3} + \frac{9}{5x} - 8) dx$; б) $\int \frac{5dx}{\sqrt{7-9x^2}}$;

$$\text{B) } \int \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx; \qquad \text{Г) } \int x^2 \ln x dx.$$

17. а) $\int (6x^3 - 12\sqrt{x^3} + \frac{8}{3x-2} + 2)dx$; б) $\int \frac{9dx}{\sqrt{5x^2-7}}$;

$$\text{B) } \int 7^x (7^x + 3)^4 dx; \quad \text{Г) } \int (x-1) \ln x dx.$$

18. а) $\int (5 - \sqrt[7]{(2x+9)^5} - \frac{4}{7x} - 5x^4) dx$; б) $\int \frac{9dx}{\sqrt{5+3x^2}}$;

$$\text{B) } \int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x} + 5}; \quad \text{Г) } \int (1 - 4x) \sin 2x dx.$$

19. а) $\int ((6x-3)^9 + 9\sqrt[3]{x^5} - \frac{7}{4x} - 1)dx$; б) $\int \frac{4dx}{3x^2 + 10}$;

$$\text{B) } \int \frac{e^{tg3x}}{\cos^2 3x} dx; \qquad \text{Г) } \int x e^{2x} dx.$$

20. a) $\int (7x^5 + 3\sqrt{x^3} - \frac{6}{2-5x} + 9)dx$; б) $\int \frac{5dx}{8x^2 - 1}$;
 в) $\int (2 \ln x + 3)^2 \frac{dx}{x}$; г) $\int (2 - xe^{-3x})dx$.
21. a) $\int (8x^5 - \sqrt[5]{(5-4x)^7} + \frac{2}{3x} + 4)dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{10x^2 + 7}}$;
 в) $\int \frac{\sin x dx}{1 + \cos x}$; г) $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$.
22. a) $\int ((6+7x)^6 - 2\sqrt[9]{x^5} + \frac{4}{3x} + 9)dx$; б) $\int \frac{4dx}{\sqrt{2x^2 - 8}}$;
 в) $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 1}$; г) $\int \sqrt{x} \cdot \ln x dx$.
23. a) $\int (1 - \sqrt[3]{(4x-5)^5} + \frac{15}{8x} - 9x^7)dx$; б) $\int \frac{4dx}{\sqrt{7-10x^2}}$;
 в) $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x} dx$; г) $\int (x+3)\cos 2x dx$.
24. a) $\int (3x^4 - \sqrt[9]{(4+6x)^5} - \frac{1}{3x} - 2)dx$; б) $\int \frac{3dx}{8x^2 + 7}$;
 в) $\int \frac{\ln^2 x + 1}{x} dx$; г) $\int (x-2) \cdot \cos x dx$.
25. a) $\int (9x^3 + 2\sqrt{x^7} - \frac{5}{7x+9} - 6)dx$; б) $\int \frac{5dx}{4x^2 - 11}$;
 в) $\int \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} dx$; г) $\int x \cdot (\ln x^2 - 1)dx$.
26. a) $\int ((6-2x)^8 + 7\sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{5x} - 1)dx$; б) $\int \frac{15dx}{\sqrt{3x^2 + 15}}$;

$$\text{B)} \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 x + 4}} dx;$$

$$\text{Г)} \int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

$$27. \text{ a)} \int (10 + \sqrt[8]{(4-5x)^7} + \frac{9}{5x} - x^3) dx; \text{ б)} \int \frac{6dx}{\sqrt{4-5x^2}};$$

$$\text{B)} \int \frac{\sqrt{\arctg x}}{1+x^2} dx;$$

$$\text{Г)} \int x^2 \cdot e^{-x} dx.$$

$$28. \text{ a)} \int (4x^5 - 8\sqrt{x^7} + \frac{9}{7-x} - 2) dx; \text{ б)} \int \frac{7dx}{3x^2 + 9};$$

$$\text{B)} \int \frac{(x^4 + 1)dx}{x^5 + 5x - 8};$$

$$\text{Г)} \int \ln(x + 2) dx.$$

$$29. \text{ a)} \int ((5+3x)^7 - 3\sqrt[9]{x^5} + \frac{8}{3x} - 6) dx; \text{ б)} \int \frac{7dx}{\sqrt{8x^2 - 9}};$$

$$\text{B)} \int \frac{(\ln x - 3)^2}{x} dx;$$

$$\text{Г)} \int x \cdot 3^x dx.$$

$$30. \text{ a)} \int (2 + \sqrt[5]{(9-7x)^3} + \frac{3}{5x} - 6x^4) dx; \text{ б)} \int \frac{12dx}{3x^2 - 5};$$

$$\text{B)} \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 4}} dx;$$

$$\text{Г)} \int \arcsin 3x dx.$$

ЗАВДАННЯ 2.

Знайти площу фігури, обмежену заданими лініями.

1. $y = x^2 - 2$; $y = 0$.
2. $y = x^2 - 6x + 5$; $y = 0$.
3. $y = x^3$; $y = x^2$.
4. $y = x$; $y = -x + 2$; $y = 0$.
5. $y = -x^2 + 4$; $y = 0$.
6. $y = -x^2 + 6x - 5$; $y = 0$.
7. $y = \sqrt{x}$; $y = 2 - x$; $y = 0$.
8. $y = 4 - x^2$; $y = 0$; $x = 1$.
9. $y = e^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$.
10. $y = x^2 + 1$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$.
11. $y = x^3$; $y = 1$; $x = 0$.
12. $y = \frac{1}{x}$; $x = 2$; $y = x$.
13. $y = \frac{4}{x}$; $x = 4$; $y = x$.
14. $y = x^2$; $y = -x^2 + 2$.
15. $y = x$; $y = x^2$.
16. $y = 2x$; $y = 2x^2$.
17. $y = \sin x$; $x = 0$; $x = \pi$; $y = 0$.
18. $y = \cos x$; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$; $y = 0$.
19. $y = \operatorname{tg} x$; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{4}$; $y = 0$.
20. $y = \operatorname{ctg} x$; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{4}$; $y = 0$.
21. $y = x^2 - 5x + 6$; $y = x$.

22. $y = x^2 + x$; $y = x + 1$.
23. $y = x^2 + x$; $y = -x$.
24. $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt{4 - 3x}$; $y = 0$.
25. $y = x^2 + 2$; $y = 1 - x^2$; $x = 0$; $x = 1$.
26. $y = x^2$; $y = 2e^x$; $x = 0$; $x = 1$.
27. $y = \sqrt{x}$; $y = \sqrt{1 - x}$; $y = 0$.
28. $y = x^2 - 4$; $y = 4 - x^2$.
29. $y = x^2 - 9$; $y = 9 - x^2$.
30. $y = x^2 + 5$; $y = x + 5$.

ЗАВДАННЯ 3.

Швидкості зміни витрат і доходу підприємства після початку його діяльності визначались формулами $V'(t)$ і $D'(t)$. $V(t)$ і $D(t)$ вимірюються у мільйонах гривень, а t — у роках. Визначити тривалість прибуткового існування підприємства і зайти загальний прибуток, що одержали за цей час.

1. $V'(t) = 4 + \sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 16 - 2\sqrt[3]{t^2}$.
2. $V'(t) = 1 + 2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 17 - 2\sqrt[3]{t^2}$.
3. $V'(t) = 2 + 2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 10 - 2\sqrt[3]{t^2}$.
4. $V'(t) = 5 + 2\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 45 - 3\sqrt[4]{t^3}$.
5. $V'(t) = 3 + 4\sqrt{t}$, $D'(t) = 13 - \sqrt{t}$.
6. $V'(t) = 14 + \sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 38 - 2\sqrt[4]{t^3}$.
7. $V'(t) = 7 + \sqrt{t}$, $D'(t) = 27 - 3\sqrt{t}$.
8. $V'(t) = 7 + 5\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 31 - \sqrt[3]{t^2}$.
9. $V'(t) = 11 + 3\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 18 - 4\sqrt[3]{t^2}$.

10. $V'(t) = 15 + 3\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 20 - 2\sqrt[3]{t^2}$.
11. $V'(t) = 22 + 2\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 27 - 3\sqrt[4]{t^3}$.
12. $V'(t) = 13 + 2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 17 - 2\sqrt[3]{t^2}$.
13. $V'(t) = 4 + 3\sqrt{t}$, $D'(t) = 9 - \sqrt{t}$.
14. $V'(t) = 1 + 2\sqrt{t}$, $D'(t) = 7 - \sqrt{t}$.
15. $V'(t) = 2 + 4\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 58 - 4\sqrt[4]{t^3}$.
16. $V'(t) = 5 + \sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 21 - \sqrt[4]{t^3}$.
17. $V'(t) = 1 + 4\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 57 - 3\sqrt[4]{t^3}$.
18. $V'(t) = 6 + \sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 22 - \sqrt[4]{t^3}$.
19. $V'(t) = 8 + 3\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 28 - 2\sqrt[3]{t^2}$.
20. $V'(t) = 10 + \sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 12 - \sqrt[4]{t^3}$.
21. $V'(t) = 9 + 2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 29 - 3\sqrt[3]{t^2}$.
22. $V'(t) = 13 + 2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 18 - 3\sqrt[3]{t^2}$.
23. $V'(t) = 12 + \sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 14 - \sqrt[4]{t^3}$.
24. $V'(t) = 10 + 2\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 14 - 2\sqrt[4]{t^3}$.
25. $V'(t) = 3 + \sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 57 - \sqrt[4]{t^3}$.
26. $V'(t) = 1 + 3\sqrt[4]{t^3}$, $D'(t) = 57 - 4\sqrt[4]{t^3}$.
27. $V'(t) = 9 + 4\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 14 - \sqrt[3]{t^2}$.
28. $V'(t) = 7 + \sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 12 - 4\sqrt[3]{t^2}$.
29. $V'(t) = 2 + 2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 10 - 2\sqrt[3]{t^2}$.
30. $V'(t) = 5 + 2\sqrt[3]{t^2}$, $D'(t) = 10 - 3\sqrt[3]{t^2}$.

ЗАВДАННЯ 4.

Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y' \ln y \cos x = y;$ $y(0) = 1.$
2. $(1 + x^2)dy - ydx = 0;$ $y(1) = 1.$
3. $yy' + xe^{y^2} = 0;$ $y(1) = 0.$
4. $3e^x tgy dx + (1 + e^x) \sec^2 y dy = 0;$ $y(0) = \frac{\pi}{4}.$
5. $ydx - (\ln y)^2 dy = 0;$ $y(0) = e.$
6. $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx;$ $y(0) = 0.$
7. $y' + \cos(x + 2y) = \cos(x - 2y);$ $y(0) = \frac{\pi}{4}.$
8. $y \ln^3 y + y' \sqrt{x+1} = 0;$ $y(-\frac{15}{16}) = e.$
9. $y = y' \ln y;$ $y(2) = 1.$
10. $y' = e^{x+y} + e^{x-y};$ $y(0) = 0.$
11. $(x^2 + 1)y' + 2xy^2 = 0;$ $y(0) = 1.$
12. $xy' + y = y^2;$ $y(1) = 0,5.$
13. $x^2 y^2 y' + 1 = y;$ $y(1) = 2.$
14. $\frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0;$ $y(1) = 1.$
15. $x(y^6 + 1)dx + y^2(x^4 + 1)dy = 0;$ $y(0) = 1.$
16. $(1 + e^{2x})y'y^2 = e^x;$ $y(0) = 0.$
17. $(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0;$ $y(1) = 1.$
18. $xy' = y^2 + 1;$ $y(1) = 1.$
19. $(x^2 y - x^2)dy = (xy^2 + y^2)dx;$ $y(1) = 1.$
20. $(1 - e^{y^2})dy = \frac{dx}{2y};$ $y(0) = 0.$
21. $y'(1 + x^2) = 1 + y^2;$ $y(0) = 1.$

22. $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0;$ $y(0) = 1.$
23. $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx;$ $y(2) = 0.$
24. $(x^2 + x)ydx + (y^2 + 1)dy = 0;$ $y(0) = 1.$
25. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0;$ $y(2) = 0.$
26. $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0;$ $y(0) = 1.$
27. $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy;$ $y(1) = 0.$
28. $y' + 2y - y^2 = 0;$ $y(0) = 3.$
29. $(1 + e^{2x})y^2y' = e^x;$ $y(0) = 1.$
30. $(x + xy)dy + (y - xy)dx = 0;$ $y(1) = 1.$

ЗАВДАННЯ 5.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $2x^2y' = x^2 + y^2.$
2. $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}.$
3. $x \sin \frac{y}{x} y' + x = y \sin \frac{y}{x}.$
4. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$
5. $xy' \ln \frac{y}{x} = x + y \ln \frac{y}{x}.$
6. $xyy' = y^2 + 2x^2.$
7. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$
8. $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}.$
9. $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$
10. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0.$

11. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y.$
12. $\operatorname{tg} \frac{y}{x} (xy' - y) = x.$
13. $xy' = y - \sqrt{xy}.$
14. $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0.$
15. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$
16. $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}.$
17. $xy'y - y^2 = y'x^2.$
18. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$
19. $3xyy' + x^2 = 3y^2.$
20. $xy' - x \cos^2 \frac{y}{x} = y.$
21. $y^2 + x^2 y' = xyy'.$
22. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 9 \frac{y}{x} + 9.$
23. $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y .$
24. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x).$
25. $x dy = (2y - x) dx .$
26. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}.$
27. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2) .$
28. $xy' + y(\ln \frac{y}{x} - 1) = 0.$
29. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0.$
30. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2.$

ЗАВДАННЯ 6.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння.

1. $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}.$
2. $y' + \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin x + x.$
3. $xy' - y = x^2 \cos x.$
4. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$
5. $y' - 3y = e^{-2x}.$
6. $y' + 5y = e^{4x}.$
7. $y' + 2y = e^{3x}.$
8. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x.$
9. $y' \sin x - y \cos x = 1.$
10. $y' - \frac{y}{x} = 1 + 2 \ln x.$
11. $xy' - 2y = 2x^4.$
12. $(2x+1)y' = 4x + 2y.$
13. $(xy + e^x)dx - xdy = 0.$
14. $x^2 y' + xy + 1 = 0.$
15. $y = x(y' - x \cos x).$
16. $y'x = x \ln x + y.$
17. $(xy' - 1) \ln x = 2y.$
18. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}.$
19. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x}.$
20. $y' = (x+1)^3 + \frac{2y}{x+1}.$
21. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3.$

22. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0.$
23. $x^3y' = 1 - 2x^2y.$
24. $y'ctgx + y = 2\cos^2 xctgx.$
25. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x.$
26. $y' + ytgx = \cos^2 x.$
27. $(2xy + 3)dx - x^2dy = 0.$
28. $(x^4 + 2y)dx = xdy.$
29. $\cos xdy = (y + 2\cos x)\sin xdx.$
30. $x^2y' = xy + 1.$

ЗАВДАННЯ 7.

Розв'язати однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| 1. $y'' - 2y' + y = 0.$ | 11. $y'' + 8y' + 16y = 0.$ |
| 2. $y'' - 6y' + 9y = 0.$ | 12. $y'' + 10y' + 34y = 0.$ |
| 3. $y'' + 2y' + 2y = 0.$ | 13. $y'' - 6y' + 25y = 0.$ |
| 4. $y'' - 6y' + 25y = 0.$ | 14. $y'' + 25y = 0.$ |
| 5. $y'' - 14y' + 53y = 0.$ | 15. $y'' + 2y' + 5y = 0.$ |
| 6. $y'' + 4y' + 20y = 0.$ | 16. $y'' - 10y' + 25y = 0.$ |
| 7. $y'' - 4y' + 20y = 0.$ | 17. $y'' + y' - 12y = 0.$ |
| 8. $y'' - 12y' + 36y = 0.$ | 18. $y'' - 2y' + 5y = 0.$ |
| 9. $y'' + y = 0.$ | 19. $y'' + 8y' + 16y = 0.$ |
| 10. $y'' - y = 0.$ | 20. $y'' - 2y' + 37y = 0.$ |

21. $y'' - 8y' = 0$.

26. $y'' - 4y' + 20y = 0$.

22. $y'' + 12y' + 36y = 0$.

27. $y'' - 12y' + 36y = 0$.

23. $y'' + 3y' = 0$.

28. $y'' + y = 0$.

24. $y'' - 9y' + 18y = 0$.

29. $y'' - y = 0$.

25. $y'' + 8y' = 0$.

30. $y'' + 8y' + 16y = 0$.

ЗАВДАННЯ 8.

Визначити та записати структуру частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння по виду правої частини $f(x)$.

1. $y'' - 6y' + 9y = f(x)$; а) $f(x) = e^{3x}(x+5)$;

б) $f(x) = e^{3x} \cos x + x - 3$.

2. $y'' - 2y' + 5y = f(x)$; а) $f(x) = e^x \sin 2x$;

б) $f(x) = e^x(2x+1) + e^{2x} \cos x$.

3. $y'' - 2y' - 8y = f(x)$; а) $f(x) = e^{4x}(3x-1)$;

б) $f(x) = e^{4x} \sin 2x + e^x(1-2x)$.

4. $y'' - 12y' + 36y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-6x} \cdot x^2$;

б) $f(x) = e^{6x}(1-x) + e^{6x} \sin 3x$.

5. $2y'' + 7y' + 3y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-3x} \cos x$;

б) $f(x) = \cos 3x + e^{-\frac{x}{2}}(3x^2 + 5)$.

6. $6y'' - y' - y = f(x)$; а) $f(x) = 5e^{\frac{x}{3}}$;

б) $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{x}{3} + x^2 e^{3x}$.

7. $y'' - 8y' + 16y = f(x)$; а) $f(x) = 7e^{4x}$;

б) $f(x) = 2 \cos 4x + e^{4x} \sin x$.

8. $y'' - 9y' + 20y = f(x)$; а) $f(x) = xe^{5x}$;
б) $f(x) = e^{4x} \cos 5x + x^2$.
9. $y'' - 6y' + 10y = f(x)$; а) $f(x) = e^{3x} \sin x$;
б) $f(x) = x^2 e^{3x} + e^x \sin 3x$.
10. $y'' + 5y' = f(x)$; а) $f(x) = x^3 + 8$;
б) $f(x) = e^{-5x} \cos x - 5xe^x$.
11. $y'' + 10y' + 25 = f(x)$; а) $f(x) = \cos 5x$;
б) $f(x) = 10e^{-5x} + 1 - 5x$.
12. $y'' + y = f(x)$; а) $f(x) = e^x \sin x$;
б) $f(x) = \cos x + x^3$.
13. $y'' + 2y' - 24y = f(x)$; а) $f(x) = x^2 e^{4x}$;
б) $f(x) = e^{-6x} \cos x + e^x$.
14. $y'' + 2y' + y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-x} \sin 3x$;
б) $f(x) = 5e^{-x} + \cos x$.
15. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$; а) $f(x) = (x+1)e^{2x}$;
б) $f(x) = e^x \cos 2x + 3x^2$.
16. $y'' + 2y' + 37y = f(x)$; а) $f(x) = e^{-x} \sin 6x$;
б) $f(x) = e^{-x} (6x - 1) + 2x$.
17. $y'' - 14y' + 49 = f(x)$; а) $f(x) = e^x \cos 7x$;
б) $f(x) = (1-x)e^{7x} + 7x^2$.
18. $y'' + 2y' - 3y = f(x)$; а) $f(x) = (x+3)e^{-3x}$;
б) $f(x) = e^x \cos x + e^{3x}$.
19. $y'' + 6y' + 10y = f(x)$; а) $f(x) = x^3 e^x$;
б) $f(x) = e^x \cos 3x + e^{-3x} \sin x$.
20. $y'' - 10y + 25 = f(x)$; а) $f(x) = 3e^{5x}$;
б) $f(x) = 7 \cos 5x + e^{5x} \sin x$.

a) $f(x) = e^{-3x} \cos 2x$;

a) $f(x) = e^{-3x} \sin 2x$;

a) $f(x) = 5e^{-2x}$;

a) $f(x) = e^{-x} \cos 2x$;

a) $f(x) = e^{2x} \sin 6x$;

a) $f(x) = e^{-3x} \cos 3x$;

a) $f(x) = e^{2x} \sin 6x$;

a) $f(x) = e^{3x} \cos 2x$;

a) $f(x) = 5e^{-4x}$;

a) $f(x) = e^{3x} \sin 5x$;

6) $f(x) = e^{5x} \sin 3x + 5xe^{3x}$.

ЗАВДАННЯ 9.

Для функції $z = f(x, y)$:

а) знайти частинні похідні I-го порядку;

б) знайти градієнт у точці M_0 та у загальному вигляді.

$$1. z = \ln\left(y^2 - e^{-x}\right), M_0(2,0). \quad 2. z = \arcsin \sqrt{xy}, M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$3. z = \arctg(x^2 + y^2), M_0(0,1). \quad 4. z = \cos(x^3 - 2xy), M_0(3,-1).$$

$$5. z = \sin \sqrt{\frac{y}{x^3}}, M_0(1,1). \quad 6. z = tg(x^3 + y^2), M_0(-1,2).$$

$$7. z = ctg \sqrt{xy^3}, M_0(2,1). \quad 8. z = e^{-x^2+y^2}, M_0(2,1).$$

$$9. z = \ln(3x^2 - y^4), M_0(1,1). \quad 10. z = \arccos\left(\frac{y}{x}\right), M_0(4,2).$$

$$11. z = \arcc tg(xy^2), M_0(1,2). \quad 12. z = \cos \sqrt{x^2 + y^2}, M_0(-2,2).$$

$$13. z = \sin \sqrt{x - y^3}, M_0(2,1). \quad 14. z = tg(x^3 y^4), M_0(3,-1).$$

$$15. z = ctg(3x - 2y), M_0(1,3). \quad 16. z = e^{2x^2 - y^5}, M_0(1,-2).$$

$$17. z = \ln(\sqrt{xy} - 1), M_0(1,4). \quad 18. z = \arcsin(2x^3 y), M_0\left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

$$19. z = \arctg\left(\frac{x^2}{y^3}\right), M_0(2,3). \quad 20. z = \cos(x - \sqrt{xy^3}), M_0(1,2).$$

$$21. z = \sin \frac{x+y}{x-y}, M_0(3,2). \quad 22. z = tg \frac{2x - y^2}{x}, M_0(3,2).$$

$$23. z = ctg \sqrt{\frac{x}{x-y}}, M_0(4,2). \quad 24. z = e^{-\sqrt{x^2 - y^2}}, M_0(1,-1).$$

$$25. z = \ln(3x^2 - y^2), M_0(2,1). \quad 26. z = \arccos(x - y^2), M_0\left(1, \frac{1}{2}\right).$$

$$27. z = \operatorname{arccctg} \frac{x^2}{y}, M_o(1,3).$$

$$28. z = \cos \frac{x-y}{x^2+y^2}, M_o(1,2).$$

$$29. z = \sin \sqrt{\frac{y}{x+y}}, M_o(4,2).$$

$$30. z = e^{-(x^3+y^3)}, M_o(-2,3).$$

ЗАВДАННЯ 10.

Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох видів ресурсів x та y і виражається функцією $z = z(x, y)$. Визначити витрати ресурсів x та y , що забезпечують максимальний прибуток підприємства та знайти його.

$$1. z(x, y) = -800 - x^2 - y^2 + 40x + 60y.$$

$$2. z(x, y) = 250 - x^2 - y^2 + 20x + 100y.$$

$$3. z(x, y) = -1800 - x^2 - y^2 + 80x + 60y.$$

$$4. z(x, y) = -2100 - x^2 - y^2 + 40x + 100y.$$

$$5. z(x, y) = -2100 - x^2 - y^2 + 60x + 80y.$$

$$6. z(x, y) = -1700 - x^2 - y^2 + 40x + 80y.$$

$$7. z(x, y) = -1500 - x^2 - y^2 + 20x + 80y.$$

$$8. z(x, y) = -400 - x^2 - y^2 + 40x + 20y.$$

$$9. z(x, y) = -2000 - x^2 - y^2 + 100x + 40y.$$

$$10. z(x, y) = -3800 - x^2 - y^2 + 120x + 60y.$$

$$11. z(x, y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 20x + 60y - 600.$$

$$12. z(x, y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 100x - 800.$$

$$13. z(x, y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 100y - 1200.$$

$$14. z(x, y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 100x + 100y - 3100.$$

$$15. z(x, y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 80x + 140y - 4200.$$

$$16. z(x, y) = -2x^2 - 3y^2 + 2xy + 60x + 20y - 600.$$

17. $z(x, y) = -2x^2 - 3y^2 + 2xy + 100y - 800$.
18. $z(x, y) = -2x^2 - 3y^2 + 2xy + 100x - 1200$.
19. $z(x, y) = -2x^2 - 3y^2 + 2xy + 100x + 100y - 3100$.
20. $z(x, y) = -2x^2 - 3y^2 + 2xy + 140x + 80y - 4200$.
21. $z(x, y) = -4x^2 - 2y^2 + 2xy + 40x + 60y - 700$.
22. $z(x, y) = -4x^2 - 2y^2 + 2xy + 140x - 1200$.
23. $z(x, y) = -4x^2 - 2y^2 + 2xy + 20x + 100y - 1300$.
24. $z(x, y) = -4x^2 - 2y^2 + 2xy + 160x + 100y - 4000$.
25. $z(x, y) = -4x^2 - 2y^2 + 2xy + 140x + 140y - 5100$.
26. $z(x, y) = -4x^2 - 2y^2 + 2xy + 200x + 20y - 2800$.
27. $z(x, y) = -2x^2 - 4y^2 + 2xy + 60x + 40y - 700$.
28. $z(x, y) = -2x^2 - 4y^2 + 2xy + 140y - 1200$.
29. $z(x, y) = -2x^2 - 4y^2 + 2xy + 100x + 20y - 1300$.
30. $z(x, y) = -2x^2 - 4y^2 + 2xy + 140x + 140y - 5100$.

ЗАВДАННЯ 11.

Дослідити збіжність ряду.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{2n^2-1}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1} \sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3n-1}{4n+2} \right)^{2n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n-3}{2n^2+3n-1}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{\sqrt{2^n+3}}$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 3^n}{(2n+1)^n}$.

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - n}{2n^3 + 3n + 4}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)! \cdot 4^n}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1} \right)^n (n+1)^3.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n \frac{n}{5^n}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot 2n!}{(2n)!}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{2n+1}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n-1} \right)^n (n-1)^2.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{3n^2 - 6n - 1}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1} \right)^{n^2}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{n^2}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (n^2 - 1)}{n!}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2 + 1)}}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{n^3}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3} \right)^{n^2}.$$

ЗАВДАННЯ 12.

Знайти область збіжності функціонального ряду.

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3 (x+3)^{2n}}{2n+3}.$$

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{5^n (x+4)^n}.$$

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2 (x+2)^n}.$$

7.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 (x+5)^{2n+1}}{(n+1)!}.$$

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}.$$

11.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}.$$

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}.$$

15.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}.$$

17.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{3^n (x+3)^n}.$$

19.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n9^n (x-1)^{2n}}.$$

21.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n}.$$

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x-3)^n}{(n^4 + 1)^2}.$$

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+1)^{2n}}{n}.$$

6.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}.$$

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} (x-2)^n.$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2 - 5n)4^n}.$$

12.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}.$$

14.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+1)5^n}.$$

16.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{(2n+9)^5 (x+2)^{2n}}.$$

18.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}.$$

20.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (x+5)^n \operatorname{tg} \frac{1}{3^n}.$$

22.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n (2n-1)}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{3^n (x-2)^n}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(x-1)^n}{(n+3)^2 2^n}.$$

$$27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 3^n}{(2n+1)^n}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{(x+1)^n}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1)(x-1)^n}{(n+1)^2 5^n}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{8^n (x+1)^{2n}}.$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яку функцію називають первісною для даної функції ?
2. Що називають невизначеним інтегралом даної функції ?
3. Які основні властивості невизначеного інтеграла?
4. Які існують основні методи інтегрування ?
5. У чому полягає суть методу інтегрування частинами ?
6. Яке означення визначеного інтеграла функції $f(x)$ на проміжку $x \in [a, b]$?
7. У чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла?
8. Які основні властивості визначеного інтеграла?
9. Як записується формула Ньютона – Лейбніца ?
10. Як здійснюється заміна змінної у визначеному інтегралі ?
11. Як знайти площі плоских фігур, використовуючи визначений інтеграл ?
12. Як обчислити середні значення функцій ?
13. Яке рівняння називають диференціальним ?
14. Що таке порядок диференціального рівняння ?
15. Як формулюється означення загального розв'язку, частинного розв'язку, загального інтегралу диференціального рівняння ?
16. У чому полягає задача Коші для диференціального рівняння першого порядку ?
17. Яке диференціального рівняння називають рівнянням з відокремлюваними змінними ?
18. Яке диференціального рівняння першого порядку називають однорідним ? Як воно розв'язується ?
19. Яке диференціального рівняння першого порядку називають лінійним ? Як воно розв'язується ?
20. Як записується загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами в різних випадках ?
21. Як формулюється теорема про структуру розв'язків лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку ?
22. Що називають функцією двох змінних ?
23. Що таке частинні й повний прирости функції двох змінних ?
24. Яке означення частинних похідних двох змінних ?
25. Як обчислюються частинні похідні другого порядку ?

26. Що називають повним диференціалом функції двох змінних ?
27. Як обчислюється похідна функції, заданої неявно ?
28. Що називають градієнтом функції ? Що він характеризує ?
29. Що таке точки локального екстремуму функції двох змінних ?
30. Як формулюються необхідні умови локального екстремуму функції двох змінних ?
31. Як формулюються достатні умови локального екстремуму функції двох змінних ?
32. Що називають числовим рядом ?
33. Що називається сумою числового ряду ?
34. Який числовий ряд називається збіжним ?
35. Яка необхідна ознака збіжності числового ряду ?
36. У чому полягає гранична ознака порівняння ?
37. У чому полягає ознака Даламбера збіжності ряду ?
38. У чому полягає ознака Коші збіжності ряду ?
39. Який числовий ряд називається знакозмінним й знакопереміжним ?
40. У чому полягає ознака Лейбніца збіжності знакопереміжного ряду ?
41. Який знакозмінний ряд називають абсолютно збіжним, умовно збіжним ?
42. Що називають функціональним рядом ?
43. Що називається областю збіжності функціонального ряду ?
44. За допомогою яких ознак можна знайти область збіжності функціонального ряду ?
45. Що називають степеневим рядом ?
46. Що називають радіусом збіжності степеневого ряду ?
47. Як обчислюється радіус збіжності степеневого ряду ?
48. Який ряд називається рядом Тейлора для функції $f(x)$?
49. Який ряд називається рядом Маклорена для функції $f(x)$?
50. Як розвиваються елементарні функції в ряд Маклорена?

ЛІТЕРАТУРА

1. Барковський В. В. Вища математика для економістів: навчальний посібник / В. В. Барковський, Н. В. Барковська.- 5-те вид. – Київ : Центр навч. літератури, 2010. – 448 с.
2. Васильченко І. П. Вища математика для економістів: основні розділи: підручник для студ. вищ. навч. закл.: затв. МОНУ / І. П. Васильченко.- 2-ге вид. – Київ : Кондор, 2012. – 608 с.
3. Васильченко І. П. Вища математика для економістів: спеціальні розділи: підручник для студ. вищ. навч. закл.: затв. МОНУ / І. П. Васильченко.- 2-ге вид. – Київ : Кондор, 2012. – 352 с.
4. Грисенко М.В. Математика для економістів. Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посіб.для студ. екон. спец. вищ. навч. закл. /М.В. Грисенко. — К.: Либідь,2007. — 720 с.
5. Мастиновский, Ю.В. Короткий курс математики для економістів [Текст] : конспект лекцій / Ю.В. Мастиновский, Д.І. Анпілогов, Т.І. Левицька. — Запоріжжя: Акцент Інвест-Трейд, 2014. — 228 с.