УДК 539.371
Анпілогов Д.І.[1], Мастиновський Ю.В.[2]
[1] доц. НУ «Запорізька політехніка»
[2] проф. НУ «Запорізька політехніка»

РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ХВИЛЬ У В'ЯЗКО-ПРУЖНОМУ СТЕРЖНІ

Інтерес до питань в'язко-пружної поведінки тіл пов'язаний з широким застосуванням пластиків, полімерів і резиноподібних матеріалів у техніці і при будівництві різних споруд. Багато конструкційних матеріалів, включаючи метали і їх сплави, можуть вважатись пружними за умови, що діючі на них навантаження не перевищують певної критичної величини. Під впливом сил більшої інтенсивності (наприклад, якщо зовнішнє навантаження викликано вибуховою ударною хвилею) матеріали виявляють помітні в'язкі властивості [1, 2]. В цих випадках для отримання достовірних даних про поведінку конструкцій необхідно враховувати вказані ефекти. Обмежимось розгляданням одновимірних систем з використанням модифікованого закону Гука, який враховує в'язкі властивості на основі моделі Максвела [1, 2]. Згідно до цієї моделі деформація

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 , \qquad (1)$$

де ε_1 і ε_2 – відповідно пружна і в'язка складові деформації, причому $\varepsilon_1 = \dfrac{\sigma}{E}$, $\dfrac{d\sigma}{dt} = E\dfrac{d\varepsilon_1}{dt}$, $\sigma = \kappa\dfrac{d\varepsilon_2}{dt}$, σ – напруга, E – модуль пружності, t – час, κ – коефіцієнт згасання (має розмірність коефіцієнта в'язкості в теорії в'язкої рідини), дивись рис. 1.

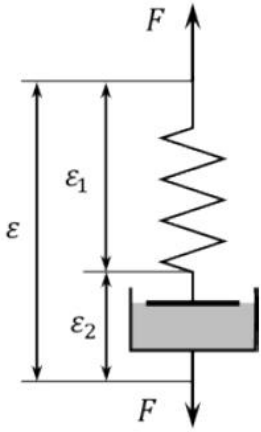

Рисунок 1 – До моделі Максвела.

Тоді

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\kappa}. \qquad (2)$$

Підставляючи відповідні залежності (2) між напругою і деформаціями до рівняння поздовжнього руху стержня

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma}{\partial x}, \qquad (3)$$

отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial t}\right). \tag{4}$$

Нехай рух стержня починається зі стану спокою. Тоді з останнього виразу отримуємо хвильове рівняння, яке визначає переміщення в стержні Максвелла

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{5}$$

де $c^2=\frac{E}{\rho}$, $\gamma=\beta c^2$, $\beta=\frac{\kappa}{E}$.

Величина β є часом релаксації. Таке саме рівняння, як і (5), можна отримати для напруги σ у в'язко-пружному стержні, якщо рівняння (2) продиференціювати за часом, рівняння (3) – за координатою x, а далі з отриманих виразів виключити деформацію.

Для напівнескінченного стержня (5) з умовами

$$\begin{cases} u=0,\dfrac{\partial u}{\partial t}=0, & t=0, 0\le x<\infty; \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=V_0, \sigma=-\rho c V_0, & t>0, x=0 \end{cases}, \tag{6}$$

розв'язок отримано за допомогою перетворення Лапласа [1, 2].

В безрозмірному вигляді рівняння (5) з умовами (6) має вигляд

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}=\frac{\partial U}{\partial \tau}, \tag{7}$$

$$\begin{cases} U=0,\dfrac{\partial U}{\partial \tau}=0, & \tau=0, 0\le \xi<\infty; \\ \dfrac{\partial U}{\partial \tau}=V, \tilde{\sigma}=V, & \tau>0, \xi=0. \end{cases}, \tag{8}$$

Зв'язок безрозмірних і розмірних величин здійснюється за формулами: $V=\frac{V_0}{c}$ – стала імпульсна швидкість, $\xi=\frac{x}{\beta c}$, $U=\frac{u}{\beta c}$, $\tau=\frac{t}{\beta}$, $\tilde{\sigma}=\frac{\sigma}{E}$.

Розв'язок задачі (7)-(8) за допомогою перетворення Лапласа визначається наступним виразом для напруги

$$\tilde{\sigma}(\xi,\tau) = -V \cdot Y_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau^2-\xi^2}\right) \cdot H(\tau-\xi)e^{-\tau/2}, \qquad (9)$$

де Y_0 – функція Бесселя нульового порядку першого роду уявного аргументу, $Y_0(y) = J_0(iy)$;

$H(\tau)$ – функція Хевісайда, $H(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0; \\ 1, & \tau > 0. \end{cases}$

В даній роботі задача (7)-(8) розв'язується чисельно з використанням методу характеристик [2, 3]. Рівняння характеристик і диференціальні умови на них мають вигляд

$$\frac{d\tau}{d\xi} = \pm 1, \quad d\left(\frac{\partial U}{\partial \tau}\right) \mp d\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) \pm \frac{\partial U}{\partial \tau} d\xi = 0. \qquad (10)$$

Отримані залежності напруги від координати для різних моментів часу добре узгоджуються з даними, отримуваними за формулою (9). Високу ефективність застосування використаної тут методики чисельного розв'язку слід очікувати при розв'язуванні задач дослідження перехідних процесів у складених стержневих конструкціях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Сагомонян, А.Я. Волны напряжения в сплошных средах / А.Я. Сагомонян. – учеб. пособие. – М. : изд-во Моск. ун-та, 1985. – 416 с.

2. Гольдсмит, В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / В. Гольдсмит. – М. : изд-во лит. по строит., 1965. – 448 с.

3. Чоу, Мортимер Решение одномерных задач о распространении упругих волн методом характеристик / Мортимер Чоу// Прикладная механика. Труды американского общества инженеров-механиков (русский перевод). – 1967. – №3. – С. 308-315.