

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЗАПОРІЗЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Кваліфікаційна наукова
робота на правах рукопису

ДЕГТЯРЕНКО ПАВЛО ГЛІБОВИЧ

УДК 539.3

**НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТА ЧИСЕЛЬНЕ
МОДЕЛЮВАННЯ СИЛОВИХ КОНСТРУКЦІЙ АЕРОКОСМІЧНОГО
МАШИНОБУДУВАННЯ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла
05 – технічні науки

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ П.Г. Дегтяренко

Науковий керівник
Грищак Віктор Захарович
доктор технічних наук, професор,
Заслужений діяч науки і техніки України

Запоріжжя – 2021

АНОТАЦІЯ

Дегтяренко П. Г. Напружено-деформований стан та чисельне моделювання силових конструкцій аерокосмічного машинобудування. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла (05 – технічні науки). – Запорізький національний університет Міністерства освіти і науки України, Запоріжжя, 2021.

Спеціалізована вчена рада Д 17.052.01 при Національному університеті «Запорізька політехніка» Міністерства освіти і науки України.

Дисертаційна робота присвячена розробці аналітико-чисельних методів до аналізу напружено-деформованого стану та стійкості підкріплених оболонкових конструкцій ракетно-космічної техніки складної конфігурації при статичному комбінованому навантаженні з урахуванням особливостей геометричної форми та характеру деформування матеріалу.

У першому розділі надано аналітичний огляд сучасного стану досліджуваної проблеми і публікацій, основна увага яких зосереджена безпосередньо до задач, які вирішуються у даній роботі, зокрема методам та результатам дослідження напружено-деформованого стану і стійкості силових оболонкових конструкцій аерокосмічного машинобудування, зокрема основна увага аналізу зосереджена безпосередньо до задач, які вирішуються у даній роботі, зокрема методам та результатам дослідження напружено-деформованого стану і стійкості силових оболонкових конструкцій аерокосмічного машинобудування, сучасним підходам і методам розрахунку на стійкість до локальних і загальних форм випинання неоднорідних оболонкових систем при простому і комбінованому навантаженні. З аналізу публікацій зроблено висновок, що розробка чисельних і аналітико-чисельних методів та алгоритмів віртуального

дослідження напружено-деформованого стану і стійкості підкріплених оболонкових конструкцій складної конфігурації при статичному комбінованому навантаженні є самостійною проблемою з точки зору розвитку механіки деформованого твердого тіла та застосування ефективних методів і алгоритмів розрахунку, а також визначення руйнівних навантажень в сучасних конструкціях аерокосмічного машинобудування.

У другому розділі роботи запропоновано метод дослідження напружено-деформованого стану корпусу двигуна ракети-носія з урахуванням пружно-пластичного деформування матеріалу та програмну реалізацію для проведення віртуальних руйнівних випробувань оболонкових систем РКТ, яка відображає геометрію досліджуваного типу конструкцій, сформульована відповідна крайова задача для визначення НДС оболонки, запропоновано метод її розв'язання та програмні засоби розрахунків руйнуючих навантажень з обґрунтуванням достовірності отриманих результатів.

Третій розділ присвячено розробці математичної моделі і аналітико-чисельного підходу до розрахунку напружено-деформованого стану та руйнівного навантаження паливних баків ракети-носія при наявності тріщини у найбільш напруженій ділянці конструкції. В основу моделі покладено поєднання методу скінченних елементів з теорією механіки руйнування. Для оцінки НДС в області тріщини знаходяться коефіцієнти інтенсивності напружень, які визначаються з розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь.

У четвертому розділі отримав розвиток і застосування метод початкових параметрів у матричній формі стосовно стійкості дискретно підкріплених проміжними шпангоутами оболонкових конструкцій типу «циліндр-конус» при комбінованому статичному навантаженні. Особлива увага приділена дослідженню впливу жорсткості шпангоутів з площини початкової кривизни на локальні і загальні форми випинання складеної оболонкової конструкції з метою раціонального її проектування.

П'ятий розділ роботи присвячено формулюванню математичної постановки, одержанню основних диференціальних рівнянь і чисельного розв'язку із застосуванням методу скінченних різниць задачі стійкості перспективної з точки зору сприйняття зовнішнього тиску і осьових зусиль, здатних викликати втрату стійкості первісної форми, оболонкової конструкції типу «бочка-оживало». Досліджено вплив відносного підйому меридіану відсіків на стійкість складеної оболонкової системи при комбінованому зовнішньому навантаженні, а також запропоновано алгоритм визначення раціональних параметрів геометрії та жорсткості досліджуваної системи з точки зору забезпечення рівної стійкості до локальних і загальних форм випинання.

Достовірність отриманих результатів забезпечується коректністю математичних постановок розглянутих задач, зіставленням із відомими розв'язками, достатнім узгодженням здобутих залежностей із фізичними представленнями досліджуваних явищ.

Основним результатом роботи є розробка нових математичних моделей і удосконалення аналітико - чисельних методів дослідження несучої здатності силових конструкцій аерокосмічного машинобудування:

- вперше запропоновані математична модель і методика чисельного дослідження напружено-деформованого стану та міцності силової оболонкової конструкції, зокрема двигуна ракети-носія, в процесі навантаження зростаючим внутрішнім тиском з урахуванням процесів пружно-пластичного деформування;

- запропонована методика для дослідження інтенсивності напружень у підкріпленому паливному баку ракетносія при наявності тріщини у місці знаходження максимального напруження;

- з використанням методу початкових параметрів у матричній формі із застосуванням асимптотичних методів вперше запропоновано підхід до розв'язання задач стійкості оболонкових конструкцій складної

геометричного конфігурації з урахуванням дискретного розташування проміжних шпангоутів;

– досліджено процес деформування і проведено чисельний аналіз критичних зусиль шпангоутних оболонок типу «циліндр-конус» і «бочка-оживало» з урахуванням жорсткості проміжних шпангоутів з площини початкової кривизни;

– вперше доведена ефективність конструкції «бочка-оживало» по відношенню до сприйняття комбінованого зовнішнього навантаження з точки зору стійкості первісної форми;

– запропоновано підхід до визначення раціональної жорсткості проміжних шпангоутів, які забезпечують однакову стійкість відсіків оболонкової конструкції по відношенню до локальних і загальних форм випинання.

Результати дослідження використані у практиці Державного підприємства «Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля».

Ключові слова: математична модель, пружно-пластичне деформування, оболонка обертання, руйнівне навантаження, магістральна тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень, чисельні методи, метод початкових параметрів у матричній формі, гібридні асимптотичні методи, локальні й загальні форми випинання, раціональні характеристики жорсткості.

ABSTRACT

Degtiarenko P.G. Stress-strain state and numerical modelling forced structures of aerospace machine building. – Manuscript.

Thesis for the degree of a candidate of technical sciences in specialty 01.02.04 – mechanics of a deformable solid (05 – technical sciences). – National University “Zaporizhzhya Polytechnique”, Zaporizhzhya, 2021.

The dissertation is devoted to the development of analytical and numerical methods for the analysis of stress-strain state and stability of reinforced shell structures of rocket and space technology of complex configuration under static combined load taking into account the geometric shape and nature of material deformation.

The analytical review of the modern state of the investigated problem and publications, basic attention of that is concentrated directly to the tasks that decide in this work, is given **in the first chapter**, in particular to the methods and results of research of the stress-strain state and buckling of constructions for aerospace engineer, modern approach and method calculation on critical values for local and overall buckling forms under combined loading. Out of analysis of publications a conclusion is made, that development of numeral and analytic-numerical methods and algorithms of virtual research of the tensely-deformed state of the reinforced structures of the complicated configuration at the static combined loading is an actual problem from the point of view of development of mechanics of the deformable solid and application of effective methods and algorithms of calculation, and also determination of the destructive loading in the modern constructions of aerospace engineer.

In the second chapter of work the method of research of the tensely-deformed state of corps of engine of rocket-transmitter taking into account plastic deformation of material and programmatic realization offer for realization of virtual destructive tests of the shell systems of PKT, that represents geometry of

the investigated type of constructions, a corresponding boundary task is set for determination of stress-strain of shell, the solution method and programmatic facilities of calculations of the destroying loading offer with ground authenticity got result.

The third chapter is sanctified to development of mathematical model and analytic-numerical going near the calculation of the tensely-deformed state and destructive loading of fuel tanks of rocket-transmitter at presence of crack in the most tense area of construction. In basis of model combination of method of finite elements is fixed with the theory of mechanics of destruction. For the estimation of stress-strain state in area of crack there are coefficients intensities of tensions, that is determined from the decision of the system of singular integral equations.

In a fourth chapter the method of initial parameters got development and application of initial parameters method in a matrix form in relation to discretely supported by intermediate rings of complex constructions as a “cylinder-cone” at the combined static loading. The special attention is paid to research of influence of inflexibility of rings from the plane of initial curvature on the local and general buckling forms of construction with the aim of it rational design.

The fifth chapter of work is devoted to formulation of the mathematical model, receipt of basic differential equations and numeral solution with application of finite difference method for the buckling problem, of perspective from the point of view stability under external pressure and axial loads, as “barrel-revived” shell structure. Influence of the relative getting up is investigational to the meridian of compartments on firmness of the made thecal system at the combined external loading, and also the algorithm of determination of rational parameters of geometry and inflexibility of the investigated system offers from the point of view of providing of even firmness to the local and general forms of thrusting out.

Authenticity of the got results is provided by correctness of the mathematical raising of the considered tasks, by comparison with well-known

results, by the sufficient concordance of the obtained dependences with the physical views of the investigated phenomena.

Basic research results of there are development of new mathematical models and improvement of analytic-numerical methods of research of bearing strength of power constructions of aerospace engineering:

- a mathematical model and methodology of numeral research of the tensely-deformed state and durability of power thecal construction offer first, in particular engine of rocket-transmitter, in the process of loading growing intrinsic pressure taking into account the processes of resiliently-plastic deformation;
- offer methodology for research of tensions in the supported fuel tank of launch vehicle at presence of crack in the place of being of maximal tension;
- with the use of method of initial parameters in a matrix form with application of asymptotic methods first offered approach to the decision of tasks of firmness of thecal constructions of difficult geometrical to configuration taking into account the discrete location of intermediate rings;
- the process of deformation is investigational and conducted numerical analysis of critical efforts of shells of rings as a “cylinder-cone” and “barrel-revived” taking into account inflexibility of intermediate rings from the plane of initial curvature;
- the first well-proven efficiency of construction of “barrel-revived” is in relation to perception of the combined external loading from the point of view of stability with respect to initial form;
- offered approach to determination of rational inflexibility of intermediate rings that provide identical firmness of compartments of thecal construction in relation to the local and general forms of thrusting out. Research results drawn on in practice of the State enterprise the “Designer bureau is “South” the name of M. K. Yangel”.

Key words: mathematical model, elastic-plastic deformation, shell of revolution, breaking load, main crack, stress intensity factor, numerical methods, method of initial parameters in matrix form, hybrid asymptotic methods, local and general buckling forms, rational characteristics of stiffness.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати:

1. Шевченко Ю. М., Андрушко Н. Ф., Бабешко М. О., Баняс М. В., Галішин О. З., Дегтяренко П. Г., Савченко В. Г., Тонконоженко А. М., Тормахов М. М. Розробка математичних моделей і комп'ютерних технологій для проведення віртуальних руйнівних випробувань оболонкових конструкцій. *Наука та інновації*. 2013. Т. 9, № 6. С. 23-30.
2. Аврамов К. В., Морачковский О. К., Тонконоженко А. М., Кожарин В. Ю., Дегтяренко П. Г. Численный анализ разрушающих нагрузок орбренных баков ракетносителей. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2014. № 5 (112). С. 40–46.
3. Дегтяренко П. Г., Грищак В. З., Дьяченко Н. Н. К расчету на устойчивость комбинированной оболочечной конструкции с учетом дискретности расположения промежуточных шпангоутов. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2019. Т. 29. С. 113–131.
4. Дегтяренко П. Г., Грищак В. З., Грищак Д. Д., Дьяченко Н. Н. Постановка и основные разрешающие уравнения задачи устойчивости оболочечной конструкции типа «бочка-оживало» при действии внешнего давления. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2019. Т. 30. С. 33–52.
5. Дегтяренко П. Г., Грищак В. З., Грищак Д. Д., Дьяченко Н. Н. К проблеме равноустойчивости подкрепленной оболочечной конструкции при комбинированном нагружении. *Космічна наука і технологія*. 2019. Т. 25, № 6. С. 4–14.
6. Gristchak V., Hryshchak D., Dyachenko N., Degtiarenko P. Stability and rational design of the «barrel-ogive» type strengthened shell structures under combined loading. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. 4/7(106). P. 6–15.

Праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

7. Дегтяренко П. Г., Грищак В. З., Грищак Д. Д., Д'яченко Н. Н. Рівностійкість до локальних і загальних форм випинання шпангоутних оболонкових систем ракетноносіїв при комбінованому зовнішньому навантаженні. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій*: тези доповідей другої міжнародної наук.-техн. конф. Пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського (до сторіччя від дня народження). (Дніпро, 10–12 жовтня 2019). Дніпро, 2019. С. 311.

8. Gristchak V. Z., Gomenniuk S. I., Grebeniuk S. N., Larionov I. F., Degtiarenko P. G., Sirenko V. N., Akimov D. V. An Investigation of a Spacecraft's Propellant Tank's Shell's Bearing Strength. *Aviation in the XXI-st Century. Safety in Aviation and Space Technologies: Proceedings the sixth world congress* (Kyiv, September 23-25, 2014). Kyiv, 2014. Vol. 1. P. 1.14.49–1.1451.

ЗМІСТ

| | |
|--|----|
| Вступ..... | 14 |
| Розділ 1 Аналітичний огляд сучасного стану проблеми несучої здатності силових елементів конструкцій аерокосмічного машинобудування..... | 20 |
| 1.1 Методи та програмне забезпечення дослідження напружено-деформованого стану силових оболонкових конструкцій аерокосмічної техніки..... | 21 |
| 1.2 Сучасні підходи і методи розрахунку на стійкість до локальних і загальних форм випинання неоднорідних оболонкових систем при простому і комбінованому навантаженні..... | 24 |
| 1.3 Висновки | 30 |
| Розділ 2 Математична модель та програмна реалізація чисельного аналізу напружено-деформованого стану корпусу двигуна ракети-носія при навантаженні зростаючим внутрішнім тиском до руйнування..... | 32 |
| 2.1 Постановка задачі. Основні співвідношення для розрахунку НДС оболонки з меридіаном змінної геометрії | 33 |
| 2.2 Алгоритм та методика розрахунку..... | 37 |
| 2.3 Тестовий приклад розрахунку руйнівного навантаження | 39 |
| 2.4 Обґрунтування достовірності результатів..... | 45 |
| 2.5 Висновки | 45 |
| Розділ 3 Скінченно-елементний підхід до розрахунку НДС та руйнівного навантаження паливних баків ракети-носія при наявності тріщини у найбільш напруженій ділянці конструкції | 47 |
| 3.1 Метод розрахунку руйнівних навантажень ребристих баків ракети-носія із тріщиною у найбільш напруженій зоні | 48 |
| 3.2 Чисельний підхід до аналізу руйнування | 49 |
| 3.3 Чисельний аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень | 56 |
| 3.4 Висновок | 58 |

| | |
|--|-----|
| Розділ 4 Розвиток і застосування методу початкових параметрів у матричній формі стосовно стійкості дискретно підкріплених проміжними шпангоутами оболонкових конструкцій типу «циліндр-конус» при комбінованому статичному навантаженні..... | 59 |
| 4.1 Постановка задачі стійкості складеної оболонкової конструкції із стінками постійної товщини типу «циліндр-конус» | 59 |
| 4.2 Матриця перетворення напружено-деформованого стану підкріпленого шпангоутами кінцевого відсіку із стінками постійної товщини..... | 62 |
| 4.3 Характеристичне рівняння для визначення критичних навантажень оболонкової конструкції зі стінками постійної товщини | 66 |
| 4.4 Результати чисельної реалізації методики розрахунку стійкості складеної оболонкової конструкції типу «циліндр-конус» | 69 |
| 4.5 Задача стійкості складеної підкріпленої оболонкової конструкції типу «циліндр-конус» з кінчними відсіками лінійно-змінної товщини..... | 71 |
| 4.6 Висновки | 82 |
| Розділ 5 Основні диференціальні рівняння і чисельний розв’язок задачі стійкості підкріплених оболонкових конструкцій типу «бочка-оживало»..... | 83 |
| 5.1 Постановка задачі стійкості складеної оболонкової конструкції. Застосовані гіпотези..... | 83 |
| 5.2 Основні розв’язувальні рівняння стійкості складеної оболонки: випадок всебічного нормального зовнішнього тиску | 92 |
| 5.3 Основні розв’язувальні рівняння стійкості складеної оболонки: випадок комбінованого навантаження всебічним нормальним зовнішнім тиском і осьовим стискаючим зусиллям..... | 98 |
| 5.4 Метод розв’язання основних рівнянь стійкості оболонки типу «бочка-оживало» | 101 |
| 5.5 Формулювання граничних умов..... | 102 |
| 5.6 Умови спряження відсіків конструкції через шпангоут | 103 |

| | |
|---|-----|
| 5.7 Модифікація системи різницевих рівнянь при сполученні «оживальної» і «бочкоподібної» секцій | 104 |
| 5.8 Приклад застосування запропонованого підходу. Аналіз і достовірність чисельних результатів | 106 |
| 5.9 Висновки | 114 |
| Висновки | 116 |
| Список використаних джерел | 118 |
| Додаток А Фрагмент програми Maple для отримання розв'язувального рівняння для дослідження на стійкість циліндричної оболонки..... | 130 |
| Додаток Б Матричний метод для перетворення напружено-деформованого стану при переході через шпангоут..... | 135 |
| Додаток В Фрагмент програми Maple для отримання розв'язувального рівняння для дослідження на стійкість «бочкоподібної» і «оживальної» оболонок..... | 141 |
| Додаток Г | 159 |
| Додаток Д Список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації..... | 162 |

ВСТУП

Актуальність роботи. Скорочення термінів освоєння нових виробів ракетно-космічної галузі, зниження собівартості їх виготовлення і металоємності, підвищення конкурентоспроможності продукції вітчизняного машинобудування надають потужний стимулюючий вплив на розробку науково-обґрунтованих методів розрахунку нової техніки і технологій, аналітичних і комп'ютерних проектних методик. Розробка шляхів і способів створення надійних силових конструкцій включає значне коло теоретичних і експериментальних досліджень, відповідного програмного забезпечення. До них, в першу чергу, відносяться розробка адекватних математичних моделей і методів розрахунку напружено-деформованого стану, локальної і загальної стійкості оболонкових конструкцій при зовнішньому навантаженні.

В значній мірі вирішення цих завдань сприяє впровадженню в промисловість прогресивних аналітичних і чисельних підходів з метою досягнення високої якості одержуваних виробів.

Необхідно зазначити, що тонкостінні оболонки обертання складної геометричної конфігурації широко використовуються як силові елементи конструкцій в будівництві, хімічній промисловості, аерокосмічному машинобудуванні, в інших галузях техніки і народного господарства. Суттєвими завданнями створення конкурентоздатних виробів аерокосмічної техніки (АКТ) у зв'язку з новими викликами розвитку даної галузі і вирішуваних проблем є пошук можливостей зниження матеріалоємності силових конструкцій і вдосконалення методів розрахунку на базі сучасного аналітичного представлення фізичних процесів для подальшого застосування їх у системах автоматизованого проектування із застосуванням, зокрема, методу скінчених елементів (МСЕ). Надійні аналітичні розв'язки актуальних задач несучої здатності оболонкових систем під дією комбінації зовнішніх навантажень, кожне з яких може спричинити втрату стійкості первісної форми,

є особливо важливими на стадії передвипробувального моделювання з метою зниження матеріальних затрат і терміну завершення проектування та виробництва систем нового покоління.

Теоретичні, зокрема аналітичні, і аналітико-чисельні дослідження стійкості конструкцій змінної за координатами геометрії і жорсткості, пов'язані із значними труднощами аналізу складної системи диференціальних рівнянь сингулярного типу із змінними коефіцієнтами. Застосування прямих чисельних методів дослідження вказаних систем у ряді випадків приводить до нестійкості чисельного процесу, що пов'язане із необхідністю виконання певних умов збіжності. Одним з таких умов для МСЕ є неперервність шуканих функцій, а іноді і їх перших похідних на межі суміжних елементів.

Суттєвою проблемою, що визначається тенденціями розвитку механіки деформівного твердого тіла і практичними викликами галузі, є розробка математичних моделей і комп'ютерних технологій для проведення віртуальних руйнівних випробувань оболонкових конструкцій аерокосмічного машинобудування, зокрема для чисельного аналізу руйнівних навантажень ребристих паливних баків ракетносіїв (РН), у тому числі при наявності тріщини, та інших силових відсіків на базі МСЕ-підходів. Також виникає необхідність дослідження стійкості конструкцій при комбінованому зовнішньому навантаженні, зокрема складних підкріплених шпангоутами оболонкових систем типу «циліндр-конус» і «бочка-оживало» з аналізом механічних ефектів деформування по відношенню до локальних і загальних форм випинання із застосуванням сучасних асимптотичних підходів і чисельних алгоритмів.

На підставі вищезазначеного можна вважати тему дисертаційного дослідження актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Проведені у дисертаційній роботі дослідження виконані в межах «Стратегії космічної діяльності України на період до 2022 року», затвердженої Наказом Державного космічного агентства України № 100 від 21.05.2015 і застосовані при виконанні

науково-дослідної роботи математичного факультету Запорізького національного університету в рамках держбюджетної роботи Міністерства освіти і науки України № 0118U000210 «Математичне та програмне забезпечення автоматизованого проектування аерокосмічної техніки».

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є чисельне моделювання та розробка методів і алгоритмів аналізу напружено-деформованого стану та стійкості підкріплених оболонкових конструкцій складної конфігурації при статичному комбінованому навантаженні.

Основним завданням роботи є створення чисельного МСЕ-підходу до моделювання напружено-деформованого стану і аналітико-чисельного методу дослідження критичних навантажень оболонкових конструкцій аерокосмічної техніки. Реалізація мети дисертаційного дослідження полягає у вирішенні наступних завдань:

- дослідити сучасний стан проблеми розробки методів дослідження напружено-деформованого стану конструкцій РКТ на базі МСЕ-технологій та методів аналізу стійкості підкріплених оболонок складної конфігурації;
- запропонувати математичну модель та її програмну реалізацію для проведення віртуальних руйнівних випробувань оболонкової конструкції корпусу двигуна ракетносія при навантаженні зростаючим внутрішнім тиском;
- розробити метод і провести чисельний аналіз розрахунку інтенсивності руйнівних напружень ребристої оболонки паливного баку РН в умовах виникнення тріщини;
- запропонувати аналітико-чисельний метод дослідження локальної і загальної стійкості підкріплених оболонок типу «циліндр-конус» і «бочка-оживало» з урахуванням дискретності розташування проміжних шпангоутів;
- надати аналіз чисельних даних стосовно граничних кривих, які виокремлюють область стійкості від області нестійкості оболонкової конструкції при комбінованому навантаженні;
- запропонувати алгоритм розрахунку раціональних характеристик жорсткості підкріплюючих шпангоутів, які забезпечують однакову стійкість до

локальних і загальних форм випинання прольотів та відсіків оболонкової конструкції РКТ.

Об'єктом дослідження є процеси деформування, руйнування та стійкість підкріплених оболонкових конструкцій РКТ складної геометричної форми.

Предмет дослідження – напружено-деформований стан та несуча здатність підкріплених оболонкових конструкцій складної геометрії при комбінованому зовнішньому навантаженні з урахуванням особливостей проектування та експлуатації.

Методи дослідження: метод скінченних елементів, метод початкових параметрів у матричній формі, асимптотичний метод фазних інтегралів, ВКБ-Гальоркін метод та метод скінченних різниць.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у такому:

– вперше запропоновані математична модель і методика чисельного дослідження напружено-деформованого стану та міцності силової оболонкової конструкції, зокрема двигуна РН, в процесі навантаження зростаючим внутрішнім тиском з урахуванням процесів пружно-пластичного деформування;

– запропонована нова методика визначення інтенсивності напружень у підкріпленому паливному баку ракетносія при наявності тріщини у місці виникнення максимальних напружень;

– вперше, з використанням методу початкових параметрів у матричній формі із застосуванням асимптотичних методів, запропоновано підхід до розв'язку задач стійкості оболонкових конструкцій складної геометричної конфігурації з урахуванням дискретного розташування проміжних шпангоутів;

– вперше досліджено процес деформування і проведено чисельний аналіз критичних зусиль шпангоутних оболонок типу «циліндр-конус» і «бочка-оживало» з урахуванням жорсткості проміжних шпангоутів з площини початкової кривизни;

– вперше доведена ефективність конструкції «бочка-оживало» по відношенню до сприйняття комбінованого зовнішнього навантаження з точки зору стійкості первісної форми;

– запропоновано новий підхід до визначення раціональної жорсткості проміжних шпангоутів, які забезпечують однакову стійкість відсіків оболонкової конструкції по відношенню до локальних і загальних форм випинання.

Практичне значення отриманих результатів полягає в запропонованих методах та алгоритмах розрахунку напружено-деформованого стану, а також стійкості оболонкових конструкцій аерокосмічного машинобудування на основі аналітико-чисельних підходів і відповідного програмного забезпечення з урахуванням особливостей геометричної форми, жорсткості підкріплюючих елементів і характеру комбінованого зовнішнього навантаження.

Результати дисертаційного дослідження використані у практиці Державного підприємства «Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля».

Особистий внесок здобувача. За результатами дослідження опубліковані наукові праці [2, 29, 30, 31, 32, 72, 92, 96]. Основні положення й результати дисертаційної роботи, які виносяться на захист, отримані здобувачем самостійно. У спільних публікаціях за темою дисертації особистий внесок автора включає постановки задач з аналізу напружено-деформованого стану [31, 72], та обговорення результатів чисельної реалізації за запропонованими методами дослідження [2], застосування методу початкових параметрів у матричній формі і асимптотичних методів до розрахунку стійкості оболонкових конструкцій типу «циліндр-конус» і «бочка-оживало» з урахуванням дискретності розташування проміжних шпангоутів [29, 32]. Постановки задач теоретичного дослідження [30], аналіз результатів чисельної реалізації [92, 96], а також інтерпретація отриманих результатів проводились разом з науковим керівником і співавторами публікацій.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертації доповідались і обговорювались на VII Міжнародній конференції «Space Technologies: Present and Future», (м. Дніпро, 22-24 травня 2019 р.), VII Міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій» (м. Запоріжжя, 24-26 травня 2019 р.), Другій Міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» пам'яті академіка В. І. Моссаковського (м. Дніпро, 10-12 жовтня 2019 р.), науково-практичній конференції «Сучасні розрахунково-експериментальні методи визначення характеристик ракетно-космічної техніки» (м. Дніпро, 10-12 грудня 2019 р.). Дисертація в цілому розглядалася на науково-технічній раді Державного підприємства «КБ «Південне» ім. М.К. Янгеля» (м. Дніпро, 15 березня 2020 року) під керівництвом генерального конструктора академіка НАН України О. В. Дегтярьова, на розширеному засіданні кафедри прикладної математики і механіки за участю учасників наукового семінару «Актуальні проблеми прикладної математики і механіки» Запорізького національного університету під керівництвом д.т.н., професора Грищака В.З., а також на міжкафедральному спеціалізованому семінарі «Механіка деформівного твердого тіла» під керівництвом д.ф.-м.н., професора В. І. Пожуєва при Національному університеті «Запорізька політехніка».

Публікації. За результатами виконаних досліджень опубліковано 8 робіт, в яких відображено основний зміст дисертаційної роботи та етапи її підготовки. З них: 6 робіт [2, 30, 31, 32, 72, 92] – у спеціалізованих виданнях згідно з Постановами МОН України, включаючи 2 роботи [30, 92] – у міжнародних періодичних виданнях, які входять до науково-метричних баз даних Web of Science і Scopus, 2 тези матеріалів міжнародних конференцій [29, 96].

РОЗДІЛ 1

АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ НЕСУЧОЇ ЗДАТНОСТІ СИЛОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ АЕРОКОСМІЧНОГО МАШИНОБУДУВАННЯ

У даному розділі на основі аналізу публікацій та інформаційних джерел надано аналітичний огляд сучасного стану проблем дослідження за темою дисертації, обґрунтовано необхідність їх подальшого вивчення та розв'язання, доведено актуальність теми дисертаційної роботи.

До теперішнього часу зусиллями вітчизняних і зарубіжних вчених кількох поколінь розроблені математичні моделі деформування тонкостінних оболонкових конструкцій аерокосмічної техніки. Особливий розвиток отримали аналітичні і чисельні методи дослідження напружено-деформованого стану та стійкості силових елементів, у яких властивість неоднорідності (багатошарові, гофровані, вафельні, виконані з композиційних матеріалів та комбіновані відсіки) проявляється як результат спрямованого проектування конструкції.

Аналітичний огляд публікацій з проблем напружено-деформованого стану та стійкості оболонкових конструкцій включає таку кількість наукових робіт, що у розмірах розділу не можливо охопити увесь цикл досліджень у цьому напрямку. Тому основна увага аналізу зосереджена безпосередньо до задач, які вирішуються у даній роботі, зокрема методам та результатам дослідження напружено-деформованого стану і стійкості силових оболонкових конструкцій аерокосмічного машинобудування.

1.1 Методи та програмне забезпечення дослідження напружено-деформованого стану силових оболонкових конструкцій аерокосмічної техніки

Суттєвими ланками при проектуванні аерокосмічної техніки є розрахунок напружено-деформованого стану, локальної і загальної стійкості силових конструкцій з визначенням руйнівних навантажень, вибором конструкційних матеріалів для забезпечення надійного функціонування досліджуваних систем за умови раціональної їх матеріалоемності. Для забезпечення вказаних розрахунків оболонкових конструкцій, підкріплених ортогональною системою силового набору, вафельних конструкцій, або виготовлених із композиційних матеріалів, необхідне ефективне з точки зору застосування сучасних комп'ютерних технологій спеціалізоване математичне забезпечення. Зауважемо, що математичне моделювання до експериментального випробування реальних аерокосмічних систем є важливим етапом на шляху проектування у зв'язку з можливістю, в ряді випадків, зниження кількості натурних випробувань за умови забезпечення міцності конструкції. Слід зазначити, що урахування реальних діаграм нелінійного деформування матеріалу, а також впливу температурного навантаження є необхідною складовою при визначенні міцності конструкцій, зокрема виготовлених з високоміцних алюмінієвих сплавів, яка враховується за допомогою сучасних комп'ютерних технологій на базі створення скінченно-елементних моделей. Аналіз програмних комплексів для вирішення задач математичного моделювання в нелінійних проблемах механіки надано у публікаціях [33, 34, 50, 58, 71].

Не зважаючи на те, що до найбільш поширених широко спеціалізованих систем автоматизації інженерних розрахунків (CAE-систем) можна віднести програмні комплекси ANSYS, MSC.Patran, Nastran, Abacus та інші, особливістю їх є унеможливлення втручання у самий процес розрахунку, що буває необхідним для уточнення параметрів деформування конструкції на початкових

стадіях експериментального дослідження з подальшим прогнозуванням руйнівних навантажень та зон максимального напруження.

Як приклад можна зазначити, що для проектування міжступеневого відсіку ракети-носія «Циклон-4» застосовуюся програмний комплекс на базі методу скінченних елементів МЗС.Nastran [33].

Необхідно зазначити, що основні ідеї розвитку методів дослідження напружено-деформованого стану і стійкості оболонкових конструкцій і фундаментальні результати аналізу були закладені у працях, включаючи оглядові статті і монографії, багатьох вітчизняних та закордонних країн, до яких, зокрема, слід віднести наукові праці Авдоніна О. С., Аврамова К. В., Алфутова М. А., Амбарцумяна С. О., Аміро І. Н., Андрєєва Л. В., Андріанова І. В., Артюхіна Ю. П., Бінкевича Є. В., Бреславського Д. В., Василенко А. Т., Васильєва В. В., Вольміра А. С., Воровича І. І., Гудрамовича В. С., Гарт Е. Л., Гавриленка Г. Д., Галімова Н. К., Ганієва Н. С., Горшкова А. Г., Гоменюка С. І., Гребенюка С. М., Григолюка Е. І., Гузя О. М., Григоренка Я. М., Григоренка А. Я., Гудрамовича В. С., Гуляєва В. І., Грищак В. З., Дегтярьова О. В., Дзюби А. П., Заруцького В. О., Жука Я. О., Кабанова В. В., Кармішина О. В., Карпова В. В., Клименка Д. В., Конюхова С. М., Копнова В. О., Красовського В. Л., Кубенка В. Д., Курпи Л. В., Ларіонова І. Ф., Ларина А. А., Лизина В. Т., Маневича Л. І., Маневича А. І., Макєєва Є. М., Мяченкова В. І., Моссаковського В. І., Морачковського О. М., Неміша Ю. Н., Нікітіна П. І., Ободан Н. І., Ольшанського В. П., Пикуля В. В., Пожуєва В. І., Постнова В. О., Погорєлова А. В., Пошивалова В. П., Преображенського І. М., Прусакова А. П., Пяткіна В. А., Рассказова А. О., Рвачова В. Л., Саченкова А. В., Сінюкова С. М., Сіренка В. М., Терегулова А. Г., Тимошенко С. П., Товстіка П. Є., Тонконоженка А. М., Феодосєєва В. І., Хоми І. Ю., Черних К. Ф., Чопорова С. В., Шульги Н. А., Успенського В. Б., Koiter W. T., Morgan E. J., Seide P. A., Steele Ch. R., Geer J. F., Andersen C. M., Weingarten V. I., Tennyson R. S., Teng J. G., Barbagallo M., Zhao Y., Teng J. G. та

багато інших, які запропонували аналітичні та чисельні методи розв'язання задач моделювання напружено-деформованого стану і стійкості оболонкових систем з аналізом фізичних процесів їх деформування.

Створення математичної моделі оболонкового відсіку систем аерокосмічної техніки включає розробку розрахункової схеми, яка адекватно відображає геометрію досліджуваного типу конструкцій, та методiku розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) з визначенням руйнівного навантаження. Зрозуміло, що для розробки методики розрахунку необхідно обрати, або побудувати визначальні рівняння, означити критерії міцності, сформулювати відповідну крайову задачу визначення НДС чи стійкості початкової форми конструкції по відношенню до зовнішнього навантаження, розробити метод їх розв'язання та програмні засоби для проведення розрахунків несучої здатності, а також обґрунтувати достовірність отриманих результатів.

У роботах [19, 36, 48, 74–78] надано опис чисельних методів розв'язання крайових задач для оболонкових систем з урахуванням пластичних властивостей застосованих матеріалів. Програмні засоби для визначення НДС на основі різних теорій пластичності обговорюються у [15, 79–81]. У деяких роботах [19] оцінюється міцність окремих елементів конструкцій. Зауважимо, що оцінка міцності конкретних конструкцій потребує методики розрахунку, що враховують саме фактори, які чинять найістотніший вплив на НДС конструкцій за даних умов роботи: виникнення і розвиток пластичних деформацій, розвантаження конструкції та повторне навантаження, реальні властивості матеріалів та інші. Необхідно відзначити розроблені методики [19, 74–78] та програмні засоби [74, 75, 79, 80] для розв'язування задач пластичності з урахуванням відомих класичних критеріїв міцності.

Як впливає з [13], руйнування космічних апаратів відбувається внаслідок розвитку дефектів, які можуть бути дислокаціями, мікротріщинами, порами та іншими недосконаlostями структури. Ці дефекти не можуть бути виявлені інженерними методами. При експлуатації конструкції ці дефекти

розвиваються в тріщину. Стаття [83] присвячена дослідженню руйнування систем високого тиску в атомній енергетиці з дослідженням на здатність чинити опір наскрізним тріщинам. У роботі [98] представлені теоретичні основи механіки руйнування, які застосовуються в аналізі літальних апаратів. В [99] для дослідження тріщиностійкості аерокосмічної техніки застосовується метод скінченних елементів. Математичні моделі і методи аналізу руйнування деформованих тіл представлені у публікаціях [53, 70]. Математичні моделі і методи аналізу оболонок з магістральними тріщинами обговорюються у монографії [51, 52].

1.2 Сучасні підходи і методи розрахунку на стійкість до локальних і загальних форм випинання неоднорідних оболонкових систем при простому і комбінованому навантаженні

Теоретичні дослідження стійкості ізотропних тонкостінних оболонок поклали свій початок з робіт Х. М. Муштарі (1935 р.) [47] і одержали подальший розвиток у роботах Р. Seide [103, 104], А. В. Саченкова [62], А. С. Вольмира [16], Н. А. Алумяе [8], Н. А. Алфутова [9], В. З. Грищака, І. Н. Преображенського [83], Є. І. Григолюка [21] та ін. і продовжують свій розвиток в теперішній час [25, 45, 46, 54, 59, 106, 107, 108]. Огляд досліджень у цій галузі наведено у роботах [56, 60, 102], де проведений аналіз методів розв'язання проблем стійкості неоднорідних, зокрема підкріплених оболонок обертання. Вивчається стійкість складених оболонкових конструкцій, підкріплених дискретно розміщеними шпангоутами. Розглядаються конструкції постійної товщини типу «циліндр-конус», що знаходяться під спільною дією зовнішнього тиску, осьового стискання і крутильного моменту. Під дією лише зовнішнього тиску досліджуються оболонки типу «циліндр-конус-циліндр-конус» з

циліндричними відсікам постійної товщини, а конічними – лінійно-змінної товщини.

Стійкість складеної підкріпленої конструкції і окремих її частин знайдена за допомогою матричного методу або рівнянь спряження. Особлива увага приділяється пошуку параметрів рівностійкості підкріпленої конструкції, у тому числі, вибору жорсткостей шпангоутів на окремих її частинах.

Необхідно зауважити, що у роботах [9, 16] наведено повні системи диференціальних рівнянь в частинних похідних, що характеризують рівновагу елементу циліндричної і конічної оболонок і рівняння сумісності деформацій до втрати стійкості. На основі цих систем виводяться розв'язувальні звичайні диференціальні рівняння для дослідження на стійкість відповідних оболонок. Розглядається стійкість тонких циліндричних оболонок постійної товщини під дією одного або комбінації декількох зусиль: зовнішнього тиску, осьового стискання та крутного моменту. Розв'язувальні диференціальні рівняння цих задач дозволили отримати точний аналітичний розв'язок.

Розв'язувальні рівняння задач стійкості конічних оболонок є диференціальними рівняннями зі змінним коефіцієнтами. У випадку, коли оболонка має лінійно-змінну товщину, це рівняння є таким, що після заміни зводиться до рівняння із сталими коефіцієнтами. Таке рівняння має точний аналітичний розв'язок. У випадку, коли конічна оболонка має постійну товщину, розв'язувальне рівняння не дозволяє звести його до рівняння з постійними коефіцієнтами, тому до його розв'язання ефективно застосовуються асимптотичні методи.

У роботі [67] викладені теоретичні й прикладні основи асимптотичного ВКБ методу (Вентцель-Крамерс-Бриллюэн), який базується на розкладанні розв'язку в ряд по зворотних степенях великого параметра. У монографії [60] цей метод застосовується до розв'язання диференціальних рівнянь стійкості конічних оболонок і порівнюється з результатами, отриманими іншими методами. Це один із методів, який використовується в даній роботі.

Основоположниками застосування гібридного асимптотичного методу до різних класів диференціальних рівнянь стали J. F. Geer, C. M. Andersen [90]. Потім цей метод удосконалювався для випадку сингулярних диференціальних рівнянь у роботах В.З. Грищака і його учнів [92–95], у тому числі для дослідження стійкості конічних оболонок [25, 91]. Другим методом, який застосовується в даній роботі, є гібридний ВКБ-Гальоркін метод, що базується на використанні класичного методу збурювань ВКБ у комбінації із принципом визначення штучних невідомих коефіцієнтів в асимптотичних розкладаннях за допомогою умови ортогональності Галеркіна. У роботах [25, 94, 95] проведений порівняльний аналіз результатів, отриманих іншими методами, з асимптотичними розв'язками ВКБ методом і гібридним ВКБ-Гальоркін методом. Зокрема, отримане добре узгодження аналітичних розв'язків, отриманих цим методом, із чисельними розв'язками.

Особливу увагу слід приділити проблемам стійкості тонкостінних оболонок обертання з підкріплюючими силовими елементами, які дозволяють збільшити загальну жорсткість оболонкової конструкції і збільшити критичні навантаження до втрати стійкості. Окрім гладких і підкріплених оболонок, в техніці застосовують складені оболонки, зокрема, оболонки типу «циліндр-конус». У зв'язку з цим актуальною проблемою є розробка нових або удосконалення існуючих методів розрахунку тонкостінних конструкцій зазначених типів, що піддаються впливу зовнішніх навантажень.

Стійкість підкріпленої циліндричної оболонки досліджена, зокрема, в роботах [16, 26, 59], за допомогою аналітичних і чисельних методів. У статті Постнова В. А., Тумашика І. В., Москвиної І. В. [59] розглядається стійкість кругової циліндричної оболонки, підкріпленої дискретно розміщеними внутрішніми та зовнішніми ребрами жорсткості. Задачу розв'язано за допомогою скінченно-елементного пакету ANSYS з використанням умов спряження ребер з оболонкою.

Стійкість підкріплених конічних оболонок вивчалася, зокрема, в роботах [43, 60]. Лизин В. Т., Пяткин В. А. [43] дискретно розміщують шпангоути так, щоб задовольнити умови рівномірності прольотів оболонки.

Особливе місце для аналізу підкріплених шпангоутами оболонок при простому і комбінованому навантаженні займає метод початкового параметра в матричній формі для отримання зміни напружено-деформованого стану при переході через шпангоут [26, 60]. Метод використовує фундаментальну матрицю розв'язків розв'язувального звичайного диференціального рівняння стійкості і матрицю перетворення напружено-деформованого стану при переході через шпангоут. При цьому враховується як жорсткість шпангоута в площині початкової кривизни, так і жорсткість з площини.

Залежно від того, чи є фундаментальна матриця нормальною або не є такою, зміну напружено-деформованого стану відповідного відсіку оболонкової конструкції, що містить скінченну кількість шпангоутів можна або не можна отримати як почерговий добуток матриць відсіків оболонки та шпангоутних матриць. У випадку, коли відповідна матриця не є нормальною, для сполучення її відсіків або сполучення з іншою частиною конструкції необхідно скласти рівняння спряження, яке задає рівність нормальних переміщень і їх похідних в суміжних точках відсіків. Рівняння спряження склалися для дослідження на стійкість складених оболонкових конструкцій в роботах [46, 59].

Розрахунок складених підкріплених оболонкових конструкцій типу «циліндр-конус» проводиться чисельними методами [7, 46, 106, 107].

В роботі Teng J. G., Barbagallo M. [106] представлено дослідження випинання підкріпленої оболонки типу циліндр-конус, підкріпленої стрингерами і шпангоутами. На основі методу скінченних елементів проведено дослідження щодо жорсткості підкріплюючих елементів. Зазначена робота може служити основою для аналізу рівнотійкості складених оболонкових елементів на базі чисельного методу дослідження.

Книга Teng J. G., Rotter J. M. [107] являє собою синтез різноманітних досліджень, досвіду та знань в галузі тонкостінних металевих конструкцій, у тому числі різноманітних оболонкових конструкцій типу циліндр-конус.

В роботі Zhao Y, Teng J. G. [108] проведено порівняльний аналіз результатів досліджень на стійкість непідкріпленої конструкції циліндр-конус під внутрішнім тиском, отриманих експериментально і чисельно методом скінченних елементів.

В роботі Печникова В. П., Захарова Р. В., Тарасової А. В. [54] запропоновано метод і програму проектування бака ракети вафельного типу при втраті стійкості оболонки в умовах пластичних деформацій. При розрахунку передбачено проектування паливного бака ракети з урахуванням загальної та місцевої втрати стійкості як всієї оболонки, так і окремої клітини. Рівностійкість клітин циліндричної оболонки вафельного типу також ураховано в монографії [16]. В монографії [60] за допомогою аналітичного ВКБ-розв'язку вивчено стійкість підкріплену конічну оболонку, що має рівностійкі відсіки.

У даній дисертаційній роботі розглядаються підкріплені оболонкові конструкції з дискретно розміщеними шпангоутами. Особлива увага приділена методиці визначення жорсткостей шпангоутів для забезпечення рівностійкості конічної й циліндричної секцій комбінованої оболонки.

Реальні оболонкові конструкції мають недосконалості геометричної форми, що в ряді випадків істотно впливає на їх експлуатаційні характеристики. При цьому залишилися не в повній мірі вирішеними питання стійкості складених геометрично недосконалих оболонкових конструкцій, особливо підкріплених ребрами жорсткості.

З даного напрямку досліджень слід відзначити роботу X. Bai, Tang, R., Y. Zan, J. Li [88], в якій аналіз обмежений впливом осесиметричних початкових недосконалостей на стійкість оболонок циліндричної форми при осьовому стисненні. Вплив підкріплюючих кільцевих ребер жорсткості на несучу здатність циліндричних оболонок обговорюється в [87] (X. Bai, W. Xu, H. Ren, J. Li). При цьому увага дослідників приділяється окремим видам зовнішнього

навантаження досліджуваних конструкцій. Чисельному аналізу поведінки геометрично недосконалих композитних циліндричних оболонок при комбінованому навантаженні зовнішніми зусиллями на основі нелінійного методу скінченних елементів присвячена робота А. Tafresh., С. G. Bailey [105]. Але залишилося не вирішеними питання, пов'язані з впливом підкріплюють елементів на несучу здатність зазначених типів конструкцій.

Слід зазначити оглядову публікацію Н. Schmidt [102], присвячену результатам досліджень в області стійкості гладких і підкріплених оболонок різної геометричної форми і складених конструкцій, включаючи експериментальні дослідження. При цьому основна увага приділена можливості використання сучасних чисельних алгоритмів і ролі експериментального дослідження в практиці проектування реальних конструкцій. У меншій мірі тут приділено увагу взаємодії локальних і загальних форм випинання при аналізі несучої здатності.

В роботі Y. Zhao, J. G. Teng [108] викладені результати експериментального дослідження стійкості конструкції «циліндр-конус» при дії внутрішнього тиску з аналізом осесиметричних і несиметричних форм втрати стійкості на базі методу скінченних елементів, які можуть бути використані для дослідження ребристих конструкцій складної конфігурації.

Дослідженню енергетичного і деформованого станів оболонок полусферической і ожівальної форм з урахуванням пластичних деформацій матеріалу присвячена робота М. А. Iqbal, G. Tiwari, Р. К. Gupta [101]. Наведені в роботі результати аналізу впливу ударного навантаження на поведінку окремих типів оболонок актуальні і для складених оболонкових конструкцій.

Метод аналізу динамічної стійкості циліндричних оболонок з композиційного матеріалу з урахуванням геометричної нелінійності і деформацій зсуву запропонований М. Amabili [86], при цьому актуальною залишається проблема впливу підкріплюючих конструкцію силових елементів. Експериментальне дослідження та скінченно-елементний аналіз міцності тришарової оболонки модуля ракети-носія наведені в дослідженні

D. V. Akimov, V. Z. Gryshchak, S. I. Gomenyuk, I. F. Larionov, D. V. Klimenko, V. N. Sirenko [84] без урахування впливу дискретності розташування проміжних шпангоутів.

Новий підхід до вирішення проблеми оптимізації з точки зору міцності вафельних оболонкових секцій ракети-носія запропонований в роботі M. A. Degtyarev, A. V. Shapoval, V. V. Gusev, K. V. Avramov, V. N. Sirenko [89] на базі методу скінченних елементів. Однак в проблемі оптимального проектування представленого дослідження не аналізуються питання впливу кривизни меридіана серединної поверхні конструкції.

В даній дисертаційній роботі досліджено задачу стійкості зазначеної оболонкової конструкції при спільній дії зовнішнього тиску і осьових стискаючих зусиль з метою аналізу можливих шляхів підвищення критичних навантажень і зниження матеріаломісткості складених оболонкових систем. Зазначений тип силових оболонкових систем може бути ефективним з точки зору раціонального проектування, особливо при створенні аерокосмічної техніки. Основна увага приділяється аналізу складених оболонкових конструкцій при спільній дії зовнішніх навантажень, здатних викликати втрату стійкості.

Це дозволяє стверджувати, що дане дослідження, присвячене стійкості і раціонального проектування конструкцій типу «бочка-оживало» в умовах комбінованого навантаження, є доцільним. Це пов'язано з тим, що визначення раціональних характеристик жорсткості шпангоутів може значно зменшити загальну масу оболонкової конструкції, а ефективний вибір геометричних характеристик істотно підвищить її стійкість при комбінованому навантаженні.

1.3 Висновки

В результаті наведеного аналітичного огляду сучасного стану проблеми дослідження напружено-деформованого стану, моделювання стійкості

оболонкових конструкцій складної конфігурації і математичного забезпечення розрахунку несучої спроможності конструкцій аерокосмічної техніки можна виділити наступні актуальні напрями дослідження: розробка математичних моделей і комп'ютерних технологій для проведення віртуальних руйнівних випробувань оболонкових конструкцій аерокосмічного машинобудування, вдосконалення підходів і методів щодо аналітичної оцінки стійкості підкріплених оболонкових тонкостінних конструкцій; створення аналітичних методів аналізу локальних і загальних форм випинання ребристих оболонок при комбінованому зовнішньому навантаженні та алгоритму однакової стійкості відсіків оболонкових конструкцій складної геометричної конфігурації з урахуванням впливу жорсткості проміжних шпангоутів; застосування результатів аналітичного аналізу до програмних комплексів і САПР, що автоматизують розрахунок напружено-деформованого стану і стійкість конструкцій аерокосмічного машинобудування з візуалізацією досліджуваних процесів.

На підставі проведеного аналізу робиться висновок про те, що розробка чисельних і аналітико-чисельних методів та алгоритмів віртуального дослідження напружено-деформованого стану і стійкості підкріплених оболонкових конструкцій складної конфігурації при статичному комбінованому навантаженні є самостійною проблемою з точки зору розвитку механіки деформованого твердого тіла та застосування ефективних методів і алгоритмів розрахунку, а також визначення руйнівних навантажень в сучасних конструкціях аерокосмічного машинобудування.

РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОРПУСУ ДВИГУНА РАКЕТИ-НОСІЯ ПРИ НАВАНТАЖЕННІ ЗРОСТАЮЧИМ ВНУТРІШНІМ ТИСКОМ ДО РУЙНУВАННЯ

У другому розділі роботи запропоновано математичну модель та її програмну реалізацію для проведення віртуальних руйнівних випробувань оболонкових систем РКТ, яка відображає геометрію досліджуваного типу конструкцій, та методику розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) з визначенням руйнівного навантаження.

Для розробки методики вибрано визначальні рівняння і критерії міцності, сформульовано відповідну крайову задачу для визначення НДС оболонки, запропоновано і розроблено метод її розв'язання та програмні засоби розрахунків руйнуючих навантажень з обґрунтуванням достовірності отриманих результатів.

Досліджувані тонкостінні елементи конструкцій змодельовані складеною оболонкою обертання довільного меридіана зі змінною в меридіональному напрямку товщиною. При цьому певні ділянки конструкції можуть бути виготовлені з різних ізотропних матеріалів з врахуванням деформування за межами пружності. Розглядається випадок, коли оболонка зазнає дії зростаючого внутрішнього тиску, що призводить до її руйнування. Для визначення руйнівного тиску поетапно розв'язується вісесиметрична задача пластичності для тонкої ізотропної оболонки, збільшуючи рівень навантаження на кожному наступному етапі. При наявності масивних частин конструкції розрахункова схема ускладнюється і задача розв'язується у просторовій постановці.

Розроблена математична модель використана для проведення віртуальних випробувань корпусу двигуна в процесі його навантаження зростаючим

внутрішнім тиском до руйнування. Задача розв'язується у квазістатичній постановці з використанням співвідношень геометрично лінійної теорії оболонок та гіпотез Кірхгофа-Лява методом послідовних наближень. За еквівалентне напруження приймаються критерії максимальних напружень, Сдобирєва і Мізеса. Для опису поведінки матеріалу оболонки використовуються співвідношення теорії процесів деформування за траєкторіями малої кривизни, лінеаризовані методом додаткових напружень.

2.1 Постановка задачі. Основні співвідношення для розрахунку НДС оболонки з меридіаном змінної геометрії

Розглядається ізотропна оболонка обертання, яка знаходиться в ненапруженому та недеформованому стані при температурі $T = T_0 = 20^\circ C$ і зазнає дії зростаючого рівномірного внутрішнього тиску при тій же температурі. Передбачається, що меридіан оболонки може складатися зі скінченного числа ланок різної геометрії. Оболонка віднесена до криволінійної ортогональної системи координат s, θ, ζ , пов'язаної з недеформованою неперервною координатною поверхнею. Через s ($s_a \leq s \leq s_b$) позначена меридіональна координата; s_a, s_b відповідають торцям оболонки; θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) – колова координата; ζ ($\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_k$) – координата, яка відраховується по нормалі до координатної поверхні; ζ_0 і ζ_k відповідають внутрішній і зовнішній поверхням оболонки, товщина оболонки $h_i = \zeta_k - \zeta_0$. За координатну поверхню вибираємо серединну поверхню оболонки, або одну з її поверхонь. Припускаємо, що в процесі навантаження в оболонці виникають пластичні деформації, а деформаціями повзучості нехтуємо як дуже малими порівняно з пружними та пластичними складовими.

Задача розв'язується в квазістатичній постановці з використанням співвідношень геометрично лінійної теорії оболонок та гіпотез Кірхгофа-Лява

[16, 49]. Процес навантаження розбиваємо на ряд малих етапів таким чином, щоб якнайкраще відобразити історію його протікання (перехід від активного навантаження до розвантаження й навпаки). Для опису деформування матеріалу оболонки використовуються співвідношення теорії процесів деформування за траєкторіями малої кривизни [76–78], лінеаризовані методом додаткових напружень. Задача розв'язується поетапно методом послідовних наближень. Той рівень навантаження, при якому виконується критерій міцності

$$\sigma_e = \sigma_n, \quad (2.1)$$

де σ_e – еквівалентне напруження, а σ_n – межа міцності матеріалу, що буде відповідати руйнуванню.

За еквівалентне напруження приймаємо три відомі класичні вирази, а саме:

- 1) критерій головних максимальних напружень [57]

$$\sigma_e = \sigma_{\max}; \quad (2.2)$$

- 2) критерій Сдобирєва [63]

$$\sigma_e = (\sigma_i + \sigma_{\max})/2; \quad (2.3)$$

- 3) критерій Мізеса [57]

$$\sigma_e = \sigma_i, \quad (2.4)$$

де σ_i – інтенсивність напружень; $\sigma_i = \left(\frac{3}{2} \sigma_{ij} s_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} = S \sqrt{3}$; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$ – компоненти діватора напружень; s_{ij} – компоненти тензора напружень;

$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}$ – перший інваріант тензора напружень; δ_{ij} – символ Кронекера;
 S – інтенсивність дотичних напружень.

Головні нормальні напруження визначаються через компоненти тензора напружень [76]. Для розв'язання задачі на кожному етапі навантаження використовуємо диференціальні рівняння рівноваги елемента оболонки [49, 23], геометричні співвідношення [49, 23] та фізичні рівняння [76]. Зв'язок між компонентами тензорів напружень σ_{ss} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\zeta\zeta}$ і деформацій ε_{ss} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{\zeta\zeta}$ в довільній точці оболонки на M -му етапі навантаження запишемо у формі закону Гука з додатковими напруженнями:

$$\sigma_{ss} = A_{11} \varepsilon_{ss} + A_{12} \varepsilon_{\theta\theta} - A_{1D}, \quad \sigma_{\theta\theta} = A_{12} \varepsilon_{ss} + A_{22} \varepsilon_{\theta\theta} - A_{2D}; \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{\zeta\zeta} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\theta\theta}) - \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{ss}^{(p)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(p)}); \quad (2.6)$$

$$A_{11} = A_{22} \frac{E}{1-\nu^2}, \quad A_{12} = \nu A_{11}; \quad (2.7)$$

$$A_{1D} = A_{11} (\varepsilon_{ss}^{(p)} + \nu \varepsilon_{\theta\theta}^{(p)}), \quad A_{2D} = A_{11} (\varepsilon_{\theta\theta}^{(p)} + \nu \varepsilon_{ss}^{(p)}), \quad (2.8)$$

де E , ν – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу; $\varepsilon_{ss}^{(0)}$, $\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}$,
 $\varepsilon_{\zeta\zeta}^{(0)} = -(\varepsilon_{ss}^{(p)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(p)})$ – пластичні складові компонент деформацій, обчислені як сума приростів цих компонент:

$$\varepsilon_{ss}^{(p)} = \sum_{m=1}^M \Delta_m \varepsilon_{\theta\theta}^{(p)}, \quad \Delta_m \varepsilon_{ss}^{(p)} = \langle c_{ss} \rangle_m \Delta_m \Gamma_p^*, \quad (2.9)$$

$$\langle c_{ss} \rangle = \left\langle \frac{2\sigma_{ss}^2 - \sigma_{\theta\theta}}{S} \right\rangle (s, \theta), \quad (2.10)$$

$$S = \left[(\sigma_{ss}^2 - \sigma_{ss} \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2) / 3 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.11)$$

Кутові дужки в (2.10) означають середні на етапі значення відповідних величин, Γ^{**} – інтенсивність накопичених пластичних деформацій:

$$\Gamma_p^{**} = \sum_{m=1}^{M-1} \Delta_m \Gamma_p^* + \Delta_m \Gamma_p^* . \quad (2.12)$$

Припускається, що між S і Γ_p^* існує залежність виду:

$$S = \Phi(\Gamma_p^*), \quad (2.13)$$

яка конкретизується на основі експериментально отриманих миттєвих діаграм $\sigma \leftrightarrow \varepsilon$ розтягу з використанням відповідних формул переходу [76] від одновісного НДС до складного.

Використавши (2.6), отримаємо рівняння зв'язку між зусиллями, моментами і деформаціями координатної поверхні оболонки [77, 23]:

$$N_s = C_{11}^{(0)} \varepsilon_s + C_{12}^{(0)} \varepsilon_\theta + C_{11}^{(1)} K_s + C_{12}^{(1)} K_\theta - N_{1D}^{(0)}, \quad (2.14)$$

$$N_\theta = C_{12}^{(1)} \varepsilon_s + C_{22}^{(1)} \varepsilon_\theta + C_{12}^{(1)} K_s + C_{22}^{(1)} K_\theta - N_{2D}^{(0)}, \quad (2.15)$$

$$M_s = C_{11}^{(1)} \varepsilon_s + C_{12}^{(1)} \varepsilon_\theta + C_{11}^{(2)} K_s + C_{12}^{(2)} K_\theta - N_{1D}^{(1)}, \quad (2.16)$$

$$M_\theta = C_{12}^{(1)} \varepsilon_s + C_{22}^{(1)} \varepsilon_\theta + C_{12}^{(2)} K_s + C_{22}^{(2)} K_\theta - N_{2D}^{(1)}, \quad (2.17)$$

де N_s , N_θ – меридіональне й колове зусилля; M_s , M_θ – відповідні згинаючі моменти; ε_s , ε_θ , K_s , K_θ – компоненти деформації і зміни кривизни координатної поверхні оболонки в напрямках s і θ .

Сукупність статичних, геометричних співвідношень і фізичних рівнянь (2.14)–(2.17) дозволяє звести задачу до системи шести звичайних диференціальних рівнянь:

$$C_{mn}^{(j)} = \int_{\zeta_0}^{\zeta_i} A_{mn} \zeta^j d\zeta, \quad N_{mD}^{(j)} = \int_{\zeta_0}^{\zeta_i} A_{mn} \zeta^j d\zeta \quad (m, n=1, 2; j=0, 1, 2); \quad (2.18)$$

$$\frac{d\vec{Y}}{ds} = P(s)\vec{Y} + \vec{f}(s) \quad (2.19)$$

при граничних умовах:

$$B_1 \vec{Y}(s_a) = \vec{b}_1, \quad B_2 \vec{Y}(s_b) = \vec{b}_2, \quad (2.20)$$

де $\vec{Y} = \{N_s, Q_s, M_s, u, w, \vartheta_s\}$ – вектор розв’язувальних функцій; $P(s)$ – матриця системи; $\vec{f}(s)$ – вектор додаткових зусиль; $B_1, B_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$ – задані матриці і вектори граничних умов.

За розв’язувальні функції вибрано невідомі, що дозволяють безпосередньо формулювати різні граничні умови [23], а саме: Q_s – перерізувальне зусилля; u – переміщення точки координатної поверхні в меридіональному напрямку; w – прогин; ϑ_s – кут повороту нормалі до координатної поверхні в меридіональній площині. Вирази для елементів матриці $P(s)$ та компонент вектора $\vec{f}(s)$ визначаються формулами [76], з яких випливає, що елементи матриці є залежними від геометрії оболонки та пружних властивостей матеріалу, а компоненти вектору $\vec{f}(s)$ залежать ще й від зовнішніх навантажень та пластичних деформацій, які уточнюються у процесі послідовних наближень.

2.2 Алгоритм та методика розрахунку

Для проведення розрахунків необхідно задати геометрію оболонки, властивості її матеріалів, умови закріплення та навантаження. Геометрія

оболонки характеризується даними про меридіан її координатної поверхні та товщину. Меридіан може складатися зі скінченного числа ланок, кожна з яких відповідає циліндричній, конічній, сферичній, тороїдальній формі чи круглій пластині. Властивості кожного з матеріалів оболонки характеризуються заданими у вигляді таблиць діаграмами одновісного розтягу, значеннями коефіцієнта Пуассона й меж міцності. Повний опис вихідних даних та основні модулі програмного комплексу наведено в роботах [74, 75].

Алгоритм розв'язання задачі пластичності будується таким чином. У першому наближенні на першому етапі навантаження в кожному елементі оболонки приймаємо $A_{1D} = A_{2D} = 0$. На наступних етапах у першому наближенні A_{1D} , A_{2D} (2.6) обчислюємо з використанням значень пластичних складових деформацій, одержаних на попередньому етапі. Після обчислення елементів матриці $P(s)$ і компонент вектору $\vec{f}(s)$ розв'язуємо крайову задачу (2.19), (2.20) шляхом зведення до задач Коші, для вирішення яких використовуємо метод Рунге-Кутта з дискретною ортогоналізацією [23]. Отримавши в результаті розв'язувальні функції, в кожному елементі оболонки знаходимо компоненти деформацій, а по них – компоненти напружень (2.6). Далі обчислюємо інтенсивність дотичних напружень (2.11). Потім знаходимо приріст інтенсивності пластичної деформації зсуву за формулами:

$$\Delta_M \Gamma_p^* = \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta_M \varepsilon^{(p)}, \quad (2.21)$$

$$\Delta_M \varepsilon^{(p)} = \sum_{i=1}^{L-1} \Delta_{Mi} \varepsilon^{(p)} + \Delta_{ML} \varepsilon^{(p)}, \quad (2.22)$$

$$\Delta_{ML} \varepsilon^{(p)} = \frac{S\sqrt{3} - \sigma^{(d)}}{E}, \quad (2.23)$$

де L – номер поточного наближення на M -му етапі, а $\sigma^{(d)} = S^{(d)} \sqrt{3}$ визначається із залежності (2.13) за обчисленим в попередньому наближенні значенням Γ_p^* (2.12).

Далі знаходимо прирости пластичних складових деформацій та значення цих складових (2.10), які використовуємо для обчислення A_{1D} , A_{2D} (2.7) в наступному наближенні. Процес послідовних наближень на етапі завершується при виконанні умови:

$$|\Delta_{ML}\varepsilon^{(p)}| \leq \delta, \quad (2.24)$$

де δ – наперед задане мале число.

Направленість процесу навантаження перевіряється після розв'язання задачі у першому наближенні: якщо $\Delta_M \Gamma_p^* < 0$, це означає, що в даному елементі відбувається розвантаження, і на даному етапі необхідно покласти $\Delta_M \Gamma_p^* = 0$.

Після завершення процесу послідовних наближень на кожному етапі необхідно перевірити виконання критеріїв міцності (2.2)–(2.4). В осесиметрично навантаженій тонкій оболонці головними напруженнями є меридіональне σ_{ss} і колове $\sigma_{\theta\theta}$ напруження, тобто у виразах (2.2)–(2.4) $\sigma_{\max} = \max(\sigma_{ss}, \sigma_{\theta\theta})$, а S визначається формулою (2.11). Розрахунки НДС оболонки проводяться з перевіркою всіх критеріїв міцності (2.2)–(2.4).

Наведений алгоритм розрахунків реалізований у вигляді програмного комплексу для сучасних ПК. Розроблена методика розрахунку пружнопластичного НДС та руйнуючих навантажень оболонкових конструкцій описаного класу використовується в ДП «КБ «Південне»» для оцінки їх міцності, у тому числі без проведення випробувань на руйнування.

2.3 Тестовий приклад розрахунку руйнівного навантаження

Для підтвердження відповідності результатів розрахунку руйнівних навантажень проведено їх порівняння з фактичними експериментальними даними на руйнування металевго корпуса двигуна із сталі 25ХГСА у ДП «КБ

«Південне»». Геометрія та умови навантаження корпусу двигуна, який моделюємо тонкою оболонкою обертання, наведено на рис. 2.1. За координатну обрано внутрішню поверхню оболонки, меридіан оболонки складається з 8-и ланок, інформація про які наведена нижче (лінійні розміри дано в см, кути – в радіанах; kt – кількість точок, якими ланку меридіана розбито для інтегрування системи (2.19):

1) сферична, радіус сфери $r = 8,5$, $s_0 = 0$, $s_1 = 1,352452$; $\varphi_1 = 0,600077$,
 $kt = 81$;

2) тороїдальна, радіус тора $r = 2,5$; $s_2 = 3,3814695$; $\varphi_2 = 0,759189$;
 $kt = 81$;

3) циліндрична, радіус циліндра $R = 6,63$; $s_3 = 4,4814695$; $\varphi_3 = n/2$;
 $kt = 21$;

4) циліндрична, радіус циліндра $R = 6,63$; $s_4 = 47,6814695$; $\varphi_4 = n/2$;
 $kt = 401$;

5) циліндрична, радіус циліндра $R = 6,63$; $s_5 = 48,2814695$; $\varphi_5 = n/2$;
 $kt = 21$;

6) циліндрична, радіус циліндра $R = 6,63$; $s_6 = 48,6814695$; $\varphi_6 = n/2$;
 $kt = 21$;

7) тороїдальна, радіус тора $r = 2,5$; $s_7 = 50,710487$; $\varphi_7 = n/2$; $kt = 81$;

8) сферична, радіус сфери $r = 8,5$; $s_8 = 57,163593$; $\varphi_8 = 2,3824033$;
 $kt = 81$.

Товщина оболонки на ланках 1–5 постійна і дорівнює 0,15 см; на ланці 6 – лінійно змінна від 0,15 до 0,3 см; на ланках 7 і 8 – постійна і дорівнює 0,3 см. Кількість точок для обчислення інтегралів по товщині у виразах (2.18) дорівнює 11.

Пластичні властивості матеріалу оболонки були задані у вигляді діаграми $\sigma \square \varepsilon$ для сталі 25ХГСА. Для побудови діаграми використані дані, отримані з ДП «КБ «Південне»», та дані з літератури [76]. Побудовану діаграму

представлено на рис. 2.2. Межа міцності матеріалу $\sigma_n = 1080$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$.

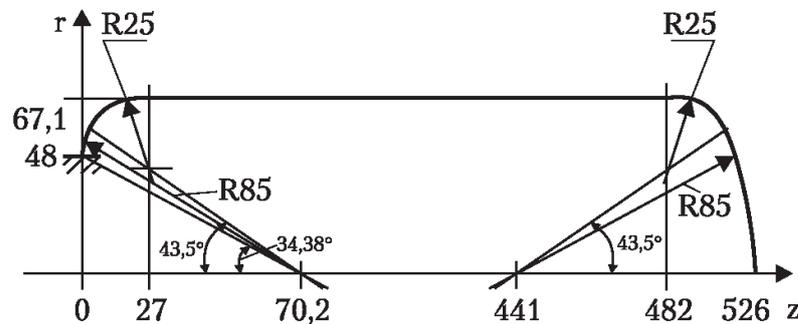


Рисунок 2.1 – Розрахункова схема корпусу та меридіан оболонки

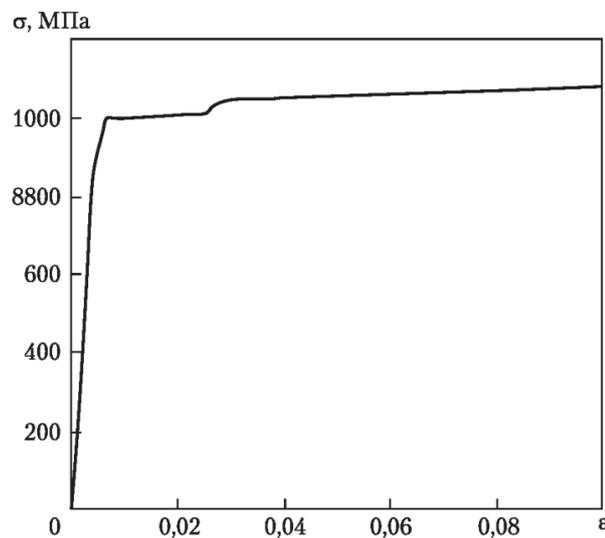


Рисунок 2.2 – Діаграма деформування сталі 25ХГСА

Граничні умови для розв'язання крайової задачі (2.19), (2.20) задані при $s_a = s_0$ у вигляді: $u = 0$, $w = 0$, $\mathcal{G}_s = 0$; при $s_b = s_8$: $u = 0$, $\mathcal{G}_s = 0$, $Q_s = 0$.

Процес навантаження розбито на ряд етапів, яким відповідають значення внутрішнього тиску (МПа) $q_z = 10; 12; 12,5; 13; 13,5; \dots; 28,2$. Величини етапів тиску зменшувалися по мірі наближення до значень σ_e , які задовольняли умовам (2.2)–(2.4). Результати розрахунків показали, що пластичні деформації виникли при $q_z = 16$ МПа на другій ланці оболонки, а потім у процесі

збільшення навантаження поширилися по всій оболонці. Процес навантаження був активним, розвантаження не виникло.

В результаті розрахунків встановлено, що можливе руйнування оболонки починається на зовнішній поверхні в циліндричній частині корпусу, $5,1 \cdot 10^{-2} \text{ м} \leq s \leq 8,4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, тобто на третій ланці. Значення руйнівного тиску q_ζ , еквівалентних напружень σ_e , визначених у відповідності до критеріїв (2.2)–(2.4) і координати s такі:

- 1) $q_\zeta = 23,44 \text{ МПа}$, $\sigma_e = \sigma_{\max} = \sigma_{\theta\theta} = 1079,8 \text{ МПа}$, $s = 5,13 \cdot 10^{-2} \text{ м}$;
- 2) $q_\zeta = 25,95 \text{ МПа}$, $\sigma_e = (\sigma_i + \sigma_{\theta\theta})/2 = 1079,9 \text{ МПа}$, $s = 5,78 \cdot 10^{-2} \text{ м}$;
- 3) $q_\zeta = 28,15 \text{ МПа}$, $\sigma_e = \sqrt{3}S = 1079,6 \text{ МПа}$, $s = 8,37 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Таким чином, розрахункова величина руйнівного тиску $23,44 \leq q_\zeta^* \leq 28,15 \text{ МПа}$.

Як показали розрахунки, при вказаних значеннях тиску максимальним за величиною є колове напруження. Це означає, що руйнування відбуватиметься вздовж твірної. Результати розрахунків свідчать, що в середній частині циліндричної ланки оболонки значення інтенсивності дотичних напружень на зовнішній і внутрішній поверхнях практично збігаються; відмінності спостерігаються тільки в днищах і прилеглих до них ділянках. На циліндричній ділянці, де можливе руйнування, значення інтенсивності дотичних напружень на зовнішній поверхні вище, ніж на внутрішній. У зв'язку з цим на рис. 2.3–2.5 наведено дані тільки на зовнішній поверхні оболонки в тій частині, де можливе руйнування. Вертикальні лінії сітки на цих рисунках відповідають границям ланок. Криві 1, 2, 3 на рисунках відповідають значенням руйнівного тиску за трьома критеріями в описаному вище порядку. На рис. 2.3 показано зміни уздовж меридіана інтенсивності дотичних напружень (а) і деформацій зсуву (б); на рис. 2.4 – меридіонального (а) і колового (б) напружень; на рис. 2.5 – відповідних деформацій. Рисунки показують, що колові напруження і деформації значно перевершують меридіональні.

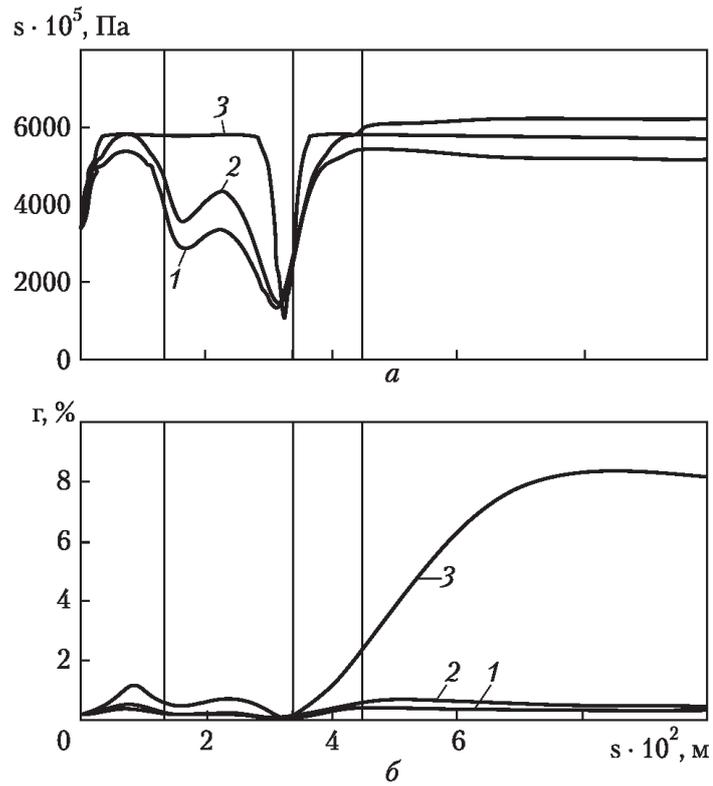


Рисунок 2.3 – Зміна інтенсивності дотичних напружень (а) та деформацій зсуву (б) вздовж меридіана

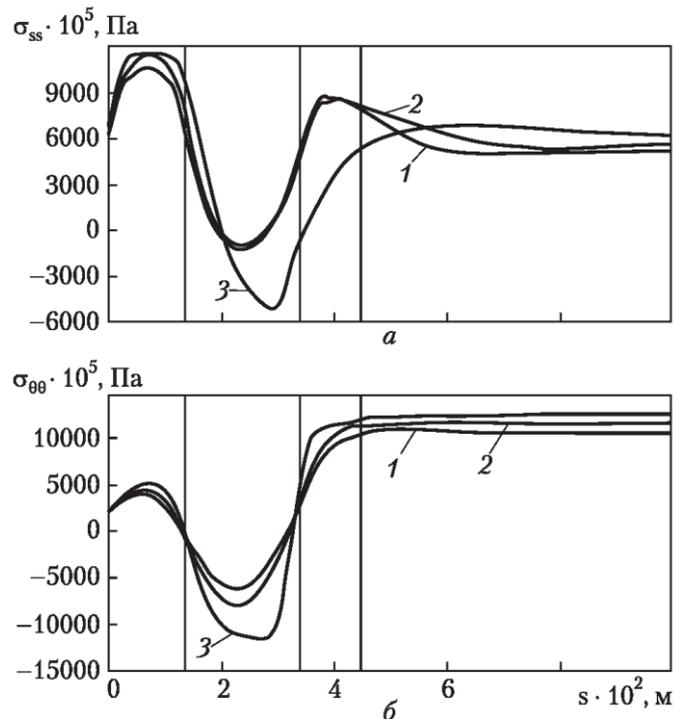


Рисунок 2.4 – Зміна меридіональних (а) та колових (б) напружень вздовж меридіана

Відзначимо, що проводилися також розрахунки досліджуваного корпусу при використанні співвідношень пластичності [76], які описують деформування елементів оболонки вздовж прямолінійних траєкторій. При цьому результати розрахунків відрізнялися від відповідних результатів, отриманих з використанням теорії процесів деформування по траєкторіях малої кривизни не більше ніж на 2%.

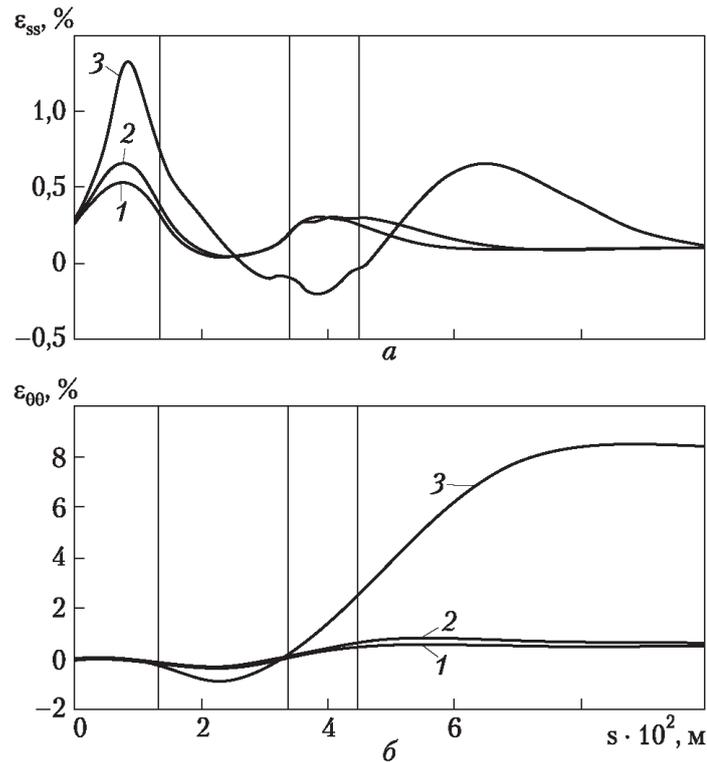


Рисунок 2.5 – Зміна меридіональних (а) та колових (б) деформацій вздовж меридіана

Для перевірки достовірності результатів, отриманих за розробленою в рамках теорії тонких оболонок методикою, було виконано розрахунки НДС досліджуваного корпусу як тіла обертання з використанням методик і програмних засобів розв'язання просторової задачі пластичності методом скінченних елементів [74, 79]. Деяке розходження результатів розрахунків за двома методиками спостерігається в області навколо місця різкої зміни товщини та в околі граничного контуру $s = s_a$. Проте ці відмінності не впливають на оцінку міцності корпусу.

Таким чином, результати розрахунків за просторовою теорією підтвердили адекватність обраної оболонкової моделі до оцінки міцності тестової конструкції.

2.4 Обґрунтування достовірності результатів

Для підтвердження достовірності одержаних результатів виконано порівняння розрахункових значень руйнівного тиску з фактичним значенням, що було одержано експериментально в ДП «КБ «Південне»». При виробничих випробуваннях значення руйнівного тиску склало $q_{\zeta}^* = 25,95$ МПа, який практично співпадає з розрахунковим рівнем тиску $q_{\zeta} = 25,95$ МПа, що визначається відповідно до критерію Сдобирєва.

Це підтверджує правомірність розробленого теоретичного підходу до розрахунку руйнівних навантажень досліджуваної оболонкової конструкції корпусу двигуна та ефективність застосування практичної методики.

2.5 Висновки

1. Розроблено математичну модель деформування та руйнування тонкостінних металевих конструкцій в процесі навантаження внутрішнім тиском. Використано визначальні рівняння теорії процесів пружнопластичного деформування ізотропних матеріалів за траєкторіями малої кривизни, співвідношення теорії тонких оболонок обертання і класичні критерії міцності – максимальних головних нормальних напружень, Сдобирєва та Мізеса.

2. Задачу розв'язано з використанням розроблених програмних засобів на базі сучасних програмних комплексів.

3. Розроблена математична модель використана для проведення віртуальних випробувань корпусу двигуна в процесі його навантаження

зростаючим внутрішнім тиском аж до руйнування. В результаті розрахунків встановлено, що можливе руйнування корпусу відбувається в циліндричній частині по твірній.

4. Найближчим до експериментального виявилось значення руйнівного тиску, отримане за критерієм Сдобирєва, яке відрізняється менш ніж на 2%.

5. Порівняння результатів розрахунків, отриманих при розв'язанні задачі теорії тонких оболонок, і тієї ж задачі в просторовій постановці підтвердили правомірність і ефективність оболонкової моделі.

6. Розроблена математична модель адекватно відображає процес пружнопластичного деформування та руйнування тонкостінних оболонкових конструкцій розглянутого класу в умовах зростаючого тиску і може бути застосована для прогнозування руйнівного навантаження відповідальних ракетних конструкцій.

РОЗДІЛ 3

СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНИЙ ПІДХІД ДО РОЗРАХУНКУ НДС ТА РУЙНІВНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ПАЛИВНИХ БАКІВ РАКЕТИ-НОСІЯ ПРИ НАЯВНОСТІ ТРІЩИНИ У НАЙБІЛЬШ НАПРУЖЕНІЙ ДІЛЯНЦІ КОНСТРУКЦІЇ

Третій розділ присвячено розробці підходу до розрахунку НДС та руйнівного навантаження паливних баків ракети-носія при наявності тріщини у найбільш напруженій ділянці конструкції.

В основу підходу покладено поєднання методу скінченних елементів з теорією механіки руйнування. Математична модель напружено-деформованого стану баків представляється у вигляді рядів Фур'є по окружній координаті циліндричної оболонки, у поздовжньому напрямку для отримання невідомих функцій застосовується дискретна модель на базі методу скінченних елементів.

Для оцінки НДС в області тріщини знаходяться коефіцієнти інтенсивності напружень, які визначаються з розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь. Чисельний аналіз руйнування бака ракети-носія під дією внутрішнього тиску поділяється на дві задачі, які послідовно вирішуються: розрахунок НДС бака без тріщини під дією заданого внутрішнього тиску та аналіз інтенсивності напружень конструкції з тріщиною, на берегах якої прикладені питомі силові фактори, отримані на першому етапі розрахунку.

Для чисельного вирішення задачі створена програма в середовищі MAPLE, яка дозволила розрахувати НДС конструкції бака та коефіцієнт інтенсивності напружень в околі тріщини.

3.1 Метод розрахунку руйнівних навантажень ребристих баків ракети-носія із тріщиною у найбільш напруженій зоні

Запропоновано метод розрахунку величин внутрішніх руйнівних статичних тисків, що діють на баки ракет-носіїв. Основним елементом бака ракети-носія є циліндрична оболонка посилена зсередини стрінгерами і шпангоутами. Завдання вирішується в два етапи. На першому етапі розраховується напружено-деформований стан бака. На другому етапі – в найбільш напруженому місці бака встановлюється тріщина і визначається коефіцієнт інтенсивності напружень. Для його розрахунку чисельно вирішується система чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь. Для розрахунку напружено-деформованого стану бака пропонується використовувати напіваналітичний метод скінченних елементів.

Ескіз несучої циліндричної оболонки бака ракети представлений на рис. 3.1. Усередині тонка циліндрична оболонка підкріплена стрінгерами і шпангоутами. До торцевих перетинах оболонки кріпляться днища баків, які є сферичними оболонками. Оболонка знаходиться під дією постійного внутрішнього тиску. Розглядається статична деформація конструкції. Оболонка є тонкою, тому зсуви не враховуються. Передбачається, що оболонка працює в області пружності, тобто напруження і деформації задовольняють закону Гука. Переміщення точок серединної поверхні оболонки малі. Тому деформації і переміщення задовольняють лінійним формулам Коші.

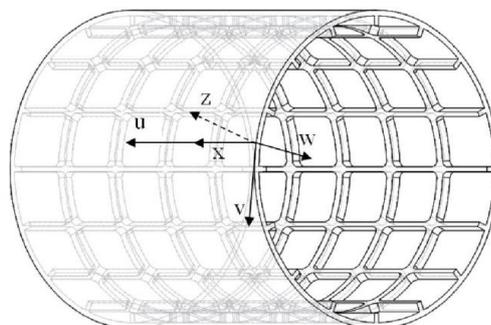


Рисунок 3.1 – Ескіз несучої циліндричної оболонки бака ракети
(u , v , w – переміщення відповідно до вісей x , y , z)

Несучий елемент бака – вафельна циліндрична оболонка – складається з осередків [43]. Для розрахунку руйнівних навантажень оболонки, тріщина розміщується посередині комірки в поздовжньому напрямку, тому що у окружному напрямку напруження максимальні. Передбачається, що розміри осередку значно більше розмірів тріщини. Тому збурення в НДС оболонки внаслідок тріщини згасають, не дійшовши до ділянок стрингера або шпангоута, що належать даній комірці. Внаслідок цього при розрахунку конструкції з тріщиною стрингери і шпангоути не розглядаються. Їх вплив враховано в доданих до берегів тріщини навантаженнях, які отримані з розрахунку НДС орєбрених баків ракет-носіїв.

3.2 Чисельний підхід до аналізу руйнування

Похід до розрахунку НДС орєбрених баків детально розглянуто в статті [2]. Тут розглядаються основні ідеї запропонованого підходу. Основними невідомими завдання є переміщення (u, v, w) серединної поверхні оболонки (див. рис. 3.1).

Переміщення точок серединної поверхні представляються у вигляді ряду Фур'є по окружній координаті оболонки φ :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \\ w_0(x) \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{N_G} \begin{bmatrix} u_n^{(c)}(x) \\ v_n^{(c)}(x) \\ w_n^{(c)}(x) \end{bmatrix} \cos n\varphi + \begin{bmatrix} u_n^{(s)}(x) \\ v_n^{(s)}(x) \\ w_n^{(s)}(x) \end{bmatrix} \sin n\varphi, \quad (3.1)$$

де x – поздовжня координата оболонки; $u_0(x), v_0(x), \dots, u_1^{(c)}(x), \dots$ – функції, що підлягають розрахунку методом скінченних елементів, який дозволяє привести континуальну задачу до дискретної.

Для цього в поздовжньому напрямку розіб'ємо конструкцію на N ділянок. Кінці цих ділянок є точками, в яких задаються невідомі значення

функцій $u_0(x), v_0(x), \dots, u_1^{(c)}(x), \dots$. Ці точки мають наступні координати x_i ; $i = \overline{0, N}$. Таким чином, множина неперервних функцій замінюється множиною точковими функцій. Значення в дискретних наборах точок об'єднуються в вектора таким чином:

$$U_{j-2+i}^{(1)} = \left[u_{j-2+i}^{(0)} v_{j-2+i}^{(0)} w_{j-2+i}^{(0)} u_{j-2+i}^{(c,v)} u_{j-2+i}^{(s,v)} v_{j-2+i}^{(c,v)} v_{j-2+i}^{(s,v)} w_{j-2+i}^{(c,v)} w_{j-2+i}^{(s,v)} \right]^T \quad (3.2)$$

$$j = 1, N; \quad i = 1, 2.$$

На кожній з ділянок $[x_{j-1}; x_j]$ вводиться локальна координата $\xi \in [-1, 1]$. Дотримуючись методу скінченних елементів, невідомі функції з (3.1) представимо, використовуючи поліноми Ерміта [61]:

$$U_0(x) = \sum_{i=1}^2 \bar{N}_i(\xi) U_{j-2+i}^{(1)} + \sum_{i=1}^2 \bar{N}_i^*(\xi) \Theta_{j-2+i} 0,5(x_j - x_{j-1}), \quad (3.3)$$

де $\Theta_{j-2+i} = \left[\varphi_{j-2+i}^{(0)} \quad \varphi_{j-2+i}^{(0)} \quad \theta_{j-2+i}^{(0)} \quad \varphi_{j-2+i}^{(c,v)} \quad \varphi_{j-2+i}^{(s,v)} \quad \psi_{j-2+i}^{(c,v)} \quad \psi_{j-2+i}^{(s,v)} \quad \theta_{j-2+i}^{(c,v)} \quad \theta_{j-2+i}^{(s,v)} \right]^T$ – вектор з похідних по x від елементів вектору $U_{j-2+i}^{(1)}$; $U_0 = \left[u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad u_v^{(c)} \quad u_v^{(s)} \quad v_v^{(c)} \quad v_v^{(s)} \quad w_v^{(c)} \quad w_v^{(s)} \right]^T$. Літерами φ , ψ , θ позначаються узагальнені кути повороту в вузлах скінченного елемента.

Функції $\bar{N}_i(\xi)$; $\bar{N}_i^*(\xi)$ є поліномами Ерміта третього порядку. Всі невідомі задачі об'єднуються в один вектор глобальних невідомих задач:

$$\left(z_{glob} \right) = \left[y_1^{(0)}, y_{2,1}^{(0)}, \dots, y_{2N_G}^{(c)}; y_{3,1}^{(0)}, \dots, y_{3N_G}^{(0)}; y_1^{(1)}, y_{2,1}^{(1)}, \dots, y_{2N_G}^{(1)}; y_{3,1}^{(1)}, \dots, y_{3N_G}^{(1)}; \right. \\ \left. y_1^{(N)}, y_{2,1}^{(N)}, \dots, y_{2N_G}^{(N)}; y_{3,1}^{(N)}, \dots, y_{3N_G}^{(N)} \right], \quad (3.4)$$

де $y_1^{(j)} = \left[u_j^{(0)} \quad \varphi_j^{(0)} \quad v_j^{(0)} \quad \psi_j^{(0)} \quad w_j^{(0)} \quad \theta_j^{(0)} \right]$; $y_{2,v}^{(j)} = \left[u_j^{(c,v)} \quad \varphi_j^{(c,v)} \quad v_j^{(c,v)} \quad \psi_j^{(c,v)} \quad w_j^{(c,v)} \quad \theta_j^{(c,v)} \right]$;

$$y_{3,v}^{(j)} = \left[u_j^{(s,v)} \quad \varphi_j^{(s,v)} \quad v_j^{(s,v)} \quad \psi_j^{(s,v)} \quad w_j^{(s,v)} \quad \theta_j^{(s,v)} \right].$$

На наступному кроці використовується метод Релея і розкладання (3.2) вводиться у функціонал потенційної енергії. Після проведення необхідних інтегрування і розрахунку похідних, отримується роздільна система лінійних алгебраїчних рівнянь в такому вигляді:

$$[K](z_{glob}) = (F), \quad (3.5)$$

де (F) – глобальний вектор вузлових навантажень.

За результатами розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.5) розраховується НДС бака. За результатами розрахунку НДС знаходиться найбільш навантажена зона оболонки. Посередині цієї зони в оболонку включаться магістральна тріщина в поздовжньому напрямку.

Деформування оболонки з тріщиною описується теорією пологих оболонок. Тоді використовується система рівнянь в частинних похідних відносно поперечного переміщення w і функції напружень φ :

$$\Delta\Delta\varphi + \frac{Eh^2}{R} \frac{\partial^2}{\partial y^2} w = 0; \quad \Delta\Delta w - \frac{I^2}{RD} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi = 0, \quad (3.6)$$

де E – модуль Юнга; h – товщина оболонки; $R = \min(R_1, R_2)$ – головні кривизни серединної поверхні оболонки; D – циліндрична жорсткість оболонки; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $y = \varphi R$.

Як зазначалося вище, в зоні оболонки, де розміщується тріщина, попередньо розраховується НДС і питомі силові фактори. Знайдені силові фактори позначаються у формі:

$$T_y(\tilde{x}, \tilde{y}), T_x(\tilde{x}, \tilde{y}), S(\tilde{x}, \tilde{y}), G_y(\tilde{x}, \tilde{y}), G_x(\tilde{x}, \tilde{y}), Q_y(\tilde{x}, \tilde{y}), Q_x(\tilde{x}, \tilde{y}), \quad (3.7)$$

де (\tilde{x}, \tilde{y}) – координати центральної точки розрізу (тріщини); T_x, T_y – питомі поздовжні зусилля уздовж осей x і y ; S – питомі зсувні зусилля; G_y, G_x – питомі згинальні моменти; Q_y, Q_x – питомі поперечні сили.

Граничні умови на верхній і нижній сторонах тріщини представляються у виді:

$$T_y^+(x,0) = T_y^-(x,0) = f_1; \quad (3.7)$$

$$S_y^+(x,0) = S_y^-(x,0) = f_2; \quad (3.8)$$

$$G_y^+(x,0) = G_y^-(x,0) = f_3; \quad (3.9)$$

$$Q_y^+(x,0) = Q_y^-(x,0) = f_4 \quad (3.10)$$

$$y = 0; \quad |x| \leq 1,$$

де знаки плюс і мінус позначають, що гранична умова належить верхній і нижній сторонам тріщини (рис. 3.2), відповідно; f_1, \dots, f_4 – деякі числа.

Граничні умови записані для тріщини одиничної довжини.

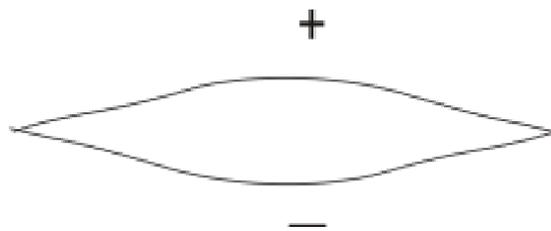


Рисунок 3.2 – Ескіз тріщини в оболонці

Розглядається крихке руйнування оболонки з тріщиною. Дослідження зводиться до визначення коефіцієнта інтенсивності напружень. Знаючи коефіцієнт інтенсивності напружень, легко знаходиться ПДВ в околиці тріщини і параметри початку руйнування конструкції. Для розрахунку коефіцієнта інтенсивності напружень система диференціальних рівнянь (3.6) з граничними умовами (3.5) зводиться до такої системи чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь [70]:

$$q \sum_{k=1}^4 \int_{-1}^1 \psi'_k(t) K_{jk}(t-x) dt = \pi F'_j(x) + C \delta_{4j}; \quad j=1, \dots, 4, \quad (3.11)$$

де $c_1, c_2 = \frac{I}{l^2 \delta}$; $c_3 = \frac{D}{l^2}$; $c_4 = \frac{D}{l^3}$; $\delta = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2}$; $F'_4(x) = \frac{f_4}{c_4} x$; $F'_j(x) = \frac{f_j}{c_j}$; $j = \overline{1, 3}$;

δ_{4j} – символ Кронекера; C – константа інтегрування; $\psi'_k(t)$ – шукані функції; $K_{jk}(t-x)$ – ядра системи сингулярних рівнянь.

Подання цих ядер через невласні інтеграли і в спеціальних функціях опубліковано в монографії [52]. Ядра представляються в такому вигляді:

$$K_{jk}(x) = \frac{\tilde{a}_j}{x} \delta_{jk} + \lambda k_{jk}(\lambda, x), \quad (3.12)$$

де $\tilde{a}_1 = -\tilde{a}_2 = -\frac{1}{2}$; $\tilde{a}_3 = \tilde{a}_4 = \frac{(1-\nu)(3+\nu)}{2}$.

Із цього уявлення видно, що ядра з номерами $j=k$ є сингулярними. Решта ядер цієї властивості не мають. До системи сингулярних рівнянь (3.11) застосовується заміна змінних:

$$\psi'_k(x) = \frac{\varphi_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (3.13)$$

Заміну змінних (3.13) і співвідношення (3.12) вводяться у систему сингулярних інтегральних рівнянь (3.11). В результаті отримується така система інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_j \int_{-1}^1 \frac{\varphi_j(t) dt}{\sqrt{1-t^2}(t-x)} + \lambda \sum_{k=1}^4 \int_{-1}^1 \frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} k_{jk}[\lambda(t-x)] dt = \\ = \pi F'_j(x) + C \delta_{4j}; \quad j=1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Як випливає з (3.12), деякі з ядер $k_{jk}[\lambda(t-x)]$ є нульовими. Тому система сингулярних інтегральних рівнянь (3.14) розпадається на дві незалежні системи сингулярних інтегральних рівнянь. У першій системі, як невідомі виступають функції $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, а у другій – невідомі $\varphi_3(t)$, $\varphi_4(t)$, C . Перша система описує симетричну деформацію оболонки біля тріщини, а друга система – антисиметричну деформацію.

З властивостей здобутих розв'язків сингулярних інтегральних рівнянь випливає, що виконуються такі співвідношення:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0; \quad j = \overline{1,4}. \quad (3.15)$$

У монографії [52] показано, що виконується ще одне додаткове рівняння:

$$\int_{-1}^1 \frac{t\varphi_4(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0. \quad (3.16)$$

Наступним кроком будується дискретний аналог системи сингулярних інтегральних рівнянь, який є системою лінійних алгебраїчних рівнянь. Для цього використовуються такі квадратурні формули [52]:

$$\int_{-1}^1 \frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}(t-\tilde{x}_r)} dt = \sum_{m=1}^M \frac{\pi u(t_m)}{M(t_m-\tilde{x}_r)}; \quad (3.17)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sum_{m=1}^M \frac{\pi u(t_m)}{M}, \quad (3.18)$$

$$\tilde{x}_r = \cos\left(\frac{\pi r}{M}\right); \quad r = 1, \dots, M-1, \quad (3.19)$$

$$t_m = \cos\left(\frac{2m-1}{2M}\pi\right); \quad m = 1, \dots, M. \quad (3.20)$$

Квадратурні формули (3.17)–(3.20) застосовуються до системи сингулярних інтегральних рівнянь (3.14) з обмеженнями (3.15), (3.16). Тоді симетрична деформація оболонки описується такою системою лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \frac{\varphi_i(t_m)}{t_m - \tilde{x}_r} + \lambda \sum_{m=1}^M \varphi_i(t_m) k_{11} [\lambda(t_m - \tilde{x}_r)] + \\ \quad + \lambda \sum_{m=1}^M \varphi_3(t_m) k_{13} [\lambda(t_m - \tilde{x}_r)] = \frac{M}{c_1} f_1; \\ \frac{(1-\nu)(3+\nu)}{2} \sum_{m=1}^M \frac{\varphi_3(t_m)}{t_m - \tilde{x}_r} + \lambda \sum_{m=1}^M \varphi_1(t_m) k_{31} [\lambda(t_m - \tilde{x}_r)] + \\ \quad + \lambda \sum_{m=1}^M \varphi_3(t_m) k_{33} [\lambda(t_m - \tilde{x}_r)] - C = \frac{M}{c_1} f_3; \\ \quad \quad \quad r = 1, \dots, M-1; \\ \quad \quad \quad \sum_{m=1}^M \varphi_j(t_m) = 0; \quad j = 1, 3. \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Антисиметрична деформація оболонки поблизу тріщини описується такою системою лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \frac{\varphi_2(t_m)}{t_m - \tilde{x}_r} + \lambda \sum_{m=1}^M \varphi_2(t_m) k_{22} [\lambda(t_m - \tilde{x}_r)] + \\ \quad + \lambda \sum_{m=1}^M \varphi_4(t_m) k_{24} [\lambda(t_m - \tilde{x}_r)] = \frac{M}{c_2} f_2; \\ \frac{(1-\nu)(3+\nu)}{2} \sum_{m=1}^M \frac{\varphi_4(t_m)}{t_m - \tilde{x}_r} + \lambda \sum_{m=1}^M \varphi_2(t_m) k_{31} [\lambda(t_m - \tilde{x}_r)] + \\ \quad + \lambda \sum_{m=1}^M \varphi_4(t_m) k_{44} [\lambda(t_m - \tilde{x}_r)] - C = \frac{M}{c_4} f_4 \tilde{x}_r; \\ \quad \quad \quad \sum_{m=1}^M \varphi_j(t_m) = 0; \quad j = 2, 4; \\ \quad \quad \quad \sum_{m=1}^M t_m \varphi_4(t_m) = 0. \end{array} \right. \quad (3.22)$$

В результаті розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь отримуємо невідомі системи (3.14) у вигляді точкових функцій:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t_1), \dots, \varphi_1(t_m), \varphi_2(t_1), \dots, \varphi_2(t_m), \\ \varphi_3(t_1), \dots, \varphi_3(t_m), \varphi_4(t_1), \dots, \varphi_4(t_m). \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

На підставі рішень (3.23) визначається коефіцієнт інтенсивності напружень. Для цього використовуються такі співвідношення:

$$K_j = -\tilde{a}_j b_j c_j \sqrt{I} \varphi_j(t_1); \quad j = \overline{1,4}, \quad (3.24)$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = 1; \quad b_4 = 1. \quad (3.25)$$

Для розрахунку руйнівних навантажень використовується силовий критерій Дж. Р. Ірвіна [53].

3.3 Чисельний аналіз коефіцієнтів інтенсивності напружень

Для скінченно-елементного розрахунку НДС баків ракети-носія розроблений пакет програм в середовищі Borland Delphi 6. Розглянуто циліндричну оболонку радіусом $R = 1$ м і товщиною $h = 0,01$ м. Коефіцієнт Пуассона і модуль Юнга для цієї оболонки: $\nu = 0,3$; $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па. На краях тріщини діють питомі силові фактори: $T_y = -2 \cdot 10^6$ Па \times м; $G_y = Q_y = 0$. Довжина тріщини приймалася рівною $l = 0,01$ м.

В роботі [70] представлені асимптотичні формули для коефіцієнтів інтенсивності напружень даної оболонки:

$$\begin{aligned}
K_i = -T_y \sqrt{I} \left\{ 1 + \frac{5\pi}{64} \lambda^2 + \frac{\lambda^4}{40960} \left\{ 250\pi^2 + 2361 + \right. \right. \\
\left. \left. + 20 \left[189 + \frac{2(1+5\nu)(17+133\nu)}{3(1-\nu)(3+\nu)} \right] \ln \frac{\lambda\gamma_0}{8} + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{20(7+59\nu)(5+37\nu)}{9(1-\nu)(3+\nu)} + \frac{160(1+5\nu)^2}{(1-\nu)(3+\nu)} \ln^2 \frac{\lambda\gamma_0}{8} \right\} \right\} + O(\lambda^6 \ln \lambda) \dots, \quad (3.26)
\end{aligned}$$

де $\ln \gamma_0 = -0,5772$ – постійна Ейлера.

Результати розрахунку коефіцієнта інтенсивності напружень для симетричного деформування оболонки представлені у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Результати розрахунку коефіцієнта інтенсивності напружень для симетричного деформування оболонки

| l | M | $K_1^{(розрах)}$ | $K_1^{(асимп)}$ | δ |
|-------|-----|--------------------|--------------------|----------|
| 0,01 | 20 | $2,65 \times 10^5$ | $2,02 \times 10^5$ | 0,24 |
| 0,01 | 25 | $3,45 \times 10^5$ | | |
| 0,002 | 20 | $1,10 \times 10^5$ | $8,95 \times 10^4$ | 0,23 |

В останньому стовпці таблиці 3.1 представлена відносна різниця результатів, яка визначається за таким співвідношенням:

$$\delta = \left| \frac{K_1^{(розрах)} - K_1^{(асимп)}}{K_1^{(розрах)}} \right|. \quad (3.19)$$

Отже, результати, які отримані двома різними методами, достатньо добре корелюються.

3.4 Висновок

У розділі запропоновано загальний підхід до розрахунку руйнування баків ракет-носіїв. В основу цього підходу покладено поєднання методу скінченних елементів з елементами механіки руйнування. Для розрахунку напружено-деформованого стану в околі тріщини визначені коефіцієнти інтенсивності напружень, які визначаються з розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь.

РОЗДІЛ 4

РОЗВИТОК І ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПОЧАТКОВИХ ПАРАМЕТРІВ У МАТРИЧНІЙ ФОРМІ СТОСОВНО СТІЙКОСТІ ДИСКРЕТНО ПІДКРІПЛЕНИХ ПРОМІЖНИМИ ШПАНГОУТАМИ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ ТИПУ «ЦИЛІНДР-КОНУС» ПРИ КОМБІНОВАНОМУ СТАТИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

У четвертому розділі отримав розвиток і застосування метод початкових параметрів у матричній формі стосовно стійкості дискретно підкріплених проміжними шпангоутами оболонкових конструкцій типу «циліндр-конус» при комбінованому статичному навантаженні. Особлива увага приділена дослідженню впливу жорсткості шпангоутів з площини початкової кривизни та локальним і загальним формам випинання складеної оболонкової конструкції з метою раціонального її проектування.

4.1 Постановка задачі стійкості складеної оболонкової конструкції із стінками постійної товщини типу «циліндр-конус»

Розглядається пружна оболонкова конструкція кругового перерізу постійної товщини h , підкріплена шпангоутами (рис. 4.1). Розв'язується задача стійкості конструкції, що знаходиться в умовах комбінованого навантаження зовнішнім тиском q , осьовим стисканням силою T та крутильним моментом M . При цьому передбачається, що проміжні шпангоути мають жорсткість на згин, як в площині початкової кривизни, так і жорсткість з площини початкової кривизни.

Передбачається, що переважною є деформація окружного напрямку, а хвилеутворення по довжині оболонки виражене набагато слабкіше, ніж в окружному.

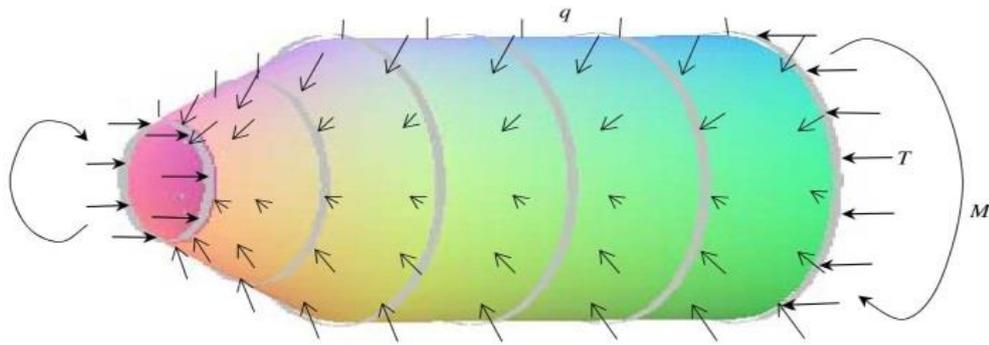


Рисунок 4.1 – Схема навантаження підкріпленої оболонкової конструкції (q , T , M – навантаження відповідно зовнішнім тиском, осьовими зусиллями та крутильним моментом)

Що стосується циліндричного відсіку конструкції «циліндр-конус», диференціальне рівняння її стійкості за «півмоментною» теорією оболонок середньої довжини відносно функції радіальних переміщень $w_{cyl}(\bar{s}, y)$ точок серединної поверхні за умови $\sqrt{\frac{h}{R}} < \frac{L}{R} < \sqrt{\frac{R}{h}}$ має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^8 w_{cyl} + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w_{cyl}}{\partial \bar{s}^4} + p_x \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w_{cyl}}{\partial \bar{s}^2} \right) + \\ + p_y \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w_{cyl}}{\partial y^2} \right) + 2p_{xy} \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w_{cyl}}{\partial \bar{s} \partial y} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

де $p_x = \frac{T}{Rh}$, $p_y = q \frac{R}{h}$, $p_{xy} = -\frac{M}{2\pi h R^2}$, $\bar{x} = \frac{\bar{s}}{L}$, $\bar{\varphi} = \frac{y}{R}$, $\eta_{cyl} = \frac{T}{Eh^2}$, $\chi_{cyl} = \frac{qR^2}{Eh^2}$,
 $\lambda_{cyl} = \frac{M}{2\pi ERh^2}$.

Функція радіальних переміщень береться у формі:

$$w_{cyl}(\bar{x}, \bar{\varphi}) = W_{cyl}(\bar{x}) \cdot \cos(\gamma_{cyl}(1 - \bar{x}) + n\bar{\varphi}), \quad (4.2)$$

де $\gamma_{cyl} = \frac{nL}{R} \gamma_1$, γ_1 – тангенс кута нахилу гребня хвилі до твірної. Перетворене рівняння (4.1) з урахуванням (4.2) інтегрується за координатою $\bar{\varphi}$ методом

Бубнова-Гальоркіна від 0 до 2π . В результаті, для тонких оболонок середньої довжини зі значеннями $K^2 > 1$, $n^2 \gg 1$, $\varepsilon_1 \ll 1$ диференціальне рівняння основного напруженого стану відносно функції прогину циліндричної оболонки отримає вид:

$$aW_{cyl}^{(4)}(\bar{x}) + bW_{cyl}''(\bar{x}) + cW_{cyl}(\bar{x}) = 0, \quad (4.3)$$

$$\text{де } a = K^{-4} \left[-10\gamma_1 \lambda_{cyl} - (15\gamma_1^2 + 2)\eta_{cyl} - \chi_{cyl} + 2n^2 \varepsilon_1 \omega^{-1} (35\gamma_1^4 + 30\gamma_{cyl}^2 + 3) + \varepsilon_1^{-1} n^{-2} \right],$$

$$b = n^2 K^{-2} \left[4\gamma_1 (5\gamma_1^3 + 3)\lambda_{cyl} + (12\gamma_1^2 + 15\gamma_1^4 + 1)\eta_{cyl} + 2(3\gamma_1^2 + 1)\chi_{cyl} - 4\varepsilon_1 n^2 \omega^{-1} (7\gamma_1^6 + 15\gamma_1^4 + 9\gamma_1^2 + 1) - 6\gamma_1^2 \varepsilon_1^{-1} n^{-2} \right],$$

$$c = -n^4 (\gamma_1^2 + 1)^2 \left[2\gamma_1 \lambda_{cyl} + \gamma_1^2 \eta_{cyl} + \chi_{cyl} - n^6 \varepsilon_1 \omega^{-1} (\gamma_1^2 + 1)^2 \right] + n^2 \gamma_1^4 \varepsilon_1^{-1},$$

$$K = \frac{L}{R}, \quad \varepsilon_1 = \frac{h}{R}, \quad \omega = 12(1 - \nu^2).$$

Зазначені перетворення проведено за допомогою пакету комп'ютерної алгебри Maple (Додаток А).

Рівняння (4.3) є розв'язувальним для дослідження на стійкість циліндричного відсіку оболонки. Загальним розв'язком є функція:

$$W_{cyl}(\bar{x}) = W_{cyl}(\bar{x}_i) \psi_{cyl,1}(\bar{x}) + W'_{cyl}(\bar{x}_i) \psi_{cyl,2}(\bar{x}) + W''_{cyl}(\bar{x}_i) \psi_{cyl,3}(\bar{x}) + W'''_{cyl}(\bar{x}_i) \psi_{cyl,4}(\bar{x}), \quad (4.4)$$

$$\text{де } \bar{x} \in [\bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}], \quad k \in \{0, 1, \dots, m_{cyl}\}; \quad \psi_{cyl,1}(\bar{x}) = \frac{\beta_2^2 \text{ch } \beta_1 (\bar{x} - \bar{x}_k) + \beta_1^2 \cos \beta_2 (\bar{x} - \bar{x}_k)}{\beta_2^2 + \beta_1^2};$$

$$\psi_{cyl,2}(\bar{x}) = \frac{\beta_2^3 \text{sh } \beta_1 (\bar{x} - \bar{x}_k) + \beta_1^3 \sin \beta_2 (\bar{x} - \bar{x}_k)}{(\beta_2^2 + \beta_1^2) \beta_1 \beta_2}; \quad \psi_{cyl,3}(\bar{x}) = \frac{\text{ch } \beta_1 (\bar{x} - \bar{x}_k) - \cos \beta_2 (\bar{x} - \bar{x}_k)}{\beta_2^2 + \beta_1^2};$$

$$\psi_{cyl,4}(\bar{x}) = \frac{\beta_2 \text{sh } \beta_1 (\bar{x} - \bar{x}_k) - \beta_1 \sin \beta_2 (\bar{x} - \bar{x}_k)}{(\beta_2^2 + \beta_1^2) \beta_1 \beta_2}; \quad \beta_{1,2} = \sqrt{\frac{\mp b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Матричне рівняння відсіку циліндричної оболонки в точках $\bar{x} \in [\bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}]$, $k \in \{0, 1, \dots, m_{cyl}\}$ подається у вигляді:

$$\begin{pmatrix} W_{cyl}(\bar{x}) \\ W'_{cyl}(\bar{x}) \\ W''_{cyl}(\bar{x}) \\ W'''_{cyl}(\bar{x}) \end{pmatrix} = A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x}) \cdot \begin{pmatrix} W_{cyl}(\bar{x}_i) \\ W'_{cyl}(\bar{x}_i) \\ W''_{cyl}(\bar{x}_i) \\ W'''_{cyl}(\bar{x}_i) \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

$$\text{де } A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x}) = \begin{pmatrix} \psi_{cyl,1} & \psi_{cyl,2} & \psi_{cyl,3} & \psi_{cyl,4} \\ \psi'_{cyl,1} & \psi'_{cyl,2} & \psi'_{cyl,3} & \psi'_{cyl,4} \\ \psi''_{cyl,1} & \psi''_{cyl,2} & \psi''_{cyl,3} & \psi''_{cyl,4} \\ \psi'''_{cyl,1} & \psi'''_{cyl,2} & \psi'''_{cyl,3} & \psi'''_{cyl,4} \end{pmatrix}.$$

Матриця $A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x})$ є нормальною фундаментальною з властивістю $A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x}_k) = \Xi$, де Ξ – одинична матриця. Зауважимо, що матриці $A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x}_{k+1})$ рівні для відсіків однакової довжини. Для такої матриці використовується позначення $A_{cyl}(\bar{L}_k) = A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x}_{k+1})$, де $\bar{L}_k = \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k$.

4.2 Матриця перетворення напружено-деформованого стану підкріпленого шпангоутами кінцевого відсіку із стінками постійної товщини

Для кінцевого відсіку оболонкової конструкції вводяться позначення: α – кут при основі конуса, s – відстань вздовж твірної конуса від вершини до точки серединної поверхні, l_0 і l_1 – відстані до меншої та більшої основ зрізаного конуса, $x = \frac{s}{l_1}$, φ – кут між аксіальною площиною і площиною

відліку. Припускається, що i -й відсік характеризується координатою $x \in [x_i; x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, m_{cone}$).

Аналогічно функція радіальних переміщень і функція зусиль подаються у вигляді:

$$w_{cone}(x, \varphi) = W_{cone}(x) \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos(\gamma_{cone}(1-x) + n\varphi); \quad (4.6)$$

$$f_{cone}(x, \varphi) = \Phi_{cone}(x) \varepsilon^2 l_1 E h \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos(\gamma_{cone}(1-x) + n\varphi), \quad (4.7)$$

$$\text{де } \varepsilon = \sqrt{\frac{h \operatorname{ctg} \alpha}{l_1 \sqrt{12(1-\nu^2)}}}, \quad \gamma_{cone} = \frac{n}{\cos \alpha} \gamma_1.$$

Після введення безрозмірних параметрів $\delta = \frac{n^2}{\cos^2 \alpha}$, $p = \varepsilon \delta$ та безрозмірних зусиль

$$\chi_{cone} = \frac{q^* l_1}{E h \varepsilon^3 \operatorname{tg}^3 \alpha}, \quad \eta_{cone} = \frac{T \cos \alpha}{2\pi E h \varepsilon^2 l_1 \sin^3 \alpha}, \quad \lambda = \frac{M}{2\pi l_1^2 E h \varepsilon^{5/2} \sin^2 \alpha}, \quad (4.8)$$

де $q^* = q \cdot \sin \alpha$.

Після ряду перетворень отримано розв'язувальне звичайне диференціальне рівняння четвертого порядку відносно функції прогину $W_{cone}(x)$, що дозволяє досліджувати стійкість конічної оболонки, у формі [25]:

$$W_{cone}^{IV} + \frac{6}{x} W_{cone}''' + \left(\frac{6}{x^2} - 2\gamma_{cone}^2 + \frac{\eta_{cone} p^2}{x^3} \right) W_{cone}'' - \frac{6\gamma_{cone}^2}{x} W_{cone}' - Q_0(x) W_{cone} = 0, \quad (4.9)$$

$$\text{де } Q_0(x) = \frac{\eta_{cone} p^2 \gamma_{cone}^2}{x^3} + \frac{\chi_{cone} p^3}{x^3} + \frac{\lambda_{cone} \gamma_{cone} p^{5/2}}{x^5} - \frac{p^4}{x^6} + 6 \frac{\gamma_{cone}^2}{x^2} - \gamma_{cone}^4.$$

Для розв'язання рівняння (4.9) застосовується метод фазних інтегралів (метод ВКБ) та гібридний ВКБ-Гальоркін підхід.

Оскільки $n^2 \gg 1$, то δ є великим параметром, розв'язок рівняння (4.9) подається у вигляді [25]:

$$W_{cone}(x) = \sum_{j=1}^4 C_j^{WKB} \psi_{cone,j}^{WKB}(x), \quad (4.10)$$

де $\psi_{cone,1}^{WKB}(x) = \text{sh } S_1(x)$, $\psi_{cone,2}^{WKB}(x) = \text{ch } S_1(x)$, $\psi_{cone,3}^{WKB}(x) = \sin S_2(x)$,

$$\psi_{cone,4}^{WKB}(x) = \cos S_4(x); \quad S_j(x) = \delta \int_{x_i}^x F_j(t) dt, \quad j=1,2.$$

Розв'язок рівняння (4.9) за гібридним ВКБ-Гальоркін методом, який є ефективним як для «малих», так і «великих» параметрів розвинення, має вигляд:

$$W_{cone}(x) = \sum_{j=1}^4 C_j^{Hybr} \psi_{cone,j}^{Hybr}(x), \quad (4.11)$$

де $\psi_{cone,1}^{Hybr}(x) = e^{\Lambda_1 S_1(x)}$, $\psi_{cone,2}^{Hybr}(x) = e^{\Lambda_2 S_1(x)}$, $\psi_{cone,3}^{Hybr}(x) = e^{\xi S_1(x)} \sin \zeta S_1(x)$,

$$\psi_{cone,4}^{Hybr}(x) = e^{\xi S_1(x)} \cos \zeta S_1(x).$$

Розв'язок може бути знайдений зазначеними методами для навантажень, що задовольняють нерівність

$$\chi_{cone} > \frac{p}{x^3} - \frac{\eta_{cone} \gamma^2}{p} - \frac{\lambda_{cone} \gamma_{cone}}{x^2 \sqrt{p}} - 6 \frac{\gamma_{cone}^2 x}{p^3} + \frac{\gamma_{cone}^4 x^3}{p^3} \quad (4.12)$$

для всіх $x \in [x_i; x_{i+1}]$.

У кожному з розв'язків (4.10) або (4.11) матричне рівняння відсіку конічної оболонки можна записати аналогічно $A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x})$ із співвідношень (4.5) на базі фундаментальних функцій і їх похідних. Необхідно зазначити, що отримана таким чином фундаментальна матриця $A_{cone}(x_i, x)$, не є нормальною.

Матриця, що характеризує перетворення напружено-деформованого стану циліндричної оболонки при переході через проміжний k -й шпангоут, береться у вигляді [60] (Додаток Б):

$$B_{cyl,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & G_{cyl,2}^k & 1 & 0 \\ -G_{cyl,1}^k & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

де $G_{cyl,1}^k = \frac{n^4(n^2-1)^2(EJ)_{xk}}{CR^3}$, $G_{cyl,2}^k = \frac{n^2(n^2-1)^2(EJ)_{zk}}{C(n^2+1)R^3}$ – безрозмірні жорсткості

k -го шпангоута на циліндричній оболонці, а J_{xk} , J_{zk} – моменти інерції відповідно при згині шпангоута в площині початкової кривизни і з площини.

Матриця перетворення напружено-деформованого стану при переході через i -й шпангоут, розташований на конічній оболонці має вигляд,

аналогічний (4.13), в якому $G_{cone,1}^i = \frac{n^4(n^2-1)^2(EJ)_{xi}r_0}{Cr_i^4 \cos^3 \alpha}$, $G_{cone,2}^i = \frac{n^2(n^2-1)^2(EJ)_{zi}r_0}{C(n^2+1)r_i^4}$ –

безрозмірні жорсткості i -го шпангоута радіусу r_i , що підкріплює конічну оболонку, r_0 – радіус меншої основи зрізаного конуса.

Для j -го відсіку циліндричної або конічної оболонки $[x_j, x_{j+1}]$ ($j \in \{0, 1, \dots, m\}$) з матрицею A_j і $(j+1)$ -й шпангоут, що відповідає координаті x_{j+1} , з матрицею B_{j+1} має місце зв'язок між векторами переміщень і їх похідними справа і зліва від $(j+1)$ -го шпангоута.

Нормальна фундаментальна матриця має властивість зсуву. Тому, з урахуванням (4.13), матриця-добуток ([26], а також див. Додаток А)

$$H = A_m \cdot B_m \cdot A_{m-1} \cdot B_{m-1} \cdot \dots \cdot B_2 \cdot A_1 \cdot B_1 \cdot A_0 \quad (4.14)$$

задає зміну напружено-деформованого стану відсіку конструкції, що містить m шпангоутів. У добутку матриць, поданих в співвідношенні (4.14), $A_i = A_{cyl}(\bar{L}_i)$ ($i = 0, \dots, m_{cyl}$) є матрицею, зокрема циліндричного відсіку оболонки. У випадку, коли шпангоут знаходиться на торці, відповідна матриця, передуюча або безпосередньо наступна за шпангоутом, вибирається для оболонки нульової довжини з відповідною крайовою умовою вільного торця.

Оскільки фундаментальна матриця конічної оболонки постійної товщини не має властивості нормальності, то для сполучення її відсіків або сполучення конічної частини конструкції з циліндричною складається рівняння, яке задає рівність нормальних переміщень і їх похідних в суміжних точках прогонів. У випадку конічного відсіку лінійно змінної товщини застосовується алгоритм множення відповідних матриць для конструкції в цілому.

4.3 Характеристичне рівняння для визначення критичних навантажень оболонкової конструкції зі стінками постійної товщини

Характеристичне рівняння для визначення критичних навантажень оболонкової конструкції має вигляд визначника блокової матриці. Наприклад, у випадку, коли конструкція містить не більше одного шпангоута, закріпленого на більшій основі конічної частини конструкції, характеристичне рівняння має вигляд:

$$\det \begin{pmatrix} H_{cone}^{(2)}(x_0, x_0) & \Theta^{(2)} \\ \Theta^{(2)} & H_{cyl}^{(2)}(1) \\ H_{cone}^{(4)}(x_0, 1) & H_{cyl}^{(4)}(0) \end{pmatrix} = 0. \quad (4.15)$$

Тут Θ – нульова матриця, $H_{cone}(x_0, x)$ и $H_{cyl}(\bar{x})$ – матриці конічної і циліндричної частини відповідно. Верхній індекс «(4)» означає, що матрицю у відповідній точці слід брати повною, розмірності 4×4 , а індекс «(2)» припускає виділення з повної матриці двох її рядків, що відповідають граничним умовам на торці. Так, слід вибрати перший і третій рядки отриманої матриці у разі шарнірного закріплення відповідного торця, перший і другий – жорсткого затискання, третій і четвертий – вільного кінця.

У рівняння (4.15) необхідно підставити:

$$H_{cone}(x_0, x_0) = A_{cone}(x_0, x_0), \quad H_{cyl}(0) = A_{cyl}(0) = \Xi. \quad (4.16)$$

Якщо шпангоут розташований на більшій основі конічної оболонки, то $H_{cone}(x_0, 1) = B_{cone} A_{cone}(x_0, 1)$.

Необхідно зауважити, що у випадку, коли на конічній частині конструкції містяться шпангоути, розташовані в місцях, відмінних від більшої основи, то у цьому випадку характеристичне рівняння подається у вигляді:

$$\det \begin{pmatrix} H_{cone}^{(2)}(x_0, x_0) & \Theta^{(2)} & \Theta^{(2)} & \Theta^{(2)} \\ \Theta^{(2)} & \Theta^{(2)} & \Theta^{(2)} & H_{cyl}^{(2)}(1) \\ H_{cone}^{(4)}(x_0, x_1) & H_{cone}^{(4)}(x_1, x_1) & \Theta^{(4)} & \Theta^{(4)} \\ \Theta^{(4)} & H_{cone}^{(4)}(x_1, x_2) & H_{cone}^{(4)}(x_2, x_2) & \Theta^{(4)} \\ \Theta^{(4)} & \Theta^{(4)} & H_{cone}^{(4)}(x_2, 1) & H_{cyl}^{(4)}(0) \end{pmatrix} = 0. \quad (4.17)$$

У рівнянні (4.17) вважається $x_1 = x_0$ при використанні ВКБ-методу або $x_1 = x_0 + \xi$, де $\xi < 1$, для гібридного ВКБ-Гальоркін методу.

Для визначення критичного тиску підкріпленої або непідкріпленої циліндричної оболонки необхідно розв'язати характеристичне рівняння:

$$\det \begin{pmatrix} H_{cyl}^{(2)}(0) \\ H_{cyl}^{(2)}(1) \end{pmatrix} = 0. \quad (4.18)$$

Оскільки $H_{cyl}(0) = A_{cyl}(0) = \Xi$, то визначник матриці рівняння (4.18) перетвориться в мінор другого порядку.

Характеристичне рівняння невідкріпленої конічної оболонки має вигляд:

$$\det \begin{pmatrix} A_{cone}^{(2)}(x_0, x_0) \\ A_{cone}^{(2)}(x_0, 1) \end{pmatrix} = 0, \quad (4.19)$$

а відкріпленої – подається визначником блокової матриці. Наприклад, у випадку конічної оболонки, на якій розташовані два шпангоути на основах і один шпангоут – проміжний, це рівняння має вигляд:

$$\det \begin{pmatrix} H_{cone}^{(2)}(x_0, x_0) & \Theta^{(2)} & \Theta^{(2)} \\ \Theta^{(2)} & \Theta^{(2)} & H_{cone}^{(2)}(x_2, 1) \\ H_{cone}^{(4)}(x_0, x_1) & H_{cone}^{(4)}(x_1, x_1) & \Theta^{(4)} \\ \Theta^{(4)} & H_{cone}^{(4)}(x_1, x_2) & H_{cone}^{(4)}(x_2, x_2) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.20)$$

з позначеннями, аналогічними з (4.16) і (4.18).

У випадку, коли циліндричні відсіки вибираються постійної товщини, а конічні – лінійно-змінної, відповідні фундаментальні розв'язки отримуються у замкненому виді. Фундаментальні матриці як для циліндричної, так і для конічної оболонок, будуються так, щоб вони були нормальними, тому характеристичне рівняння для визначення критичних зусиль складеної оболонкової конструкції отримується виділенням відповідного мінору матриці після послідовного здобутку зазначених матриць з урахуванням заданих граничних умов. При цьому, визначення зміни напружено-деформованого

стану підкріплених складених оболонкових конструкцій, що вивчаються у роботі, не потребують складання рівнянь спряження.

4.4 Результати чисельної реалізації методики розрахунку стійкості складеної оболонкової конструкції типу «циліндр-конус»

Методика визначення параметрів однакової стійкості оболонкової конструкції типу «циліндр-конус», підкріпленої проміжними і крайовими шпангоутами, по відношенню до локальних і загальних форм випинання з визначенням жорсткості шпангоутів для забезпечення однакової стійкості конічної й циліндричної секцій комбінованої оболонки і відсіків між проміжними шпангоутами застосована на прикладі стійкості оболонкової конструкції складної геометричної конфігурації з характеристиками:

$h_0 = 0,2 \text{ см}$, $E = 7 \cdot 10^5 \frac{\text{кґ}}{\text{см}^2}$, $\nu = 0,32$. Конічна частина конструкції вибиралась з параметрами: $l_1 = 182 \text{ см}$, $l_0 = 0,65 l_1$, $\alpha = 75^\circ$, а циліндрична таким чином, щоб при $R_{\text{cyl}} = l_1 \cos \alpha \approx 47,1 \text{ см}$, $L = 2,5 R_{\text{cyl}}$ обидві частини мали однаковий критичний тиск $q_0 = 0,3187 \frac{\text{кґ}}{\text{см}^2}$. Жорсткості шпангоутів, розташованих на конічній оболонці, приймались у вигляді:

$$G_{\text{cone},1}^i = \frac{l_1^3 l_0}{l_i^4 \cos^3 \alpha} \cdot G_{1,i}^*, \quad G_{\text{cone},2}^i = \frac{l_1^3 l_0}{l_i^4} \cdot G_{2,i}^*, \quad (4.21)$$

$$\text{де } G_{1,i}^* = \frac{n^4 (n^2 - 1)^2 (EJ)_{xi}}{R^3 C \cos^3 \alpha}, \quad G_{2,i}^* = \frac{n^2 (n^2 - 1)^2 (EJ)_{zi}}{C (n^2 + \kappa_i) R^3}.$$

Досліджено конструкції, в яких конічна і циліндрична оболонки підкріплені шпангоутами з рівними значеннями параметра жорсткості

$G_{cyl,1}^k = G_{cyl,1}$, $G_{cyl,2}^k = G_{cyl,2}$, $G_{1,i}^* = G_{cone,1}^*$ і $G_{2,i}^* = G_{cone,2}^*$ для всіх k та i відповідно. Конструкція з вказаними вище параметрами вивчається в трьох випадках: шарнірно оперта на торцях з одним шпангоутом на більшій основі конуса і одним – на лівому торці циліндра, з двома торцевими шпангоутами на кожній частині і з трьома шпангоутами на кожній частині, два з яких розташовані на торцях, а один – посередині. У кожному з вказаних випадків, окремо для конічної і циліндричної частин, побудовані залежності безрозмірного критичного тиску $Q = \frac{q}{q_0}$ від параметрів жорсткості $G_{cone,1}^*$ і

$G_{cyl,1}$ відповідно для різних значень $G_{cone,2}^*$ та $G_{cyl,2}$.

Залежності, які наведені на рисунках 4.2, 4.3 (для конуса – штрихові лінії, для циліндра – суцільні), показують, що зі збільшенням жорсткості шпангоутів критичний тиск стабілізується, як для конічної, так і для циліндричної оболонок.

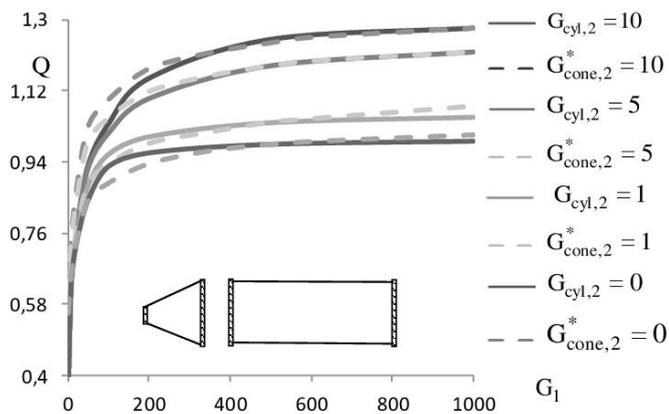


Рисунок 4.2 – Залежність критичного навантаження від параметру жорсткості шпангоутів (випадок торцевих шпангоутів)

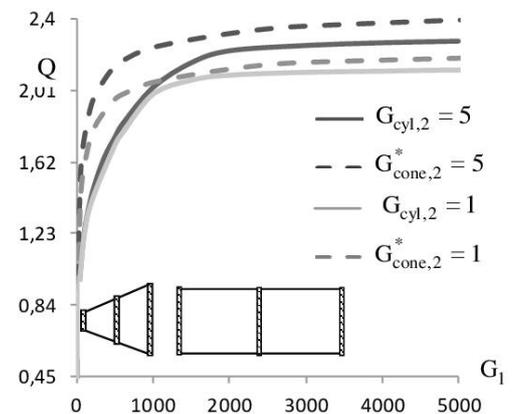


Рисунок 4.3 – Залежність критичного навантаження від параметру жорсткості шпангоутів (випадок наявності проміжних шпангоутів)

Відмічається, що загальна втрата стійкості непідкріпленої конструкції типу «циліндр-конус» з вибраними розмірами відбувається при тиску, який майже на 46% нижче тиску локальної втрати стійкості. Залежності для локальних форм випинання та вплив осевих стискаючих зусиль і крутного моменту наведені на рисунках 4.4, 4.5.

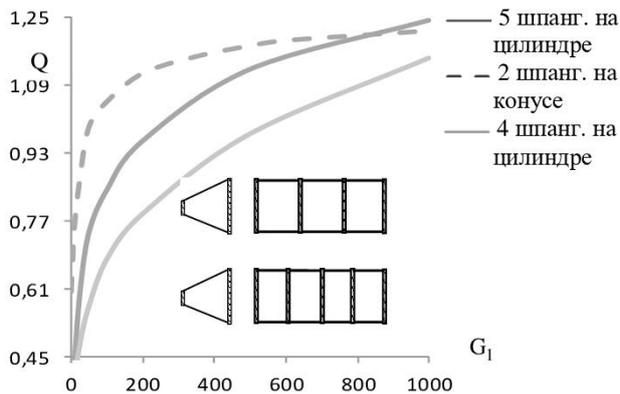


Рисунок 4.4 – Локальна втрата стійкості конічного та циліндричного відсіків, підкріплених шпангоутами відповідно до схем ($L = 2,5R_{cyl}$)

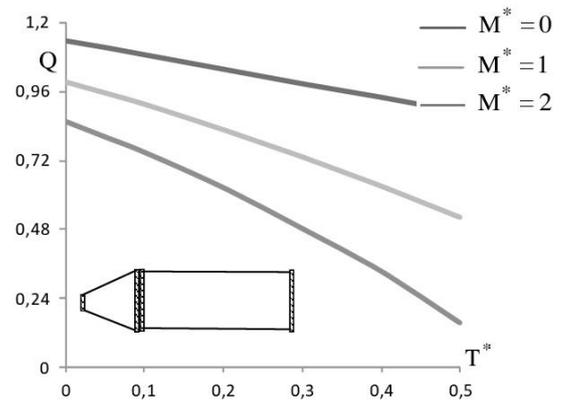


Рисунок 4.5 – Вплив осевого стискання та крутного моменту на критичний тиск складної конструкції ($L = 2,5R_{cyl}$)

4.5 Задача стійкості складеної підкріпленої оболонкової конструкції типу «циліндр-конус» з конічними відсіками лінійно-змінної товщини

Розглядається пружна оболонкова конструкція кругового перетину, підкріплена шпангоутами (рис. 4.6). У цьому підрозділі передбачається, що циліндричні відсіки конструкції мають однакову товщину h_{cyl} , а конічні – лінійно змінну $h_{cone} = h_{cone}^0 \frac{s}{l_0}$. Розглядається конструкція з однаковими механічними характеристиками відсіків. Вирішується задача стійкості складовою конструкції під дією зовнішнього тиску q .

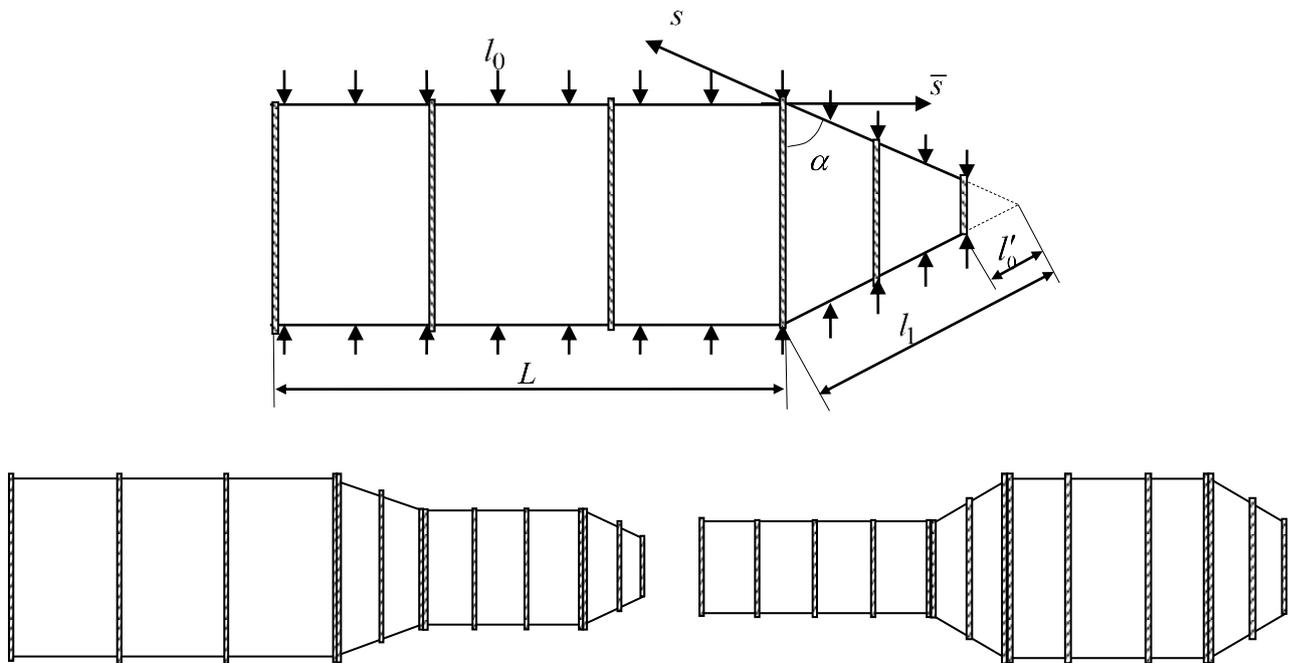


Рисунок 4.6 – Схеми оболонкових конструкцій (L, l_1 – відповідно довжина циліндричного та конічного відсіків; α – кут конусності, l_0 – довжина прольоту, \bar{s}, s – відповідно осьові координати на циліндричному і конічному відсіках, l'_0 – відстань від полюсу до меншої основи конічного відсіку)

Для конічного відсіку оболонки після ряду перетворень (в тому числі виключення досить малих доданків) в [16] отримано диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами щодо функції прогину $W_{cone}(x)$:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{d^2 W_{cone}}{dx^2} \right) + \left(\frac{p^4}{x^3} - \chi_{cone} p^3 \right) W_{cone} = 0. \quad (4.22)$$

З урахуванням лінійної залежності для товщини конічного прольоту оболонки, рівняння (4.22) набуде вигляду:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{d^2 W_{cone}}{dx^2} \right) - \frac{g}{x} W_{cone} = 0, \quad (4.23)$$

$$\text{де } g = q^* \frac{l_0 n^6}{E h_{cone}^0 \cos^3 \alpha \sin^3 \alpha} - \frac{h_{cone}^0 n^8}{12(1-\nu^2) l_0^2 \cos^6 \alpha \sin^2 \alpha}.$$

Рівняння (4.23) після заміни $x = e^t$ зводиться до рівняння:

$$\frac{d^4 W_{cone}}{dt^4} - \frac{d^2 W_{cone}}{dt^2} - g W_{cone} = 0 \quad (4.24)$$

з постійними коефіцієнтами. Таким чином, розв'язок рівняння (4.24) отримає вигляд:

$$W_{cone}(t) = W_{cone}(t_i) \psi_{cone,1}(t) + W'_{cone}(t_i) \psi_{cone,2}(t) + \\ + W''_{cone}(t_i) \psi_{cone,3}(t) + W'''_{cone}(t_i) \psi_{cone,4}(t), \quad (4.25)$$

де фундаментальні функції $\psi_{cone,j}(x)$, $j = \overline{1,4}$ подаються у вигляді, аналогічному до [60]:

$$\psi_{cone,1}(t) = \frac{\beta_2^2 \text{ch } \beta_1(t-t_i) + \beta_1^2 \cos \beta_2(t-t_i)}{\beta_2^2 + \beta_1^2}, \quad (4.26)$$

$$\psi_{cone,2}(t) = \frac{\beta_2^3 \text{sh } \beta_1(t-t_i) + \beta_1^3 \sin \beta_2(t-t_i)}{(\beta_2^2 + \beta_1^2) \beta_1 \beta_2}, \quad (4.27)$$

$$\psi_{cone,3}(t) = \frac{\text{ch } \beta_1(t-t_i) - \cos \beta_2(t-t_i)}{\beta_2^2 + \beta_1^2}, \quad (4.28)$$

$$\psi_{cone,4}(t) = \frac{\beta_2 \text{sh } \beta_1(t-t_i) - \beta_1 \sin \beta_2(t-t_i)}{(\beta_2^2 + \beta_1^2) \beta_1 \beta_2} \quad (4.29)$$

$$\text{де } \beta_1 = \sqrt{0,5 + \sqrt{0,25 + g}}, \quad \beta_2 = \sqrt{-0,5 + \sqrt{0,25 + g}},$$

при цьому матричне рівняння відсіку конічної оболонки має матрицю

$$A_{cone}(t_i, t) = \begin{pmatrix} \Psi_{cone,1} & \Psi_{cone,2} & \Psi_{cone,3} & \Psi_{cone,4} \\ \Psi'_{cone,1} & \Psi'_{cone,2} & \Psi'_{cone,3} & \Psi'_{cone,4} \\ \Psi''_{cone,1} & \Psi''_{cone,2} & \Psi''_{cone,3} & \Psi''_{cone,4} \\ \Psi'''_{cone,1} & \Psi'''_{cone,2} & \Psi'''_{cone,3} & \Psi'''_{cone,4} \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Якщо конічна оболонка має фіксоване значення кута конусності α , то матриці $A_{cone}(t_i, t_{i+1})$ рівні для її відсіків з однаковим значенням $t_i - t_{i+1} = \ln x_i / x_{i+1}$. Для такої матриці використовується позначення $A_{cone}(\xi_i) = A_{cone}(t_i, t_{i+1})$, де $\xi_i = \ln x_i / x_{i+1}$. Фундаментальна матриця, задана співвідношеннями (4.26)–(4.29) і (4.30), на більшій основі має властивість: $A_{cone}(0) = A_{cone}(t_i, t_i) = \Xi$.

Якщо x – безрозмірна координата точки, що лежить за m -им шпангоутом, а $[W(x)] = (W(x), W'(x), W''(x), W'''(x))^t$, то

$$[W(x)] = H \cdot [W(0)], \quad (4.31)$$

де $H = \{h_{ij}\}$ – матриця, задана добутком виду (4.14) (див. Додаток А), якщо конструкція «циліндр-конус-циліндр-конус» відповідає схемі рис. 4.6 б.

У випадку наявності у конструкції ділянок такої орієнтації, що відповідає схемі рис. 4.7 і 4.6 в, то матриця конструкції (див. рис. 4.7) має вигляд:

$$H_{cyl-cone-cyl-cone} = H_{cyl-cone} \cdot (H_{cone-cyl})^{-1}. \quad (4.32)$$

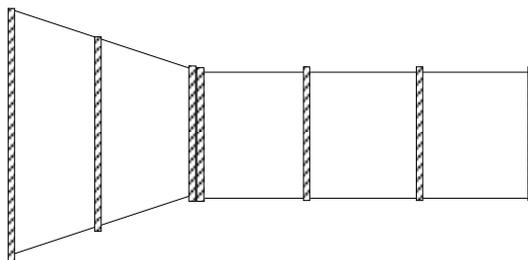


Рисунок 4.7 – Допоміжна конструкція

Трансцендентне рівняння для визначення критичного тиску можна отримати для відповідних граничних умов, виходячи з (4.31). Розглянемо, наприклад, випадок обох вільних торців конструкції. Тоді рівняння (4.31) набуде вигляду [60]:

$$\begin{pmatrix} W(x) \\ W'(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = H \cdot \begin{pmatrix} W(0) \\ W'(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

звідки виходить однорідна система, що має нульовий розв'язок за умови, що її визначник дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} h_{3,1} & h_{3,2} \\ h_{4,1} & h_{4,2} \end{vmatrix} = 0. \quad (4.34)$$

Рівняння (4.34) є характеристичним для пошуку критичного тиску, який вибирається найменшим по числу хвиль в окружному напрямку.

Пропонується така методика визначення жорсткостей шпангоутів для забезпечення рівностійкого конічної і циліндричної частин складеної оболонки.

1. Для описання загальних закономірностей по стійкості підкріплених циліндричних і конічних відсіків, визначаються геометричні параметри циліндричної і конічної непідкріплених шарнірно опертих оболонок, які мають близькі значення критичного тиску. Такими властивостями володіють оболонки з характеристиками: $E = 7 \cdot 10^5 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$, $\nu = 0,32$; конічна – лінійно змінної

товщини $h_{cone} = \frac{h_{cone}^1}{l_1} s$, з параметрами $\frac{h_{cone}^1}{l_1} = \frac{3}{1820}$, $\frac{l_0}{l_1} = 0,55$, $\alpha = 75^\circ$;

параметрами $R = l_1 \cos \alpha$, $\frac{h_{cyl}}{R} = \frac{h_{cone}^1}{l_1 \cos \alpha}$. Обрана таким чином непідкріплена

циліндрична оболонка при $L = 2,39R$ має критичний тиск $q_1 = 0,87703 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, а

конічна – $q_2 = 0,85127 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$.

2. Стійкість підкріплених конічної і циліндричної оболонок. На цьому етапі розглядається конічна оболонка зі шпангоутами на торцях, а циліндрична – з торцевими і з проміжним (або без нього) шпангоутами. Через наявність шпангоутів на торцях, вибираються граничні умови вільних торців.

На рис. 4.8 а наведено графіки залежностей критичного тиску $q_{cr} \left[\frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right]$

локальної втрати стійкості оболонок від параметрів жорсткості $G_{cone,1}^*$ та $G_{cyl,1}$ відповідно, для різних значень $G_{cone,2}^*$ і $G_{cyl,2}$. Штриховим лініям відповідають залежності для конічного відсіку, суцільним – циліндричного з двома шпангоутами, штрих-пунктирної – з трьома.

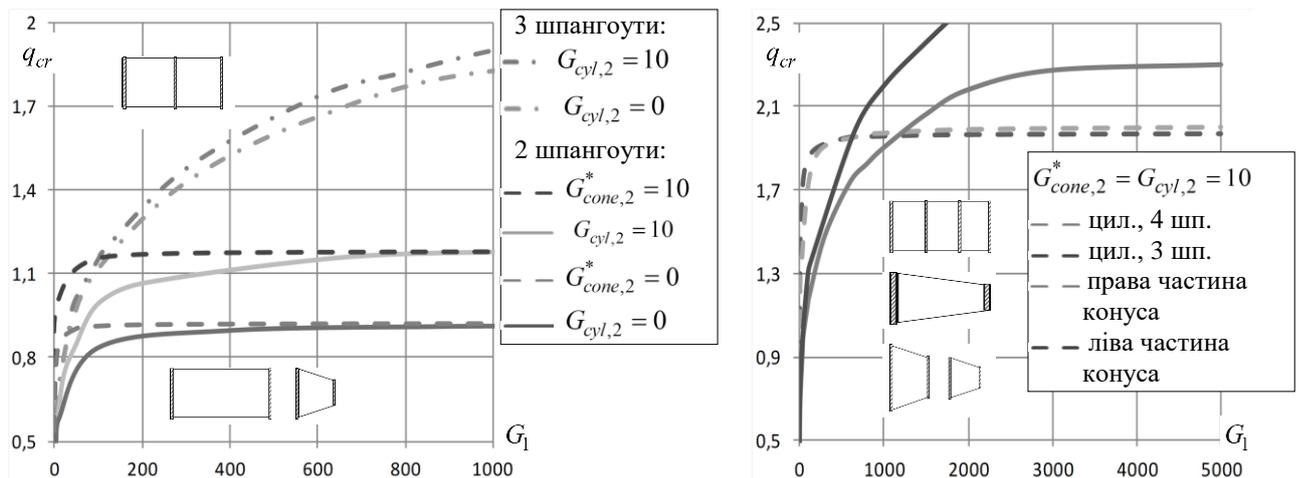


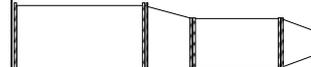
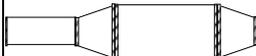
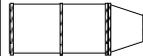
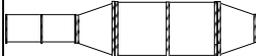
Рисунок 4.8 – Порівняння залежностей критичних тисків локальної втрати стійкості конічних і циліндричних (при $L = 2,39R_{cyl}$) відсіків від жорсткості

шпангоутів

У розглянутих випадках, із збільшенням жорсткості шпангоутів критичний тиск стабілізується на близьких значеннях, як для конічної, так і для циліндричної оболонок лише в разі підкріплення парою шпангоутів.

За графіками можна узгодити значення параметрів жорсткості, що забезпечують однакові значення критичних тисків. У таблиці 4.1 вказані кілька узгоджених значень параметрів жорсткості підкріплення, що забезпечують локальну рівну стійкість конічної і циліндричної частин конструкції.

Таблиця 4.1 – Локальна і загальна стійкість оболонкових конструкцій з двома шпангоутами на конічному відсіку, з циліндричними відсіками із значенням $K = 2,39$

| Забезпечення локальної рівності стійкості | | | Загальна стійкість оболонкової конструкції | | | | |
|---|----------------|-------------------------|---|-------------------------|---|--|---|
|  | | |  $K = 2,39$ | |  |  $K = 2,39$ |  $K = 2,39$ |
| G_2 | $G_{cone,1}^*$ | q_{cr} | $G_{cyl,1}$ | q_{cr} | q_{cr} | q_{cr} | q_{cr} |
| 0 | 100 | 0,910568 ($n = 6$) | 877 | 0,910567 ($n = 6$) | 0,898581 ($n = 7$) | 0,887407 ($n = 7$) | 0,860265 ($n = 6$) |
| 10 | 100 | 1,156261 ($n = 7$) | 656 | 1,156287 ($n = 7$) | 1,147953 ($n = 7$) | 1,120358 ($n = 7$) | 1,165825 ($n = 7$) |
|  | | |  $K = 2,39$ | |  |  |  |
| 0 | 100 | 0,910568 ($n = 6$) | 38,88 | 0,910535 ($n = 6$) | 0,743748 ($n = 6$) | 0,727804 ($n = 6$) | 0,715681 ($n = 6$) |
| 10 | 100 | 1,156261 ($n = 7$) | 102,1 | 1,15625 ($n = 7$) | 1,1408898 ($n = 7$) | 1,119374961853 ($n = 7$) | 1,10652973175 ($n = 7$) |

Циліндрична оболонка з трьома досить жорсткими шпангоутами втрачає стійкість при тисках, що перевищують критичні тиску підкріпленої двома шпангоутами конічної оболонки. Тому у разі підкріплення конуса

двома шпангоутами, доцільно вибирати підкріплення циліндра торцевими шпангоутами зі значеннями параметра жорсткості того ж порядку, або трьома шпангоутами меншої жорсткості.

У випадку розміщення на конічному відсіку трьох шпангоутів, два з яких розташовані на торцях, спочатку необхідно вибрати найбільш раціональне (з точки зору локальної рівності) розташування проміжного шпангоута на конусі. При даних геометричних характеристиках конуса і параметрів жорсткості шпангоутів, раціональним є розташування шпангоута, яке ділить твірну у відношенні 1,174:1, відраховуючи від більшої основи конуса. На рис. 4.8-а наведено залежності критичних тисків «лівої» і «правої» частин конічного відсіку від параметру жорсткості в площині $G_{cone,1}^*$ при фіксованому значенні параметра $G_{cone,2}^* = 10$. Побудовані на рис. 4.8 б залежності для окремих частин конуса вказують на задовільне узгодження за їх критичним тискам, що вказує на правильність вибору для розташування проміжного шпангоута.

На рисунку 4.8-б побудовано залежності критичних тисків циліндричного відсіку від жорсткості $G_{cyl,1}$ при $G_{cyl,2} = 10$ для випадку підкріплення трьома і чотирма шпангоутами. Наведені на рисунку 4.8-б залежності дозволяють підібрати узгоджені значення параметрів жорсткості, що забезпечують локальну рівну стійкість конічного і циліндричного відсіків. Ці значення наведені в таблиці 4.2. Тут і далі: $G_{cone,2}^* = G_{cyl,2} = G_2$, $L = K \cdot R$.

3. Наведемо розрахунок критичних тисків складених конструкцій типу «циліндр-конус», «циліндр-конус-циліндр-конус». Для конічних і циліндричних оболонок зазначених геометричних розмірів з кількістю шпангоутів, яке зазначено в індексі матриці-добутку виду (4.14), маємо:

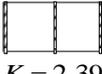
$$H_{cone,2} = \Xi \cdot B_{cone,1} \cdot A_{cone} \left(\ln \frac{11}{20} \right) \cdot B_{cone,2} \cdot \Xi, \quad (4.35)$$

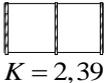
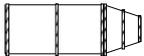
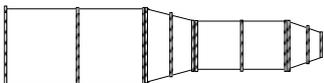
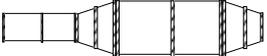
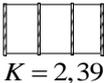
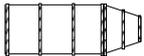
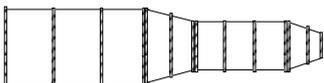
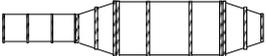
$$H_{cone,3} = \Xi \cdot B_{cone,1} \cdot A_{cone} \left(\ln \frac{550}{757} \right) \cdot B_{cone,2} \cdot A_{cone} \left(\ln \frac{757}{1000} \right) \cdot B_{cone,3} \cdot \Xi, \quad (4.36)$$

$$H_{cyl,m_{cyl}} = \Xi \cdot B_{cyl} \cdot A_{cyl} \left(\bar{L}_{m_{cyl}} \right) B_{cyl} \cdot A_{cyl} \left(\bar{L}_{m_{cyl}-1} \right) \cdot \dots \cdot A_{cyl} \left(\bar{L}_1 \right) \cdot B_{cyl} \cdot \Xi. \quad (4.37)$$

Прийняті значення $\bar{L}_k = \frac{1}{m_{cyl} - 1}$ для всіх $k = 1, \dots, m_{cyl}$ ($m_{cyl} \geq 2$).

Таблиця 4.2 – Локальна і загальна стійкість оболонкових конструкцій з трьома шпангоутами на конічному відсіку, з циліндричними відсіками із значенням $K = 2,39$

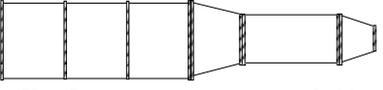
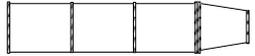
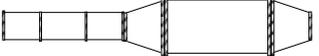
| | | Забезпечення рівності частин конічної оболонки | | | Забезпечення рівності частин циліндричної і конічної частин | | |
|-------|----------------|--|---|--------------------------|--|--|-------------------------|
| | | Ліва частина конуса (54% від довжини твірної) G_1, G_2 для біл. шп $\frac{1}{2} G_1, \frac{1}{2} G_2$ для м. шп. | Права частина конуса (46% від довжини твірної) $\frac{1}{2} G_1, \frac{1}{2} G_2$ для біл. шп G_1, G_2 для мен. шп. | |  |  $K = 2,39$ | |
| G_2 | $G_{cone,1}^*$ | q_{cr} | $G_{cone,1}^*$ | q_{cr} | q_{cr} | $G_{cyl,1}$ | q_{cr} |
| 10 | 22,36 | 1,346862 ($n = 8$) | 10 | 1,346832 ($n = 8$) | 1,345212 ($n = 8$) | 186,51 | 1,345215 ($n = 8$) |
| 10 | 686,1 | 1,978115 ($n = 10$) | 1000 | 1,978119 ($n = 10$) | 1,974037 ($n = 10$) | 1211,37 | 1,974037 ($n = 9$) |

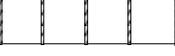
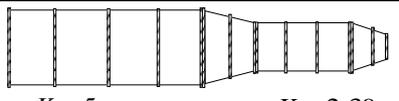
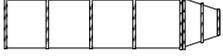
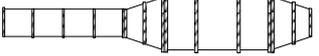
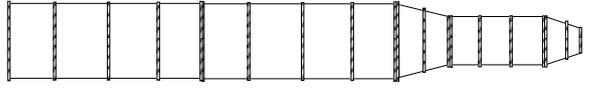
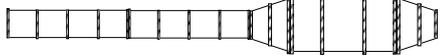
| | | Локально рівності відсіки | | Загальна стійкість оболонкової конструкції | | |
|-------|----------------|--|---|---|--|---|
| | | $L_1 / L_2 = 54 / 46$  |  $K = 2,39$ |  |  |  |
| G_2 | $G_{cone,1}^*$ | $G_{cyl,1}$ | q_{cr} | q_{cr} | q_{cr} | |
| 10 | 22,36 і 10 | 186,51 | 1,269103 ($n = 7$) | 1,265668 ($n = 7$) | 1,268538 ($n = 7$) | |
| 10 | 686,1 і 1000 | 1211,37 | 1,929986 ($n = 9$) | 1,751094 ($n = 9$) | 1,766448 ($n = 9$) | |
| | | $L_1 / L_2 = 54 / 46$  |  $K = 2,39$ |  |  |  |
| G_2 | $G_{cone,1}^*$ | $G_{cyl,1}$ | q_{cr} | q_{cr} | q_{cr} | |
| 10 | 22,36 і 10 | 126,68 | 1,322804 ($n = 7$) | 1,299376 ($n = 7$) | 1,304612 ($n = 7$) | |
| 10 | 686,1 і 1000 | 644,66 | 1,955186 ($n = 9$) | 1,702499 ($n = 9$) | 1,948229 ($n = 9$) | |

4. Проведемо розрахунок онструкцій, один з циліндричних відсіків якої має значення $K = 5, K = 10$.

Всі етапи розрахункових досліджень повторюють описану вище методику. На рисунку 4.9 представлені залежності критичних тисків конічних і циліндричних відсіків із зазначеним на рисунку кількістю шпангоутів. У таблиці 4.3 наведені розрахункові дані по критичним тискам оболонкових структур, зображених в таблиці. Зауважимо, що для того циліндричного відсіку, у якого $K=10$, центральний шпангоут вибирався з подвоєною жорсткістю.

Таблиця 4.3 – Локальна і загальна стійкість оболонкової конструкції з двома і трьома шпангоутами на конічному відсіку, з циліндричними відсіками зі значеннями $K=2,39$, $K=5$, $K=10$ ($G_2=10$)

| | | | |
|---|---|--|--|
|  |  $K=2,39$ |  $K=5$ |  $K=5$ $K=2,39$ |
| $G_{cone,1}^*$ | $G_{cyl,1}$ | $G_{cyl,1}$ | |
| 100 | 656 | 1809,7 | $q_{cr}=1,145968$ ($n=7$) |
| $q_{cr}=1,1563$ ($n=7$) | | | |
|  $K=2,39$ |  $K=5$ |  $K=5$ $K=2,39$ | |
| $q_{cr}=1,147953$ ($n=7$) | $q_{cr}=1,153429$ ($n=7$) | $q_{cr}=1,140929$ ($n=7$) | |

| | | | |
|--|---|---|--|
| $L_1 / L_2 = 54 / 46$  |  $K=2,39$ |  $K=5$ |  $K=5$ $K=2,39$ |
| $G_{cone,1}^*$ | $G_{cyl,1}$ | $G_{cyl,1}$ | |
| 22,36 і 10 | 126,68 | 2274,3 | $q_{cr}=1,304172$ ($n=8$) |
| $q_{cr}=1,3452$ ($n=8$) | | | |
|  $K=2,39$ |  $K=5$ |  $K=5$ $K=2,39$ | |
| $q_{cr}=1,322804$ ($n=7$) | $q_{cr}=1,331846$ ($n=8$) | $q_{cr}=1,322544$ ($n=8$) | |
|  $K=10$ $K=2,39$ |  $K=10$ $K=2,39$ | | |
| $q_{cr}=1,327226$ ($n=8$) | $q_{cr}=1,336687$ ($n=8$) | | |

Для оболонок з вибраними характеристиками, результати розрахунків показують, що критичні тиски рівнотійкої конструкції типу «циліндр-конус», що відповідають загальній втраті стійкості, менші за локальні до 19%. При цьому збільшення загальної довжини конструкції за рахунок включення в неї додаткових відсіків (для отримання конструкцій типу «циліндр-конус-циліндр-конус») призводить до зменшення критичного тиску до 6%.

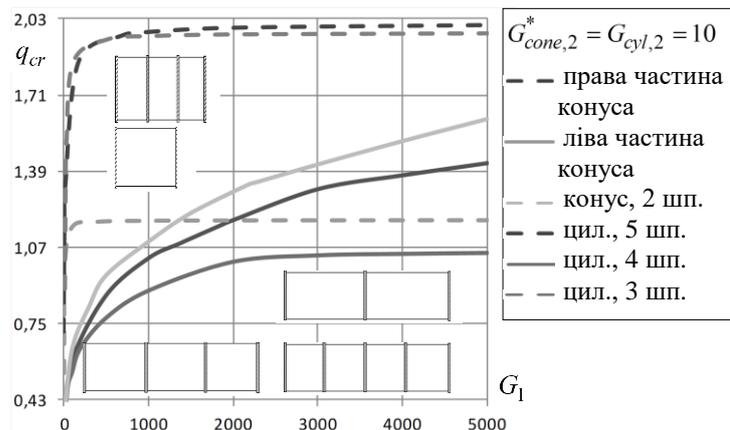


Рисунок 4.9 – Порівняння залежностей критичних тисків локальної втрати стійкості конічних і циліндричних (при $L = 5R_{cyl}$) відсіків від жорсткості шпангоутів

Слід зазначити, що проблема стійкості циліндричної оболонки постійної товщини або конічної оболонки лінійно змінної товщини з різними типами граничних умов під впливом нормального зовнішнього тиску досліджувалася в роботах [16, 54, 83], де результати були знайдені аналітичними і чисельними методами. Результати, отримані в даній роботі для відповідних граничних умов, відрізнялися від зазначених менш, ніж на 3%.

4.6 Висновки

Досліджена стійкість оболонкової конструкції ракето-носія типу «циліндр-конус» при комбінованому навантаженні зовнішнім тиском, осьовим стисненням і крутним моментом. Основні диференціальні рівняння задачі розв'язуються аналітично з використанням асимптотичного підходу. У випадку кінчного відсіку використовуються два аналітичних методи: фазних інтегралів (метод ВКБ) і гібридний ВКБ-Гальоркін. Для аналізу стійкості підкріплених оболонок використовується матричний метод, що дозволяє визначити зміну напружено-деформованого стану оболонки при переході через шпангоут. Характеристичне рівняння для визначення критичних навантажень отримано на основі матричного методу і рівнянь спряжень. Особливу увагу приділено вибору коефіцієнтів жорсткості шпангоута для кінчної і циліндричної частин, які забезпечують рівні значення критичного тиску. Вивчено стійкість підкріпленої кінчної конструкції при комбінованому навантаженні. Обговорюються результати чисельних розрахунків для різних типів підкріплених конструкцій. Показано, що в граничних випадках чисельні результати знаходяться в хорошій кореляції з відомими публікаціями.

РОЗДІЛ 5

ОСНОВНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ І ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ СТІЙКОСТІ ПІДКРІПЛЕНИХ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ ТИПУ «БОЧКА-ОЖИВАЛО»

П'ятий розділ роботи присвячено одержанню основних диференціальних рівнянь і чисельного розв'язку із застосуванням методу скінченних різниць задачі стійкості перспективної з точки зору сприйняття зовнішнього тиску і осьових зусиль, здатних викликати втрату стійкості первісної форми, оболонкової конструкції типу «бочка-оживало»:

- досліджено вплив відносного підйому меридіану відсіків на стійкість відповідних оболонок;
- вивчено стійкість як «бочкоподібних» і «оживальних», так і складених підкріплених оболонок з дискретно розташованими проміжними шпангоутами;
- запропоновано підхід для оцінки рівної стійкості прольотів конструкції та проаналізовано ефект стабілізації критичного тиску оболонки при зростанні жорсткості проміжних і торцевих шпангоутів, що вказує на можливість встановлення їх раціональних характеристик;
- надано аналіз впливу осьової стискаючої сили на стійкість непідкріпленої і підкріпленої опуклої оболонки.

5.1 Постановка задачі стійкості складеної оболонкової конструкції. Застосовані гіпотези

Вирішується задача стійкості складеної оболонкової конструкції типу «бочка-оживало» з відхиленнями форми серединної поверхні синусоїдального типу. Таке поєднання відсіків конструкції аерокосмічного машинобудування може привести, у певному наближенні, до вирішення

проблеми раціонального проектування складеної конструкції з точки зору її стійкості до початкової форми при комбінованому зовнішньому навантаженні.

Питання рівності відсіків вже було розглянуто в попередньому розділі, а також в роботі [32] для конструкцій типу «циліндр-конус», підкріпленої дискретно розташованими проміжними шпангоутами.

У розділі розглядається аналогічна конструкція з оболонкою типу «бочка-оживало». Для дослідження зміни напружено-деформованого стану при переході через шпангоут використовуються результати, наведені в роботах [26, 60].

Основним етапом дослідження є побудова розв'язувальних диференціальних рівнянь для дослідження на стійкість оболонок зазначеного типу. За аналогією теорії пологих оболонок [39], в даній роботі передбачається, що відносна висота відхилень від циліндра і конуса менше однієї п'ятої найменшого лінійного її розміру. В цьому випадку можна вважати, що координатними лініями будуть загальноприйняті лінії для циліндричної і конічної оболонок відповідно. При цьому обчислюються головні радіуси кривизни серединної поверхні кожного з відсіків, коефіцієнти перших квадратичних форм, оператори диференціювання, фіктивні навантаження та інші величини, на які впливають радіуси кривизни. У даному розділі застосовується чисельний метод кінцевих різниць інтегрування основних рівнянь стійкості конструкції по відношенню до локальних і загальних форм випинання з особливостями застосування для підкріплених складених оболонок.

Розглядається пружна оболонкова конструкція кругового перетину постійної товщини h , підкріплена стикувальним шпангоутом (рис. 5.1).

Конструкція складається з двох відсіків – «бочкоподібного» і «оживального». Відсіки сполучаються і можуть підкріплюватися стикувальним і проміжними шпангоутами. Вирішується задача локальної та загальної стійкості конструкції, тобто стійкості відсіків і конструкції в

цілому, що знаходиться під дією зовнішнього тиску q . Секції розглядаються середньої довжини з певними обмеженнями, описаними нижче.

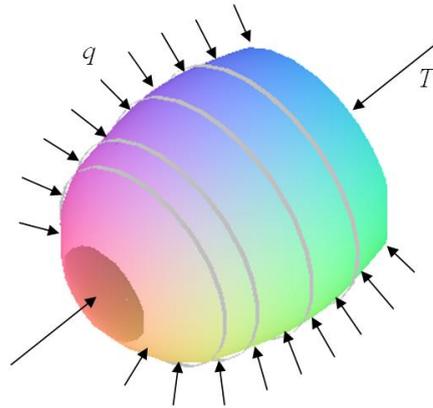


Рисунок 5.1 – Схема навантаження підкріпленої оболонкової конструкції типу «бочка-оживало» (T , q – відповідно осьове зусилля та зовнішній тиск)

Для обох секцій (рис. 5.2) вісь обертання позначена через Oz . Координати вибираються наступним чином: лінійна меридіанна координата (уздовж твірних циліндра або конуса) для бочкоподібного відсіку позначається \bar{s} , для оживальної – s ; дугова координата «бочки» – y , кутова координата в площині паралелі оживало – φ . Координати \bar{s} , s , y мають одиниці вимірювання довжини, φ – безрозмірна.

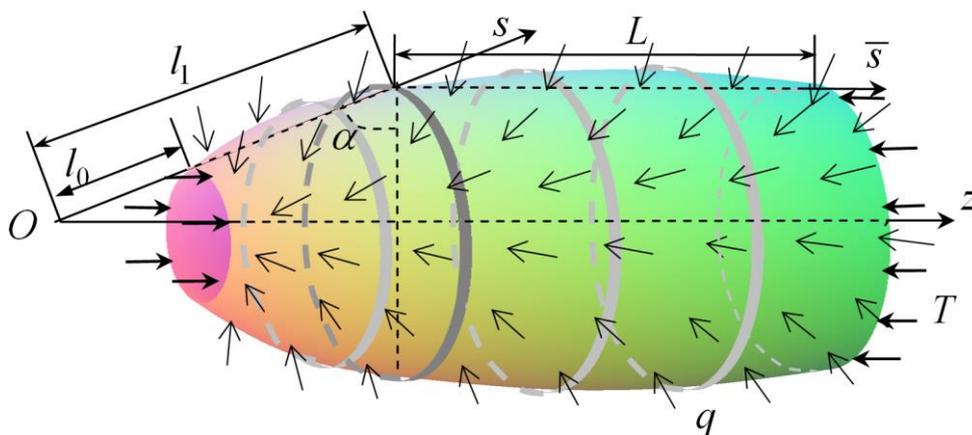


Рисунок 5.2 – Схема оболонкової конструкції (l_0 , l_1 – відповідно відстані від полюсу до меншої і більшої основи відсіку, s , \bar{s} – осьові координати відсіків, T , q – відповідно осьове зусилля та зовнішній тиск)

Для складання основних диференціальних рівнянь стійкості конструкції виписуються рівняння поверхонь, радіуси їх кривизн і фіктивні навантаження для бочкоподібної і оживальної оболонок в припущенні, що їх підйом має синусоїдальний тип.

Передбачається, що «бочкоподібна» оболонка, як поверхня обертання, має таку функцію радіуса паралельного кола в перерізі, перпендикулярному осі обертання:

$$r = R \left(1 + C_{cyl} \sin \frac{\pi z}{L} \right), \quad (5.1)$$

де L і R – відстань між основами і радіус основи «бочки» відповідно, C_{cyl} – відносна висота підйому «бочки».

На підставі (5.1), враховуючи, що в даній постановці, виписується параметризація поверхні обертання:

$$x = R \left(1 + C_{cyl} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L} \right) \cos \frac{y}{R}; \quad y = R \left(1 + C_{cyl} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L} \right) \sin \frac{y}{R}; \quad z = \bar{s}. \quad (5.2)$$

Відповідно до введених припущень, накладається обмеження: $C_{cyl} \leq 1/5$. Для оболонки довжини, що задовольняє нерівності $L/R \geq 1/2$, має місце оцінка $\lambda = RC_{cyl} \pi/L < 1/3$. Тоді для всіх $\bar{s} \in [0; L]$ в нульовому наближенні можна записати:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (r')^2} &= \sqrt{1 + \left(RC_{cyl} \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi \bar{s}}{L} \right)^2} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(\lambda \cos \frac{\pi \bar{s}}{L} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\lambda \cos \frac{\pi \bar{s}}{L} \right)^3 + \dots \approx 1. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Обчислюються радіуси кривизни з урахуванням (5.3) і [16, 39]:

$$R_1 = -\frac{(1+(r')^2)^{3/2}}{r''} \approx \frac{1}{RC_{cyl} \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L}}, \quad R_2 = r\sqrt{1+(r')^2} \approx R \left(1 + C_{cyl} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L}\right). \quad (5.4)$$

З (5.2) випливає, що

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{\partial x}{\partial \bar{s}} &= RC_{cyl} \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi \bar{s}}{L} \cos \frac{y}{R}; & \frac{\partial y}{\partial \bar{s}} &= RC_{cyl} \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi \bar{s}}{L} \sin \frac{y}{R}; & \frac{\partial z}{\partial \bar{s}} &= 1; \\ 2) \quad \frac{\partial x}{\partial y} &= -\left(1 + C_{cyl} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L}\right) \sin \frac{y}{R}; & \frac{\partial y}{\partial y} &= \left(1 + C_{cyl} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L}\right) \cos \frac{y}{R}; & \frac{\partial z}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

звідки розраховуються коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$\begin{aligned} 1) \quad a_{11} &= A_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{s}}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{s}}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{s}}\right)^2 = 1 + \left(RC_{cyl} \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi \bar{s}}{L}\right)^2 \approx 1, \\ 2) \quad a_{12} &= \frac{\partial x}{\partial \bar{s}} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \bar{s}} \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \bar{s}} \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \\ 3) \quad a_{22} &= A_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(1 + C_{cyl} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L}\right)^2 \end{aligned}$$

з позначеннями

$$A_1 = \sqrt{a_{11}} \approx 1, \quad A_2 = \sqrt{a_{22}} = 1 + C_{cyl} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L}. \quad (5.5)$$

Розподіл напружень в основному стані описується безмоментним рішенням [39]

$$\begin{aligned} N_{10} &\approx \frac{\sqrt{1+(r')^2}}{r} \int_0^{\bar{s}} (-q) r r' d\bar{s} \approx \\ &\approx -\frac{1}{R \left(1 + C_{cyl} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L}\right)} \int_0^{\bar{s}} q R^2 \left(1 + C_{cyl} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L}\right) C_{cyl} \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi \bar{s}}{L} d\bar{s} = \end{aligned}$$

$$= -q R C_{cyl} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L} \cdot \frac{2 + C_{cyl} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L}}{2 \left(1 + C_{cyl} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L} \right)} \approx -q R C_{cyl} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L}; \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} N_{20} &\approx -\frac{r r''}{1 + (r')^2} N_{10} + (-q) r \sqrt{1 + (r')^2} \approx -r r'' N_{10} - r q = \\ &= -q R \left(1 + C_{cyl} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L} \right) \left[\left(R C_{cyl} \frac{\pi}{L} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L} \right)^2 + 1 \right] \approx -q R \left(1 + C_{cyl} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L} \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Для оживальної оболонки вводяться такі позначення (див. рис. 5.2):

l_0 – відстань уздовж осі Os до меншої і l_1 більшої основи «оживало» відповідно, α – кут між осями Os і Oz , $x = s/l_1$. Передбачається, що оживальна оболонка як поверхня обертання має такий вигляд функції радіуса паралельного кола в перерізі, перпендикулярному осі обертання:

$$r(z) = z \operatorname{ctg} \alpha + C_{cone} R_{1,cone} \sin \left[\frac{\pi}{l_1 - l_0} \left(\frac{z}{\sin \alpha} - l_0 \right) \right], \quad (5.8)$$

де C_{cone} – відносна висота под'ємності оживало. Оскільки $z = s \sin \alpha$, $R_{1,cone} = l_1 \cos \alpha$, функція (5.8) має вид:

$$r(s) = \cos \alpha \left(s + l_1 C_{cone} \sin \frac{\pi(s - l_0)}{l_1 - l_0} \right). \quad (5.9)$$

Параметризація поверхні обертання:

$$x = \cos \alpha \left(s + l_1 C_{cone} \sin \frac{\pi(s - l_0)}{l_1 - l_0} \right) \cos \varphi; \quad (5.10)$$

$$y = \cos \alpha \left(s + l_1 C_{cone} \sin \frac{\pi(s - l_0)}{l_1 - l_0} \right) \sin \varphi; \quad (5.11)$$

$$z = s \sin \alpha. \quad (5.12)$$

Вводиться позначення:

$$\Omega = \frac{\pi}{l_1 - l_0} \left(\frac{z}{\sin \alpha} - l_0 \right) = \frac{\pi(s - l_0)}{l_1 - l_0}. \quad (5.13)$$

Відповідно до заданого припущення, под'ємність «оживало» задовольняє нерівності $R C_{cone} < 1/5 \cdot R_0$, де $R_0 = l_0 \cos \alpha$ – радіус меншої основи «оживало».

Тоді $C_{cone} \leq l_0/5l_1$. Якщо додатково припустити, що $\frac{l_0}{l_1 - l_0} \cos \alpha \leq \frac{1}{\pi}$, то ця умова

приведе до оцінки:

$$t = C_{cone} \frac{\pi l_1}{l_1 - l_0} \cos \alpha \leq \frac{\pi l_0}{5(l_1 - l_0)} \cos \alpha \leq \frac{1}{5}. \quad (5.14)$$

На базі подання (5.8) для $z \in [l_0 \sin \alpha; l_1 \sin \alpha]$ у нульовому наближенні здобуваємо:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2} &= \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \left(1 + C_{cone} l_1 \frac{\pi}{l_1 - l_0} \cos \left[\frac{\pi}{l_1 - l_0} \left(\frac{z}{\sin \alpha} - l_0 \right) \right] \right)^2} = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{1 + (2t \cos \Omega + t^2 \cos^2 \Omega)} = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \left(1 + \frac{1}{2} (2t \cos \Omega + t^2 \cos^2 \Omega) - \frac{1}{8} (2t \cos \Omega + t^2 \cos^2 \Omega)^2 + \dots \right) \approx \frac{1}{\sin \alpha}. \quad (5.15) \end{aligned}$$

Тому радіуси кривизни з урахуванням [16, 39] запишуться у виді:

$$R_1 = -\frac{(1+(r')^2)^{3/2}}{r''} \approx \frac{(l_1-l_0)^2}{C_{cone} l_1 \pi^2 \cos \alpha \sin \alpha \sin \Omega}, \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} R_2 &= r(z) \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} \approx (z \operatorname{ctg} \alpha + C_{cone} l_1 \cos \alpha \sin \Omega) \frac{1}{\sin \alpha} = \\ &= \operatorname{ctg} \alpha (s + C_{cone} l_1 \sin \Omega). \end{aligned} \quad (5.17)$$

З параметризації (5.10)–(5.12) і представлення (5.9) випливає, що

$$1) \quad \frac{\partial x}{\partial s} = \cos \alpha \left(1 + \frac{\pi l_1 C_{cone}}{l_1 - l_0} \cos \frac{\pi(s-l_0)}{l_1 - l_0} \right) \cos \varphi;$$

$$2) \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\cos \alpha \left(s + l_1 C_{cone} \sin \frac{\pi(s-l_0)}{l_1 - l_0} \right) \sin \varphi;$$

$$3) \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \cos \alpha \left(1 + \frac{\pi l_1 C_{cone}}{l_1 - l_0} \cos \frac{\pi(s-l_0)}{l_1 - l_0} \right) \sin \varphi;$$

$$4) \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \cos \alpha \left(s + l_1 C_{cone} \sin \frac{\pi(s-l_0)}{l_1 - l_0} \right) \cos \varphi;$$

$$5) \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \sin \alpha;$$

$$6) \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0.$$

Звідки коефіцієнти першої квадратичної форми представляються у формі:

$$a_{11} = A_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \left(1 + l_1 C_{cone} \frac{\pi}{l_1 - l_0} \cos \Omega \right)^2 \approx 1, \quad (5.18)$$

$$a_{12} = 0, \quad (5.19)$$

$$a_{22} = A_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = (s + l_1 C_{cone} \Omega)^2. \quad (5.20)$$

Отже, отримуємо

$$A_1 \approx 1, \quad A_2 = s + l_1 C_{cone} \sin \Omega. \quad (5.21)$$

З урахуванням наближення (5.11), розподіл напружень у основному стані описується безмоментним розв'язком:

$$\begin{aligned} N_{10} &\approx \frac{\sqrt{1+(r')^2}}{r} \int_{l_0 \sin \alpha}^z (-q) r r' dz = -\frac{q(z^2 - l_0^2 \sin^2 \alpha) \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha (z + C_{cone} l_1 \sin \alpha \sin \Omega)} - \\ &\quad - q C_{cone} l_1 \operatorname{ctg} \alpha \sin \Omega \frac{(2z + C_{cone} l_1 \sin \alpha \sin \Omega)}{2(z + C_{cone} l_1 \sin \alpha \sin \Omega)} \approx \\ &\approx -\frac{q(z^2 - l_0^2 \sin^2 \alpha) \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha (z + C_{cone} l_1 \sin \alpha \sin \Omega)} - q C_{cone} l_1 \operatorname{ctg} \alpha \sin \Omega; \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} N_{20} &\approx -\frac{r r''}{1+(r')^2} N_{10} + (-q) r \sqrt{1+(r')^2} \approx -r r'' N_{10} \sin^2 \alpha - \frac{r q}{\sin \alpha} = \\ &= q \left(\frac{z \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + C_{cone} l_1 \operatorname{ctg} \alpha \sin \Omega \left(1 + \frac{\pi^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha (z^2 - l_0^2 \sin^2 \alpha)}{2(l_1 - l_0)^2} \right) \right) + \\ &\quad + q \left(l_1 C_{cone} \frac{\pi \operatorname{ctg} \alpha}{l_1 - l_0} \sin \Omega \right)^2 \cos \alpha (z + C_{cone} l_1 \sin \alpha \sin \Omega). \end{aligned} \quad (5.23)$$

З представленням $z = s \sin \alpha$, внутрішні зусилля приймають вид:

$$N_{10} \approx -\frac{q(s^2 - l_0^2) \operatorname{ctg} \alpha}{2(s + C_{cone} l_1 \sin \Omega)} - q C_{cone} l_1 \operatorname{ctg} \alpha \sin \Omega; \quad (5.24)$$

$$N_{20} \approx q \left(\frac{z \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + C_{cone} l_1 \operatorname{ctg} \alpha \sin \Omega \left(1 + \frac{\pi^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha (z^2 - l_0^2 \sin^2 \alpha)}{2(l_1 - l_0)^2} \right) \right). \quad (5.25)$$

5.2 Основні розв'язувальні рівняння стійкості складеної оболонки: випадок всебічного нормального зовнішнього тиску

Для виведення розв'язувальних рівнянь потребуються [16] наступні оператори диференціювання:

$$\nabla^2 = \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left(\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right), \quad (5.26)$$

$$\nabla_k^2 = \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left(\frac{1}{R_2} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R_1} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right); \quad (5.27)$$

формули зміни кривизн серединної поверхні:

$$\kappa_1(\bar{s}, y) = -\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left(\frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial \bar{s}} \right) - \frac{1}{(A_2)^2 A_1} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}; \quad (5.28)$$

$$\kappa_2(\bar{s}, y) = -\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{1}{(A_1)^2 A_2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial \bar{s}} \cdot \frac{\partial w}{\partial \bar{s}}; \quad (5.29)$$

фіктивне поперечне навантаження:

$$g = -(N_{10}\kappa_1 + N_{20}\kappa_2); \quad (5.30)$$

система основних рівнянь у частинних похідних, які характеризують рівновагу оболонки:

$$\begin{cases} D\nabla^4 w - \nabla_k^2 f = g, \\ \frac{1}{Eh} \nabla^4 f + \nabla_k^2 w = 0, \end{cases} \quad (5.31)$$

де $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ – жорсткість обшивки на згин, E – модуль пружності і

ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки, w – нормальне переміщення точки серединної поверхні при випинанні, f – функція зусиль.

На основі виписаних вище величин виводяться основні рівняння для «бочкоподібної» і «оживальної» оболонок.

Для «бочкоподібної» оболонки вводяться позначення:

$$\varepsilon_1 = \frac{h}{R}, \quad K = \frac{L}{R}, \quad \omega = 12(1-\nu^2), \quad (5.32)$$

безрозмірні координати $\bar{x} = \bar{s}/L$, $\bar{\varphi} = y/R$, безрозмірне зусилля:

$$\chi_{cyl} = \frac{qR^2}{Eh^2}, \quad (5.33)$$

функція радіальних переміщень і функція зусиль:

$$w_{cyl}(\bar{x}, \bar{\varphi}) = W_{cyl}(\bar{x}) \cdot \cos(n\bar{\varphi}), \quad f_{cyl}(\bar{x}, \bar{\varphi}) = E h^2 \Phi_{cyl}(\bar{x}) \cdot \cos(n\bar{\varphi}). \quad (5.34)$$

Характеристики (5.4)–(5.7), (5.26)–(5.30) підставляються у систему (5.31). Після перетворень отримуємо (Додаток В, підрозділ В.1):

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2 n^2 C_{cyl}}{K} \sin \pi \bar{x} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^2 \Phi_{cyl}(x) - \frac{1}{K^2} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^3 \Phi_{cyl}''(\bar{x}) + \\ & + \left(-(C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^3 \chi_{cyl} + \omega^{-1} \varepsilon_1 \left(1 + \frac{2}{K^2} \pi^2 C_{cyl} (C_{cyl} \sin^2 \pi \bar{x} - \sin \pi \bar{x} - 2C_{cyl}) \right) \right) n^2 W_{cyl}(\bar{x}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\pi C_{cyl} \cos \pi x (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1) \left(\frac{\chi_{cyl}}{K^2} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^3 + \omega^{-1} \varepsilon_1 \left(\frac{2n^2}{K^2} + \frac{\pi^2 (C_{cyl}^2 - 1)}{K^4} \right) \right) W'_{cyl}(\bar{x}) + \\
& + \frac{1}{K^2} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^2 \left[C_{cyl} \sin \pi \bar{x} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^2 \chi - \right. \\
& \left. - \omega^{-1} \varepsilon_1 \left(2n^2 + \frac{\pi^2}{K^2} C_{cyl} (C_{cyl} (\sin^2 \pi \bar{x} + 1) + 2 \sin \pi \bar{x}) \right) \right] W''_{cyl}(\bar{x}) + \\
& + \frac{2}{K^4} \pi \omega^{-1} \varepsilon_1 C_{cyl} \cos \pi \bar{x} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^3 W'''_{cyl}(\bar{x}) + \\
& + \frac{1}{K^4} \pi \omega^{-1} \varepsilon_1 (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^4 W''''_{cyl}(\bar{x}) = 0; \tag{5.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{2}{K^2 n^2} C_{cyl} \pi^2 (C_{cyl} (\sin^2 \pi \bar{x} - 2) - \sin \pi \bar{x}) \right) \Phi_{cyl}(\bar{x}) + \\
& + C_{cyl} \pi \cos \pi \bar{x} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1) \left(\frac{2}{K^2 n^2} + \frac{\pi^2}{K^4 n^4} (C_{cyl}^2 - 1) \right) \Phi'_{cyl}(\bar{x}) - \\
& - (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^2 \left(\frac{2}{K^2 n^2} + \frac{\pi^2}{K^4 n^4} C_{cyl} (C_{cyl} (\sin^2 \pi \bar{x} + 1) + 2 \sin \pi \bar{x}) \right) \Phi''_{cyl}(\bar{x}) + \\
& + \frac{2\pi C_{cyl}}{K^4 n^4} \cos \pi \bar{x} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^2 \Phi'''_{cyl}(\bar{x}) + \frac{1}{K^4 n^4} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^4 \Phi''''_{cyl}(\bar{x}) - \\
& - \frac{\pi^2 C_{cyl}}{\varepsilon_1 K^2 n^2} \sin \pi \bar{x} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^2 W_{cyl}(\bar{x}) + \\
& + \frac{1}{\varepsilon_1 K^2 n^4} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^3 W''_{cyl}(\bar{x}) = 0. \tag{5.36}
\end{aligned}$$

Оскільки для тонких оболонок середньої довжини $K^2 > 1$, $n^2 \gg 1$, то після виключення з другого рівняння доданків порядку, вище $\frac{1}{K^2 n^2}$, перетворене рівняння дозволяє виразити функцію $\Phi_{cyl}(x)$:

$$\Phi_{cyl}(\bar{x}) = \frac{1}{\varepsilon_1 K^2 n^2} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^2 \times$$

$$\times \left[\pi^2 C_{cyl} \sin \pi x W_{cyl}(\bar{x}) - \frac{1}{n^2} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1) W_{cyl}''(\bar{x}) \right]. \quad (5.37)$$

Підставляючи її в перше рівняння системи, в результаті отримується диференціальне рівняння основного напруженого стану щодо функції прогину «бочкоподібної» оболонки:

$$a_4 W_{cyl}^{IV}(\bar{x}) + a_3 W_{cyl}'''(\bar{x}) + a_2 W_{cyl}''(\bar{x}) + a_1 W_{cyl}'(\bar{x}) + a_0 W_{cyl}(\bar{x}) = 0, \quad (5.38)$$

де

$$a_0 = -\pi n^2 \varepsilon_1 (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^3 \chi_{cyl} + \omega^{-1} \pi n^4 \varepsilon_1^2 +$$

$$+ \frac{2}{K^2} \omega^{-1} \pi^3 C_{cyl} (C_{cyl} \sin^2 \pi \bar{x} - \sin \pi \bar{x} - 2C_{cyl}) +$$

$$+ \frac{\pi^5}{K^4} C_{cyl} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^3 \left[C_{cyl} \sin^2 \pi x (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n^2} (9C_{cyl}^2 \sin^3 \pi \bar{x} + 8C_{cyl} \sin^2 \pi \bar{x} - 6C_{cyl}^2 \sin \pi \bar{x} + \sin \pi \bar{x} - 4C_{cyl}) \right];$$

$$a_1 = \frac{1}{K^2} \cos \pi \bar{x} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1) \left\{ \varepsilon_1 C_{cyl} \pi^2 (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^3 \chi_{cyl} + 2\varepsilon_1^2 n^2 \omega^{-1} C_{cyl} \pi^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi^4}{K^2} C_{cyl} \left[\varepsilon_1^2 (C_{cyl}^2 - 1) - \frac{2}{n^2} (3C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1) (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^3 \right] \right\};$$

$$a_2 = \frac{1}{K^2} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^2 \left\{ \varepsilon_1 C_{cyl} \pi \sin \pi \bar{x} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^2 \chi_{cyl} - 2\varepsilon_1 n^2 \omega^{-1} \pi + \right.$$

$$+ \frac{\pi^3}{K^2} C_{cyl} \left[-\varepsilon_1^2 \omega^{-1} (C_{cyl} \sin^2 \pi \bar{x} + 2 \sin \pi \bar{x} + C_{cyl}) - \frac{2}{n^2} \sin \pi \bar{x} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{n^4} \sin \pi \bar{x} (3C_{cyl} \sin^2 \pi \bar{x} + \sin \pi \bar{x} - 2C_{cyl}) (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^2 \right] \right\};$$

$$a_3 = \frac{2}{n^4 K^4} \pi^2 C_{cyl} \cos \pi \bar{x} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^3 \times$$

$$\times (3C_{cyl}^2 \sin^2 \pi \bar{x} + 6C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + \varepsilon_1^2 \omega^{-1} n^4 + 3);$$

$$a_4 = \frac{1}{n^4 K^4} \pi (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^4 (C_{cyl}^2 \sin^2 \pi \bar{x} + 2C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + \varepsilon_1^2 \omega^{-1} n^4 + 1).$$

При $C_{cyl} = 0$ маємо рівняння для циліндричної оболонки:

$$\frac{1}{K^4} \left(\frac{\varepsilon_1 n^2}{\omega} + \frac{1}{n^2 \varepsilon_1} \right) W_{cyl}^{IV}(\bar{x}) - \frac{2\varepsilon_1}{\omega K^2} n^4 W_{cyl}''(\bar{x}) + \left(\frac{n^2 \varepsilon_1}{\omega} - \chi_{cyl} \right) n^4 W_{cyl}(\bar{x}) = 0 \quad (5.39)$$

є наближенням до рівняння (4.3).

Для «оживальної» оболонки (так само, як і для «бочкоподібної») вводяться позначення:

$$\delta = \frac{n^2}{\cos^2 \alpha}, \quad p = \varepsilon \delta, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{h \operatorname{ctg} \alpha}{l_1 \sqrt{12(1-\nu^2)}}}, \quad K_c = \frac{l_0}{l_1}, \quad \Omega = \frac{\pi(s-l_0)}{l_1-l_0}, \quad (5.40)$$

безрозмірна координата $x = s/l_1$, безрозмірне зусилля

$$\chi_{cone} = \frac{q^* l_1}{Eh \varepsilon^3 \operatorname{tg}^3 \alpha}, \quad (5.41)$$

функція радіальних переміщень і функція зусиль:

$$w_{cone}(x, \varphi) = W_{cone}(x) \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos(n\varphi), \quad (5.42)$$

$$f_{cone}(x, \varphi) = \Phi_{cone}(x) \varepsilon^2 l_1 Eh \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos(n\varphi), \quad (5.43)$$

які разом з характеристиками (5.16), (5.17), (5.21), (5.24)–(5.30) підставляються в систему (5.31). Оскільки для тонких оболонок середньої довжини $\varepsilon \ll 1$, $n^2 \gg 1$, то можна утримувати в рівняннях складові порядку, не вище ε . Після деяких перетворень отримується система (див. Додаток В, підрозділ В.2):

$$\begin{aligned} & \varepsilon p \sin \alpha \left[\pi^2 (C_{cone} \sin \Omega + x)^2 \times \right. \\ & \times \left(-C_{cone} \sin \Omega \left(-2 + \pi^2 K_c^2 \cos^2 \alpha + 4K_c - 2K_c^2 - \pi^2 x^2 \cos^2 \alpha \right) + \right. \\ & \quad \left. \left. + 2x(1 - K_c)^2 \right) \chi_{cone} - 2p(1 - K_c)^2 \right] W_{cone}(x) + \\ & - 2\pi^2 p C_{cone} \cos^2 \alpha \sin \alpha \sin \Omega (C_{cone} \sin \Omega + x)^2 \Phi_{cone}(x) - \end{aligned}$$

$$-2\varepsilon \sin \alpha (1 - K_c)^2 (C_{cone} \sin \Omega + x)^3 \Phi''_{cone}(x) = 0; \quad (5.44)$$

$$p^2 \varepsilon (1 - K_c)^2 \Phi_{cone}(x) - \pi^2 p \cos^2 \alpha C_{cone} \sin \Omega (C_{cone} \sin \Omega + x)^2 W_{cone}(x) - \\ - \varepsilon (C_{cone} \sin \Omega + x)^3 (1 - K_c)^2 W''_{cone}(x) = 0. \quad (5.45)$$

Виключаючи з неї функцію $\Phi_{cone}(x)$, приходимо до розв'язувальних диференціальних рівнянь стійкості «оживальної» оболонки:

$$b_4 W_{cone}^{IV}(\bar{x}) + b_3 W_{cone}'''(\bar{x}) + b_2 W_{cone}''(\bar{x}) + b_1 W_{cone}'(\bar{x}) + b_0 W_{cone}(\bar{x}) = 0, \quad (5.46)$$

де

$$b_0 = -p^3 (C_{cone} \sin \Omega + x)^2 (1 - K_c)^2 \times \\ \times \left(-\frac{1}{2} \pi^2 \cos^2 \alpha C_{cone} \sin \Omega (K_c^2 - x^2) + C_{cone} \sin \Omega (1 - K_c)^2 + \right. \\ \left. + x(1 - K_c)^2 \varepsilon \chi_{cone} + p^4 (1 - K_c)^4 + \delta \pi^2 \cos^2 \alpha C_{cone} (C_{cone} \sin \Omega + x)^3 \times \right. \\ \left. \times \left[-4\pi (2C_{cone} \sin \Omega + x)(1 - K_c) \cos \Omega + 9\pi^2 C_{cone}^2 \sin^3 \Omega + 8x\pi^3 C_{cone} \sin^2 \Omega - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin \Omega \left(\pi^2 (6C_{cone}^2 - x^2) + 2(1 - K_c)^2 \right) - 4x\pi^2 C_{cone} \right] + \right. \\ \left. + \delta^2 \pi^4 \cos^4 \alpha C_{cone}^2 \sin^2 \Omega (C_{cone} \sin \Omega + x)^4 \right); \\ b_1 = 2\delta \pi^2 \cos^2 \alpha C_{cone} (C_{cone} \sin \Omega + x)^4 (1 - K_c) \times \\ \times \left[-2K_c \sin \Omega + 1,5\pi C_{cone} \sin 2\Omega + 2\sin \Omega + \pi x \cos \Omega \right]; \\ b_2 = (C_{cone} \sin \Omega + x)^4 (1 - K_c)^2 \left\{ 6(1 - K_c)^2 - 2\delta \pi^2 \cos^2 \alpha C_{cone} \sin \Omega (C_{cone} \sin \Omega + x) + \right. \\ \left. + 3C_{cone} \pi \left(\pi (2C_{cone} - 3C_{cone} \sin^2 \Omega - x \sin \Omega) + 4\cos \Omega (1 - K_c) \right) \right\}; \\ a_3 = 6(C_{cone} \sin \Omega + x)^5 (1 - K_c)^3 (\pi C_{cone} \sin \Omega + K_c - 1); \\ a_4 = (C_{cone} \sin \Omega + x)^4 (1 - K_c)^4.$$

При значеннях $C_{cone} = 0$ о тримуємо рівняння для конічної оболонки, яке приведене у роботах [16, 60]:

$$W_{cone}^{IV} + \frac{6}{x} W_{cone}''' + \frac{6}{x^2} W_{cone}'' - \left(\frac{\chi p^3}{x^3} - \frac{p^4}{x^6} \right) W_{cone} = 0. \quad (5.47)$$

5.3 Основні розв'язувальні рівняння стійкості складеної оболонки: випадок комбінованого навантаження всебічним нормальним зовнішнім тиском і осьовим стискаючим зусиллям

З урахуванням осьової стискаючої сили T , наближений розподіл напруг в основному стані описується «безмоментним» розв'язком для «бочкоподібного» відсіку:

$$\tilde{N}_{10} \approx -qRC_{bar} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L} - \frac{T}{2\pi \left(R + C_{bar} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L} \right)}, \quad (5.48)$$

$$\tilde{N}_{20} \approx -qR \left(1 + C_{bar} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L} \right) + T \frac{\pi RC_{bar} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L}}{2L^2} \quad (5.49)$$

і «оживального»:

$$\tilde{\tilde{N}}_{10} \approx -\frac{q(s^2 - l_0^2) \operatorname{ctg} \alpha}{2(s + C_{og} l_1 \sin \Omega)} - qC_{og} l_1 \operatorname{ctg} \alpha \sin \Omega - \frac{T}{2\pi \sin \alpha \cos \alpha (s + C_{og} l_1 \sin \Omega)}; \quad (5.50)$$

$$\tilde{\tilde{N}}_{20} \approx -q \left(s \operatorname{ctg} \alpha + C_{og} l_1 \operatorname{ctg} \alpha \sin \Omega \left(1 + \frac{\pi^2 \cos^2 \alpha (s^2 - l_0^2)}{2(l_1 - l_0)^2} \right) \right) + T \frac{\pi l_1 C_{og}}{2(l_1 - l_0)^2} \sin \Omega, \quad (5.51)$$

Кільцеві та меридіанні зусилля містять доданки, що залежать від осьової стискаючої сили, з протилежними знаками. Це пов'язано з тим, що у опуклої

оболонки осьове стискання призводить до збільшення розтягувальних кільцевих напруг.

Після перетворень, аналогічних попередньому підрозділу, а також додаткового введення безрозмірного осьового зусилля $\eta_{cyl} = \frac{T}{2\pi E h^2}$, отримуємо розв'язувальне рівняння (5.50) з коефіцієнтами (див. Додаток В, підрозділ В.1):

$$\begin{aligned} a_0 = & \pi^3 n^2 \varepsilon_1 C_{cyl} K^{-2} \sin \pi \bar{x} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^2 \eta_{cyl} - \\ & - \pi n^2 \varepsilon_1 (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^3 \chi_{cyl} + \pi n^4 \varepsilon_1^2 \omega^{-1} + \\ & + 2 \pi^3 n^2 \varepsilon_1^2 C_{cyl} \omega^{-1} K^{-2} (C_{bar} \sin^2 \pi \bar{x} - \sin \pi \bar{x} - 2C_{cyl}) + \\ & + \pi^5 K^{-4} C_{cyl} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^3 [C_{cyl} \sin^2 \pi \bar{x} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1) + \\ & + n^{-2} (9C_{cyl}^2 \sin^3 \pi \bar{x} + 8C_{cyl} \sin^2 \pi \bar{x} - 6C_{cyl}^2 \sin \pi \bar{x} + \sin \pi \bar{x} - 4C_{cyl})]; \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} a_1 = & K^{-2} \cos \pi \bar{x} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1) \left\{ \varepsilon_1 C_{cyl} \pi^2 (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^3 \chi_{cyl} - \right. \\ & - K^{-2} \varepsilon_1 C_{cyl}^2 \pi^4 \sin \pi \bar{x} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^2 \eta_{cyl} + 2\varepsilon_1^2 n^2 \omega^{-1} C_{cyl} \pi^2 + \\ & \left. + \pi^4 K^{-2} C_{cyl} \left[\varepsilon_1^2 \omega^{-1} (C_{cyl}^2 - 1) - \frac{2}{n^2} (3C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1) (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^3 \right] \right\}; \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} a_2 = & K^{-2} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^2 \left\{ \varepsilon_1 C_{cyl} \pi \sin \pi \bar{x} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^2 \chi_{bar} + \right. \\ & + \varepsilon_1 \pi^2 (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1) \eta_{cyl} - 2\varepsilon_1 n^2 \omega^{-1} \pi + \pi^3 K^{-2} C_{cyl} \times \\ & \times \left[-\varepsilon_1^2 \omega^{-1} (C_{cyl} \sin^2 \pi \bar{x} + 2\sin \pi \bar{x} + C_{cyl}) - 2n^{-2} \sin \pi \bar{x} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^3 - \right. \\ & \left. \left. - 3n^{-4} \sin \pi \bar{x} (3C_{cyl} \sin^2 \pi \bar{x} + \sin \pi \bar{x} - 2C_{cyl}) (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^2 \right] \right\}; \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$a_3 = \frac{2\pi^2 C_{cyl}}{n^4 K^4} \cos \pi \bar{x} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^3 \left(3C_{cyl}^2 \sin^2 \pi \bar{x} + 6C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + \frac{n^4 \varepsilon_1^2}{\omega} + 3 \right); \quad (5.55)$$

$$a_4 = \pi n^{-4} K^{-4} (C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + 1)^4 (C_{cyl}^2 \sin^2 \pi \bar{x} + 2C_{cyl} \sin \pi \bar{x} + \varepsilon_1^2 \omega^{-1} n^4 + 1). \quad (5.56)$$

При $C_{cyl} = 0$ маємо циліндричну оболонку, а рівняння (5.46) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{K^4} \left(\frac{\varepsilon_1 n^2}{\omega} + \frac{1}{n^2 \varepsilon_1} \right) W_{cyl}^{IV}(\bar{x}) + \frac{n^2}{K^2} \left(\eta_{cyl} - \frac{2\varepsilon_1 n^2}{\omega} \right) W_{cyl}''(\bar{x}) + \\ + n^4 \left(\frac{n^2 \varepsilon_1}{\omega} - \chi_{cyl} \right) W_{cyl}(\bar{x}) = 0, \end{aligned} \quad (5.57)$$

яке є наближенням до рівняння (4.3).

Аналогічно для «оживальної» оболонки додатково вводиться безрозмірне осьове зусилля $\eta_{cone} = \frac{T \cos \alpha}{2\pi E h \varepsilon^2 l_1 \sin^3 \alpha}$ і виводиться розв'язувальне рівняння

(5.37) (див. Додаток В, підрозділ В.2):

$$\begin{aligned} b_0 = & \left[\left(0,5\pi^2 \cos^2 \alpha C_{cone} \sin \Omega (K_c^2 - x^2) - (C_{cone} \sin \Omega + x)(1 - K_c)^2 \right) \chi_{cone} + \right. \\ & \left. + \pi^2 C_{cone} \sin \Omega \cos^2 \alpha \eta_{cone} \right] p^3 (C_{cone} \sin \Omega + x)^2 (1 - K_c)^2 + \\ & + \delta \pi^2 \cos^2 \alpha C_{cone} (C_{cone} \sin \Omega + x)^3 \times \\ & \times \left[-4x \pi^2 C_{cone} - 4\pi (2C_{cone} \sin \Omega + x)(1 - K_c) \cos \Omega + 9\pi^2 C_{cone}^2 \sin^3 \Omega + \right. \\ & \left. + 8x\pi^3 C_{cone} \sin^2 \Omega - \sin \Omega \left(\pi^2 (6C_{cone}^2 - x^2) + 2(1 - K_c)^2 \right) \right] + \\ & + \delta^2 \pi^4 \cos^4 \alpha C_{cone}^2 \sin^2 \Omega (C_{cone} \sin \Omega + x)^4 + p^4 (1 - K_c)^4; \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} b_1 = & \delta \pi^2 \cos^2 \alpha C_{cone} (C_{cone} \sin \Omega + x)^3 (1 - K_c) \left[p \varepsilon \sin \Omega (K_c - 1 - \pi C_{cone} \cos \Omega) \eta_{cone} + \right. \\ & \left. + 2(C_{cone} \sin \Omega + x)(-2K_c \sin \Omega + 1,5\pi C_{cone} \sin 2\Omega + 2\sin \Omega + \pi x \cos \Omega) \right]; \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} b_2 = & (C_{cone} \sin \Omega + x)^3 (1 - K_c)^2 \left\{ (1 - K_c)^2 (p^2 \eta_{cone} + 6(C_{cone} \sin \Omega + x)) + \right. \\ & + 3C_{cone} \pi (C_{cone} \sin \Omega + x) \left(\pi (2C_{cone} - 3C_{cone} \sin^2 \Omega - x \sin \Omega) + 4\cos \Omega (1 - K_c) \right) - \\ & \left. - 2\delta \pi^2 \cos^2 \alpha C_{cone} \sin \Omega (C_{cone} \sin \Omega + x)^2 \right\}; \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$b_3 = 6(C_{cone} \sin \Omega + x)^5 (1 - K_c)^3 (\pi C_{cone} \cos \Omega - K_c + 1); \quad (5.61)$$

$$b_4 = (C_{cone} \sin \Omega + x)^6 (1 - K_c)^4. \quad (5.62)$$

При значеннях $C_{cone} = 0$ отримаємо рівняння для конічної оболонки, яке приведене у роботах [25, 60]:

$$W_{cone}^{IV}(x) + \frac{6}{x} W_{cone}'''(x) + \left(\frac{6}{x^2} + \frac{\eta_{cone} P^2}{x^3} \right) W_{cone}''(x) - \left(\frac{\chi_{cone} P^3}{x^3} - \frac{P^4}{x^6} \right) W_{cone}(x) = 0. \quad (5.63)$$

Окрім того це рівняння збігається з рівнянням (4.9).

5.4 Метод розв'язання основних рівнянь стійкості оболонки типу «бочка-оживало»

З метою узгодження шуканих критичних тисків на «бочкоподібних» і «оживальних» відсіках здійснюється зворотний перехід до розмірного зовнішньому тиску q через формули (5.33) і (5.41).

Для отримання рішення поставленого завдання застосовується метод скінченних різниць, в якому диференціальне рівняння зводиться до системи різницевих рівнянь щодо значень шуканої функції прогину $\{W_i\}_{i=0}^N$ в точках розбиття відрізка $[a;b]$ на N рівних частин. Через $H = \frac{b-a}{N}$ позначається крок розбиття. Для «бочкоподібної» частини $[a;b] = [x_0; 1]$, «оживальної» – $[a;b] = [0; 1]$. У кожній з внутрішніх точок $x_k = a + kH$, $k = \overline{1, N-1}$ відрізка $[a;b]$ похідні від функції W представляються центральними кінцевими різницями другого порядку [35]:

$$W'(x_k) = \frac{1}{12H} (-W_{k+2} + 8W_{k+1} - 8W_{k-1} + W_{k-2}) + \frac{H^4}{18} R_5, \quad (5.64)$$

$$W''(x_k) = \frac{1}{12H^2}(-W_{k+2} + 16W_{k+1} - 30W_k + 16W_{k-1} - W_{k-2}) + \frac{H^4}{54}R_6, \quad (5.65)$$

$$W'''(x_k) = \frac{1}{2H^3}(W_{k+2} - 2W_{k+1} + 2W_{k-1} - W_{k-2}) + \frac{17H^2}{60}R_5, \quad (5.66)$$

$$W^{(4)}(x_k) = \frac{1}{H^4}(W_{k+2} - 4W_{k+1} + 6W_k - 4W_{k-1} + W_{k-2}) + \frac{17H^2}{90}R_6, \quad (5.67)$$

де $|R_i| < \max_{x \in [l_0/l_1; 1]} |W^{(i)}(x)|$, $i = 5; 6$.

5.5 Формулювання граничних умов

У граничних умовах похідні представляються скінченими різницями першого порядку. У випадках жорсткого закріплення, шарнірного опирання відповідне рівняння можна записати у вигляді:

$$W_0 = 0, W_{-1} = W_1; W_N = 0, W_{N+1} = W_{N-1}, \quad (5.68)$$

$$W_0 = 0, W_{-1} = -W_1; W_N = 0, W_{N+1} = -W_{N-1}. \quad (5.69)$$

Залежності (5.68), (5.69) дозволяють виключити змінні W_{-1} , W_{N+1} , W_0, W_N в отриманій системі.

Прирівнювання визначника цієї системи до нуля, призводить до характеристичного рівняння щодо параметрів хвилеутворення χ , n або q, n .

Для сполучення «бочкоподібної» і «оживальної» оболонок слід зауважити, що $R = R_{1,cone} = l_1 \cos \alpha$. Сполучення оболонок розглянутих типів починається з пошуку узгоджених значень кутових коефіцієнтів дотичних обох відсіків з метою визначення значень параметрів підйому C_{cyl} і C_{cone} . Відповідне умова узгодження має вигляд:

$$C_{cyl}R \frac{\pi}{L} = \text{ctg } \alpha - C_{cone}R \frac{\pi}{(l_1 - l_0) \sin \alpha}. \quad (5.70)$$

Наведені вище обмеження на розміри секцій гарантують додатну визначеність обох частин (5.70).

Сполучення оболонок при відсутньому стикувальному шпангоуті проводиться прирівнюванням значень функції прогину і її похідних в точці сполучення. В даному випадку маємо:

$$W_{cone}(1) = W_{cyl}(0), W'_{cone}(1) = W'_{cyl}(0), W''_{cone}(1) = W''_{cyl}(0), W'''_{cone}(1) = W'''_{cyl}(0). \quad (5.71)$$

У разі наявності стикувального шпангоута, умова узгодження (5.70) забезпечує локально конусну форму оболонкової конструкції в околі точки сполучення з кутом при «основі» такого конуса:

$$\beta^* = \text{arcctg} \frac{\pi RC_{cyl}}{L}, \quad \text{або} \quad \beta^* = \text{arcctg} \left(\text{ctg} \alpha - C_{cone} R \frac{\pi}{(l_1 - l_0) \sin \alpha} \right). \quad (5.72)$$

5.6 Умови спряження відсіків конструкції через шпангоут

Умови сполучення секцій оболонки через проміжний шпангоут, який має жорсткість на вигин, як в площині початкової кривизни, так і з неї. Зміна напружений-деформованого стану під час переходу через шпангоут на циліндрі і на конусі вивчено в роботах [10, 60], де, зокрема, отримані залежності:

$$W_{left}(t_1) = W_{right}(t_2), \quad W'_{left}(t_1) = W'_{right}(t_2), \quad (5.73)$$

$$W''_{left}(t_1) + G_2 W'_{left}(t_1) = W''_{right}(t_2), \quad W'''_{left}(t_1) - G_1 W_{left}(t_1) = W'''_{right}(t_2), \quad (5.74)$$

де G_1 і G_2 – параметри безрозмірних жорсткостей шпангоутів, що підкріплюють відповідну оболонку:

$$G_{cyl,1} = G_1^* \frac{R^3}{r_{ring}^3}, \quad G_{cyl,2} = G_2^* \frac{R^3}{r_{ring}^3}, \quad (5.75)$$

$$G_{cone,1} = G_1^* \frac{R^3 L_{cone}}{\cos^2 \beta r_{ring}^4}, \quad G_{cone,2} = G_1^* \frac{R^3 L_{cone}}{r_{ring}^4}, \quad (5.76)$$

$$G_1^* = \frac{n^4 (n^2 - 1)^2 (EJ)_x^{ring}}{Eh R^3}, \quad G_2^* = \frac{n^2 (n^2 - 1)^2 (EJ)_z^{ring}}{Eh R^3 (n^2 + 1)}, \quad (5.77)$$

J_x^{ring} , J_z^{ring} – моменти інерції відповідно при вигині шпангоута в площині початкової кривизни і з плоскості, r_{ring} – радіус шпангоута, L_{cone} – довжина конуса, на якому закріплений шпангоут, з кутом при основі β ; значення $t_{1,2}$ відповідають координатам сполучення секцій.

У конкретних випадках сполучення маємо:

1) для проміжного шпангоута на «бочкоподібній» оболонці: $t_1 = t_2$ відповідає координаті розташування шпангоута $r_{ring} = R(1 + C_{cyl} \sin \pi t_1)$;

2) для проміжного шпангоута на «оживальній» оболонці: $t_1 = t_2$, $r_{ring} = R(t_1 + C_{cone} \sin \Omega|_{x=t_1})$, $L_{cone} = \frac{r_{ring}}{\cos \beta}$, $\beta = \text{arcctg} \left(\text{ctg} \alpha \left[1 + C_{cone} \frac{\pi l_1 \cos \Omega|_{x=t_1}}{l_1 - l_0} \right] \right)$;

3) для стикувального шпангоута: $t_1 = 1$, $t_2 = 0$, $r_{ring} = R$, $L_{cone} = \frac{R}{\cos \beta}$,

$\beta = \beta^*$.

5.7 Модифікація системи різницевих рівнянь при сполученні «оживальної» і «бочкоподібної» секцій

Для представлення похідних в диференціальному рівнянні (5.46) (для «оживало») використовуються кінцеві різниці (5.64)–(5.67), з такою ж нумерацією, кроком $H_1 = \frac{1-x_0}{N}$. Як граничні умови вибирається одна з перших пар в співвідношеннях (5.71).

Стосовно рівняння (5.38) (для «бочки»), то для нього скінченні різниці у внутрішніх точках відрізка використовуються з нумерацією від $N+4$ до $2N+2$ і мають крок $H_2 = \frac{1}{N}$. У крайовій $(2N+3)$ -ій точці записується співвідношення, аналогічне другій парі з рівності (5.71). Наприклад, шарнірне спирання представляється рівністю $W_{2N+3} = 0, W_{2N+4} = -W_{2N+2}$.

Для того, щоб отримати кінцеві різниці для умов сполучення, застосовується формула Тейлора в точках W_N і W_{N+3} з приростами до точок $W_{N-2}, W_{N-1}, W_{N+1}$ і $W_{N+2}, W_{N+4}, W_{N+5}$ відповідно. Умови (5.73), (5.74) представляються у вигляді:

$$\begin{aligned} W_N &= W_{N+3}, \quad \frac{1}{6H_1}(W_{N-2} - 6W_{N-1} + 3W_N + 2W_{N+1}) = \\ &= \frac{1}{6H_2}(-2W_{N+2} - 3W_{N+3} + 6W_{N+4} - W_{N+5}), \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1^2}(W_{N-1} - 2W_N + W_{N+1}) + \frac{G_2}{6H_1}(W_{N-2} - 6W_{N-1} + 3W_N + 2W_{N+1}) = \\ = \frac{1}{H_2^2}(W_{N+2} - 2W_{N+3} + W_{N+4}), \end{aligned} \quad (5.79)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1^3}(-W_{N-2} + 3W_{N-1} - 3W_N + W_{N+1}) - G_1W_N = \\ = \frac{1}{H_2^2}(-W_{N+2} + 3W_{N+3} - 3W_{N+4} + W_{N+5}). \end{aligned} \quad (5.80)$$

Аналогічно проводиться сполучення прольотів оболонок з великою кількістю дискретно розташованих шпангоутів.

Характеристичне рівняння відносно параметрів критичного навантаження і хвилеутворення q, n отримується, як описано раніше. З характеристичного рівняння визначається значення числа хвиль n в окружному напрямі, що відповідає найменшому значенню критичного тиску q .

5.8 Приклад застосування запропонованого підходу. Аналіз і достовірність чисельних результатів

Розглядається оболонкова конструкція з характеристиками: $h_0 = 0,3$ см, $E = 7 \cdot 10^5$ кг/см², $\nu = 0,32$. «оживальна» секція вибирається з параметрами: $l_1 = 182$ см, $l_0 = 0,45 l_1$, $\alpha = 75^\circ$, «бочкоподібна» – $L = 2,5R$. Розрахунки проведені для шарнірно опертих оболонок. Досліджено вплив відносної висоти підйомистості непідкріплених «бочки» C_{cyl} , «оживало» C_{cone} на критичний тиск q . Відповідні залежності зображено на рис. 5.3. Виявлено збільшення критичного тиску із зростанням висоти меридіану оболонки.

Рівностійкість оболонкових секцій з умовою узгодження (5.70) виконується для нескінченної безлічі коефіцієнтів C_{cyl} і C_{cone} . Необхідно вибрати таку пару, для якої виконана умова рівностійкості циліндричного і кінцевого прольотів оболонки, кожна з яких шарнірно оперта. Наближені значення коефіцієнтів можна визначити, користуючись графіками рисунку 5.3, а потім уточнити за формулою (5.70). Так, для оболонкової конструкції із заданими параметрами, при значеннях:

$$C_{cone} = 0,06258642604, \quad C_{cyl} = 0,137, \quad (5.81)$$

«оживальний» відсік має критичний тиск $q_{ogive} = 2,98$ кг/см², «бочкоподібний» – $q_{bar} = 2,97$ кг/см². При цих же значеннях відносної висоти меридіана складена конструкція має критичний тиск $q_{constr} = 2,3$ кг/см².

Для постановки проміжного шпангоута на «оживальну» оболонку визначається найбільш раціональне (з точки зору локальної рівностійкості) його положення на кінчній (без підйому) оболонці. Якщо довжина ділиться у відношенні:

$$L_{left} : L_{right} = 1,809 : 1, \quad (5.82)$$

відлічуючи від меншої основи конуса, то критичне значення тиску його «лівої» і «правої» частин дорівнюють відповідно $q_{left} = 3,13 \text{ кг/см}^2$ і $q_{right} = 3,11 \text{ кг/см}^2$.

При цьому конус без шпангоута має критичний тиск $q_{cone} = 1,68 \text{ кг/см}^2$.

Вводяться позначення для безрозмірних зусиль:

$$\hat{T}_{cyl/cone} = \frac{T}{T_{classic, cyl/cone}}, \quad \hat{q}_{cyl/cone} = \frac{q}{q_{classic, cyl/cone}}, \quad (5.83)$$

$$T^* = \frac{T}{Eh_0^2}, \quad q^* = \frac{q}{q_{constr}}. \quad (5.84)$$

В формулах (5.83) класичні значення критичних зусиль для циліндра і конуса обчислюються за формулами [16]:

$$T_{classic, cyl} = 0,605Eh^2, \quad q_{classic, cyl} = 0,92E \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \frac{R}{L}, \quad (5.85)$$

$$T_{classic, cone} = \frac{2\pi Eh^2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad q_{classic, cone} = C_1 E \left(\frac{h}{l_1} \right)^{5/2} \frac{(\text{tg} \alpha)^{3/2}}{(1-\nu^2)^{3/4}}, \quad C_1 \approx 3. \quad (5.86)$$

Розглянемо графічне представлення результатів про вплив жорсткостей шпангоутів на стійкість оболонок. У різних випадках підкріплення конструкцій надано графічне представлення результатів: залежності критичного тиску $\hat{q}_{cyl/cone}$ або q^* від жорсткості шпангоутів в площині G_1^* при фіксованих значеннях $G_2^* = 0$, або жорсткості $G_2^* = 10$ з площини:

1) на рисунку 5.4 – для «оживальної» оболонки, підкріпленої одним проміжним шпангоутом, розташованому так, щоб задовольнити співвідношенню (5.49) при фіксованій під'ємності $C_{cone} = 0$ (сині суцільні лінії), $C_{cone} = 0,06$ (червоні штрихові), $C_{cone} = 0,09$ (зелені штрих-пунктирні);

2) на рисунку 5.5 – для «бочкоподібної» оболонки, підкріпленої одним і двома проміжними шпангоутам, які ділять довжину осі симетрії «бочки» на рівні величини, при фіксованій під'ємності $C_{cyl} = 0$ (сині суцільні лінії), $C_{cyl} = 0,05$ (червоні штрихові), $C_{cyl} = 0,1$ (зелені штрих-пунктирні), $C_{cyl} = 0,15$ (помаранчеві пунктирні);

3) на рисунку 5.6 – для конструкції «бочка-оживало» з параметрами, що задовольняють (5.72)–(5.74), яка підкріплена шпангоутами.

На рис. 5.4–5.5 залежності, що відповідають значенню $G_2^* = 10$, розташовані вище, ніж залежності, що відповідають значенню $G_2^* = 0$. Суцільним лініям на рис. 5.4–5.5 відповідають відсіки без підйому меридіану, тобто циліндричним і конічним оболонкам.

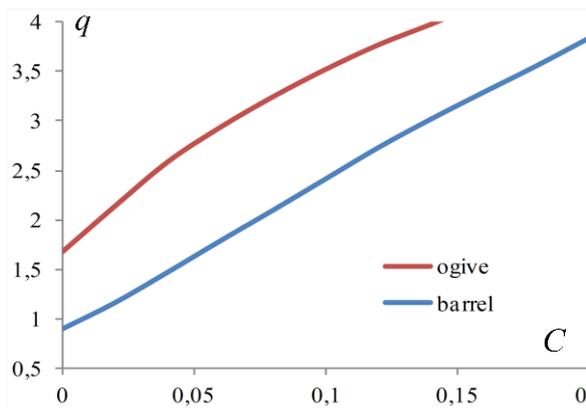


Рисунок 5.3 – Вплив відносної висоти меридіану непідкріплених оболонок «бочки» і «оживало» на значення критичного тиску

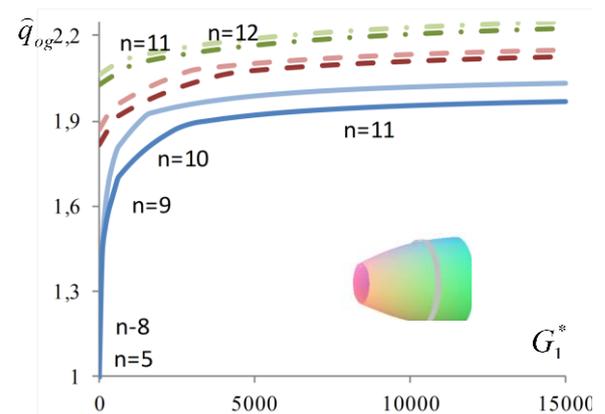
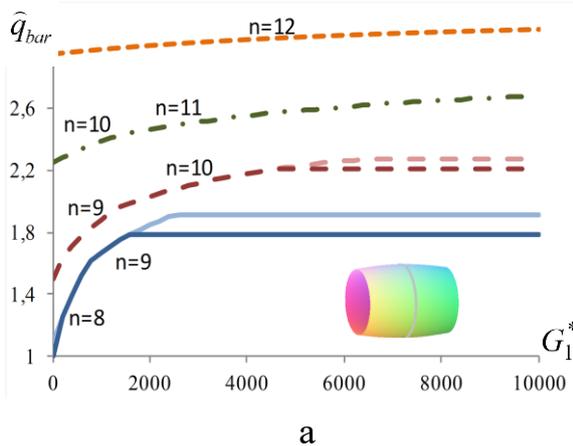
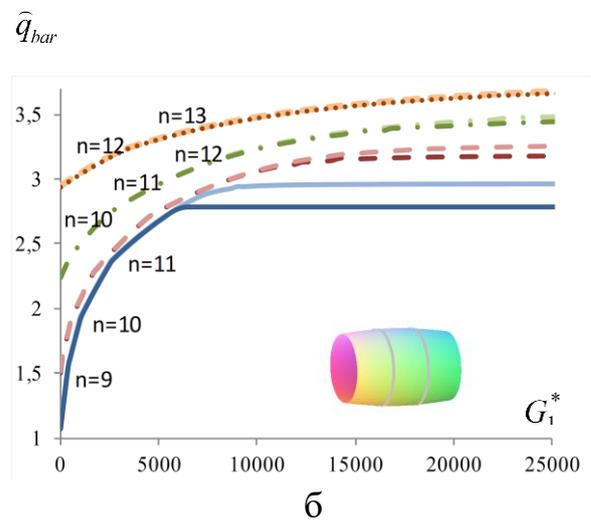


Рисунок 5.4 – Вплив жорсткості проміжного шпангоута на критичний тиск «оживального» відсіку



а



б

Рисунок 5.5 – Вплив параметрів жорсткості одного (а) або двох (б) проміжних шпангоутів на величину критичного тиску «бочкоподібного» відсіку

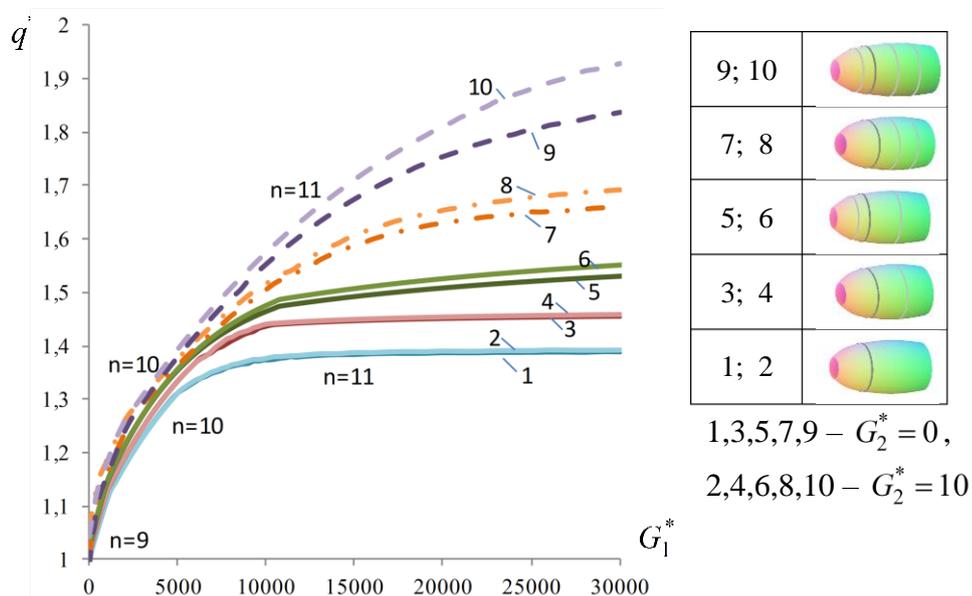


Рисунок 5.6 – Вплив параметрів жорсткості шпангоутів на величину критичного тиску конструкції «бочка-оживало»

Вплив жорсткості шпангоутів в їх площинах на стійкість конструкції. Наявність шпангоутів на оболонках призводить до збільшення стійкості, проте із зростанням параметру жорсткості G_1^* шпангоутів в їх площині критичний тиск стабілізується. Це означає, що немає необхідності нарощувати жорсткість шпангоута для забезпечення подальшої стійкості конструкції. Цей висновок дозволяє вирішувати задачу зниження загальної маси оболонкової конструкції. Аналіз стабілізуючого ефекту полягає у такому: при одному шпангоуті на «оживальній» секції для параметрів жорсткості $G_1^* = \bar{G}_1^* = 1000$ і $G_1^* = 2000$ критичні тиски відрізняються менше, ніж на 1%. Для «бочкоподібної» секції з одним шпангоутом аналогічну властивість має оболонка з параметром жорсткості $\bar{G}_1^* = 2000$. Проте, зі збільшенням кількості шпангоутів не лише значно зростає критичне навантаження, але і значення жорсткості \bar{G}_1^* , починаючи з якого воно стабілізується. Крім того, на значення критичного тиску впливає висота підйому меридіану. При двох шпангоутах на

циліндричній оболонці параметр $\bar{G}_1^* = 7000$, а на «бочкоподібній» оболонці з відносним підйомом $C_{cyl} = 0,05$ або $C_{cyl} = 0,1$ потрібно буде вибрати значення параметрів $\bar{G}_1^* = 19000$, чи $\bar{G}_1^* = 22000$, відповідно.

Аналогічна ситуація має місце і для складеної конструкції. Перехідне значення до тиску, що стабілізується, має параметр жорсткості $\bar{G}_1^* = 7000$, якщо на оболонці типу «бочка-оживало» закріплений один стикувальний шпангоут; параметр жорсткості $\bar{G}_1^* = 10000$, якщо на «бочці» є присутнім ще один шпангоут. Кожен додатковий шпангоут збільшує стійкість оболонки, проте характер такого збільшення залежить від місця розташування додаткового шпангоута. Якщо третій шпангоут помістити на оболонку типу «оживало», то стійкість конструкції буде нижча, ніж у разі його розміщення на оболонці типу «бочка», крім того, нижче буде і значення стабілізуючої жорсткості. Жорсткість шпангоута із початкової площини кривизни впливає на стійкість тільки у разі рівностійкості секцій. Інакше, відхилення між критичними тисками може бути істотним.

Саме такий ефект можна спостерігати для конічної оболонки з проміжним шпангоутом. Хоча первинне розташування шпангоута вибране рівностійким, але оболонка залишається такою лише для значень параметру жорсткості $G_1 < 100$. Це означає, що слід вносити коригування в положення шпангоута при більшій його жорсткості. Схожу картину можна спостерігати для циліндричної оболонки з двома шпангоутами і конструкції «бочка-оживало» з чотирма шпангоутами, один з яких розміщений на оболонці типу «оживало».

Вплив висоти під'ємності меридіану на стійкість підкріплених оболонок зводиться до наступних результатів. Зростання висоти підйому призводить до збільшення критичного тиску при конкретних значеннях параметрів жорсткостей підкріплюючих шпангоутів. Помічається, що закріплення шпангоута на «лівому» або «правому» відсіку відіб'ється на вигляді рівнянь сполучення (5.78)–(5.80), де доданки, що містять коефіцієнти жорсткості опиняться в правій або лівій частині (5.78)–(5.80) відповідно. У разі закріплення його на обох частинах, такі доданки будуть в обох частинах (5.78)–(5.80).

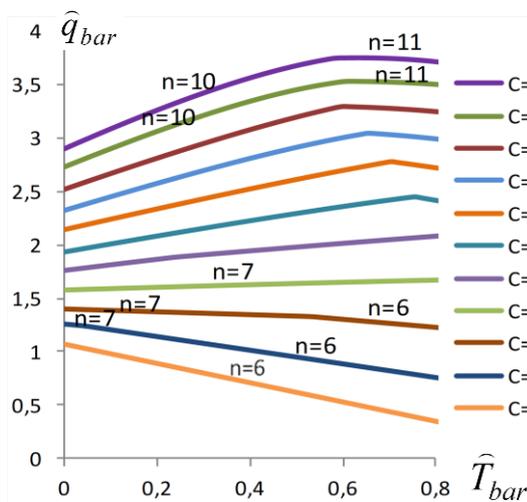
Розрахунки показали, що при однаковому виборі жорсткостей на «правому» або «лівому» відсіку значення критичного тиску є рівними. По відношенню до випадку закріплення шпангоута на обох частинах, результати порівнювалися з випадком, коли шпангоут закріплений на одній з частин з сумою жорсткісних характеристик. При цьому виявлено достатній збіг чисельних даних.

Розглянемо графічне представлення результатів про вплив осьової стискаючої сили на стійкість оболонок. У різних випадках підкріплення конструкцій надано графіки залежностей безрозмірного критичного тиску $\hat{q}_{cyl/cone}$ від безрозмірної стискаючої сили $\hat{T}_{cyl/cone}$ або T^* :

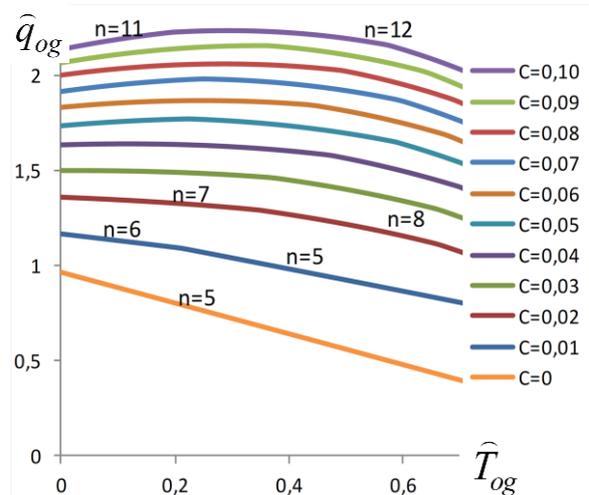
1) на рисунку 5.7 – для непідкріплені «бочкоподібної» і «оживальної» оболонок для різних значень підйому C_{cyl} і C_{cone} відповідно (на рис. 5.6 їх значення підписані як «С»);

2) на рисунку 5.8 – для підкріплених «бочкоподібної» і «оживальної» оболонок для різних значень підйому C_{cyl} і C_{cone} відповідно і різних жорсткостей шпангоутів в площині і з площини (на рис. 5.8 їх позначено як «G1» і «G2»);

3) на рисунку 5.9 – для підкріпленої оболонкової конструкції типу «бочка-оживало» з параметрами, що задовольняють (5.72)–(5.74), яка підкріплена шпангоутами так.

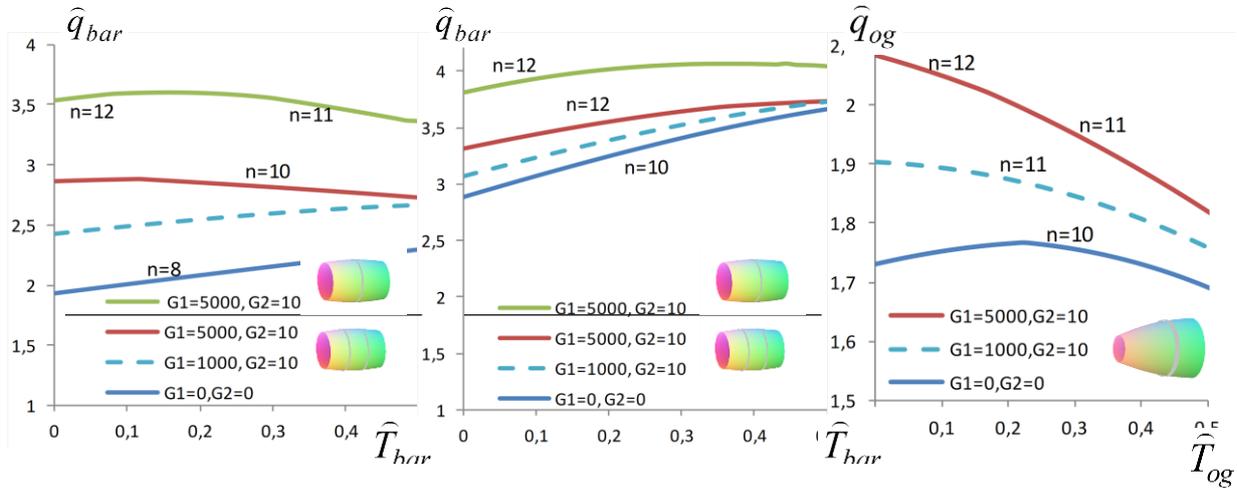


а - для «бочкоподібного» відсіку



б - для «оживального» відсіку

Рисунок 5.7 – Залежність критичного тиску $\hat{q}_{cyl/cone}$ від осьової стискаючої сили $\hat{T}_{cyl/cone}$



а - для «бочки», $C_{bar} = 0,05$; б - для «бочки», $C_{bar} = 0,1$; в - для «оживало», $C_{og} = 0,05$

Рисунок 5.8 – Залежність критичного тиску $\hat{q}_{cyl/cone}$ від осьового стискаючого зусилля $\hat{T}_{cyl/cone}$

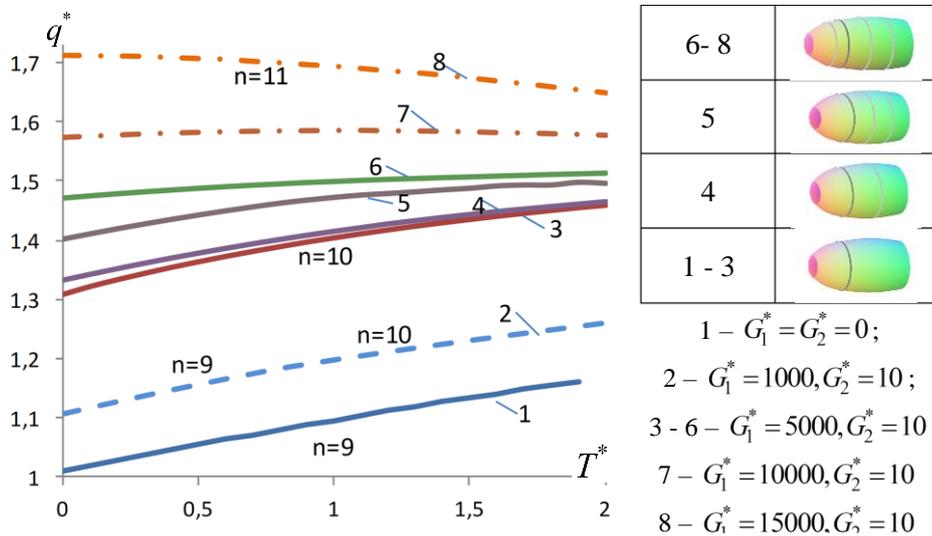


Рисунок 5.9. – Залежність критичного тиску q^* конструкції «бочка-оживало» від осьової стискаючої сили T^* для різних способів підкріплення

Розглянемо вплив осьового стиснення на стійкість підкріплених оболонок (всі лінії на рис. 5.7 і сині суцільні лінії на рис. 5.8–5.9). Як відомо [16, 25, 54,

60], при комбінованому навантаженні зовнішнім тиском і осьовим стисненням гладкою циліндричної або конічної оболонки збільшення осьової стискаючої сили призводить до зменшення критичного тиску і зменшення хвильових чисел (числа хвиль в окружному напрямку). У випадку опуклих оболонок типу «бочка», «оживало» і «бочка-оживало» виявлено істотна відмінність в характері форми втрати стійкості опуклих оболонок в порівнянні з гладкими. Для конструкцій з даними характеристиками, якщо відносне відхилення твірної від гладкого положення перевищує 4%, то зростання осьового стиснення призводить до зміни форми хвилеутворення, що відбивається на збільшенні хвильового числа і зростанні критичного тиску, а потім до зниження критичного тиску і хвильового числа. Отриманий ефект пояснюється тим, що для оболонок із вказаними значеннями підйому, незначне осьове зусилля призводить до розтягувальних напружень в кільцевому напрямку, які збільшують значення критичного зовнішнього тиску. При значних осьових зусиллях, в кільцевому напрямку переважають стискаючі напруги, що призводить до зниження нормального критичного тиску.

Розглянемо характер впливу осьового стиснення на стійкість підкріплених оболонок (див. рис. 5.8–5.9). Виявлений ефект для непідкріплених оболонок зберігається для підкріплених оболонок при деяких поєднаннях значень підйому оболонки і жорсткості шпангоутів. Однак, наявність досить жорстких шпангоутів на опуклій оболонці з незначною відносною підйому може нівелювати виявлений ефект, що можна спостерігати для конічної оболонки (рис. 5.6, а) з підйомом $C_{cone} = 0,05$ і жорсткостей $G_1^* = 1000$, $G_2^* = 10$ (блакитна пунктирна лінія) і червона лінія) і $G_1^* = 5000$, $G_2^* = 10$ (червона лінія).

У випадку складеної конструкції, зниження даного ефекту продемонстровано для чотирьох досить жорстких шпангоутів (штрих-пунктирні лінії 7, 8 на рис. 5.8). Дане явище пояснюється тим, що для оболонок малої кривизни меридіана ефект впливу шпангоутів більш істотний, ніж ефект від розтягувальних зусиль в кільцевому напрямку, викликаних осьовим стисненням.

Достовірність здобутих результатів досліджується у три етапи. Спочатку – порівнянням значень критичних тисків у граничних випадках досліджуваної системи. При нульовому значенні під'ємності меридіану отримані характеристичні рівняння для циліндричної та конічної оболонок, а також значення критичного тиску узгоджуються (до 10%) з результатами робіт [25, 62], які здобуті іншими методами. На наступному етапі, в межах розрахунків даної роботи, необхідно було провести процедуру стикування прольотів оболонки. При нульових жорсткості шпангоутів порівнювалися результати цільної і сполученої оболонок. Для однієї ділянки сполучення відхилення становило до 4%, для двох – до 7%. Крім того, проведено порівняння результатів методу кінцевих різниць із збільшеною кількістю точок розбиття вздовж осьової координати кожного прольоту оболонки. Похибка склала до 4%. Слід зазначити, що значне збільшення кількості точок ділення не проводилося, щоб уникнути накопичувальної обчислювальної помилки.

5.9 Висновки

В розділі досліджена стійкість оболонкової конструкції типу «бочка-оживало», що перебуває під впливом зовнішнього тиску. Підйом серединної поверхні оболонок апроксимується залежностями синусоїдального типу.

Виведені розв'язувальні диференціальні рівняння для дослідження на стійкість «бочкоподібної» і «оживальної» оболонок з урахуванням радіусу їх кривизни.

Стійкість складеної підкріпленої конструкції «бочка-оживало» і окремих її відсіків знайдена за допомогою методу скінченних різниць.

Виявлено суттєвий вплив відносної висоти меридіану на стійкість і критичний тиск досліджуваної системи.

Вказаний підхід до пошуку параметрів рівностійкості до локальних і загальних форм випинання, а також для обчислення раціональних параметрів жорсткості дискретно розташованих підкріплюючих шпангоутів.

Наведено аналіз впливу кривизни серединної поверхні відсіків і складеної оболонкової конструкції типу «бочка-оживало» на величину критичних зусиль і характер втрати стійкості досліджуваної системи при спільній дії зовнішнього тиску і осьових стискаючих зусиль. Для оболонкових секцій з відносним відхиленням значення кривизни меридіана, що перевищує 4%, з ростом осьової стискаючої сили виявлений ефект зростання критичного тиску в 1,5...2 рази в певному діапазоні зміни осьової сили.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вирішенню наукової проблеми, пов'язаної з створенням методів визначення напружено-деформованого стану, руйнівних і критичних навантажень підкріплених оболонкових конструкцій складної конфігурації аерокосмічної техніки під дією комбінованого зовнішнього навантаження з врахуванням особливостей геометричної конфігурації, дискретності розташування проміжних шпангоутів і розробці методики визначення параметрів рівної стійкості відсіків конструкції. Найбільш важливі наукові і практичні результати роботи полягають у такому:

- на основі аналітичного огляду сучасного стану досліджуваної проблеми за вітчизняними та закордонними публікаціями надано аналіз підходів і методів визначення напружено-деформованого стану і стійкості оболонкових конструкцій, зокрема МСЕ і гібридними асимптотичними методами;

- вперше запропоновані математична модель і методика чисельного дослідження напружено-деформованого стану та міцності силової оболонкової конструкції, зокрема двигуна РН, в процесі навантаження зростаючим внутрішнім тиском з урахуванням процесів пружно-пластичного деформування;

- запропоновано методику для дослідження інтенсивності напружень у підкріпленому паливному баку ракети-носія при наявності тріщини у місці знаходженні максимального напруження;

- вперше на базі використання методів фазних інтегралів та ВКБ-Гальоркін методу створено асимптотико-чисельний підхід визначення стійкості підкріпленої оболонкової конструкцій типу «циліндр-конус» і «бочка-оживало» при комбінованому статичному зовнішньому навантаженні;

- запропонована математична модель реалізована на основі методу початкових параметрів у матричній формі із застосуванням асимптотичних

методів для розв'язання сингулярних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами, які описують стійкість підкріплених відсіків конструкцій РКТ;

- надано аналіз геометричних характеристик і параметрів жорсткості складеної оболонкової системи по відношенню до локальних і загальних форм випинання для різних комбінацій зовнішнього навантаження і граничних умов;

- отримала розвиток фізична модель деформування підкріпленої кільцевими ребрами жорсткості оболонки складеної конфігурації з урахуванням дискретного характеру розташування і жорсткості шпангоутів з площини початкової кривизни;

- запропоновано модель оболонкової конструкції типу «бочка-оживало» і виявлено вплив кривизни меридіана серединної поверхні зазначеної конструкції на її стійкість;

- запропоновані аналітичні розв'язки задач про напружено-деформований стан та стійкість оболонкових конструкцій аерокосмічного машинобудування складеної конфігурації можуть служити основою для подальшого використання методів скінченних і граничних елементів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аверьянов А. П., Азаренко Л. Г., Вокин Г. Г. и др. Введение в ракетно-космическую технику. Москва : Инфра-Инженерия, 2018. 380 с.
2. Аврамов К. В., Морачковский О. К., Тонконоженко А. М., Кожарин В. Ю., Дегтяренко П. Г. Численный анализ разрушающих нагрузок орбитальных баков ракетополетителей. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2014. № 5 (112). С. 40–46.
3. Аврамов К. В., Чернобрышко М. В., Батутина Т. Я., Дегтяренко П. Г., Тонконоженко А. М. Динамическая неустойчивость обтекателей ракет. *Космічна наука і технологія*. 2015. **21**, № 1. С. 10–14.
4. Акимов Д. В., Грищак В. З., Гоменюк С. И., Гребенюк С. Н., Лисняк А. А., Чопоров С. В., Ларионов И. Ф., Клименко Д. В., Сиренко В. Н. Математическое моделирование и исследование прочности силовых элементов конструкций космических летательных аппаратов. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2015. № 3. С. 6–13.
5. Акимов Д. В., Грищак В. З., Гоменюк С. И., Ларионов И. Ф., Клименко Д. В., Сиренко В. Н. Экспериментальное исследование деформированного состояния и прочности межступенчатого отсека ракетополетителя при статическом внешнем нагружении. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2016. № 1. С. 82–89.
6. Акимов Д. В., Грищак В. З., Ларионов И. Ф., Гоменюк С. И., Клименко Д. В., Чопоров С. В., Гребенюк С. Н. Математическое обеспечение анализа прочности силовых элементов ракетно-космической техники. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2017. Вип. 26. С. 5–21.
7. Акимов Д. В., Грищак В. З., Гребенюк С. Н., Гоменюк С. И. Сравнительный анализ методик расчета напряженно-деформированного

состояния элементов конструкции ракетносителя. *Нові матеріали та технології в металургії та машинобудуванні*. 2016. № 2. С. 116–120.

8. Алумяэ Н. А. Теория упругих оболочек и пластинок. Москва : Наука, 1972. Т.3 : Механика в СССР за 50 лет. 1917–1967. С. 227–266.

9. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем : 2-е изд., перераб. и доп. Москва : Машиностроение, 1991. 336 с.

10. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. Москва : Машиностроение, 1984. 264 с.

11. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. Москва : Наука, 1974. 448 с.

12. Атисков А. Ю., Баранова Д. А., Карпов В. В., Москаленко Л. П., Семенов А. А. Компьютерные технологии расчета оболочек. Санкт-Петербург : СПбГАСУ, 2012. 184 с.

13. Бабель Г. В., Кристенсен Р. Х., Диксон Г. Х. Проектирование, контроль качества и испытание нагружаемых давлением конструкций космических аппаратов. *Тонкостенные оболочечные конструкции*. Москва, 1980. С. 234–260.

14. Баранов В. Л., Фетисов И. В., Щитов В. Н. Оптимизация формы головной части индентора. *Известия Тульского государственного университета. Естественные науки*. 2013. Вып. 2, Ч. 2. С. 17–27.

15. Басов К. А. ANSYS для конструкторов. Москва : ДМК Пресс, 2009. 248 с.

16. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Москва : Наука, 1967. 984 с.

17. Ворович И. И., Шленев М. А. Пластины и оболочки. *Итоги науки. Механика. Сборник обзоров*. Москва : Наука, 1963. С. 91–176.

18. Вышенский В. В., Кузнецов Е. Н., Михайлов П. Д. Тела вращения с минимальным сопротивлением в трансверсальном потоке газа. *Ученые записки ЦАГИ*. 1992. № 2. С. 78–82.

19. Галишин А. З. Осесимметричное термовязкоупругопластическое деформирование тонких гибких оболочек с учетом повреждаемости материала. *Прикладная механика*. 2008. Т. 44, № 2. С. 49–57.
20. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. Москва : Наука, 1978. 260 с.
21. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Критические нагрузки трехслойных цилиндрических и конических оболочек. Новосибирск : Западно-сибирское книжное издательство, 1966. 224 с.
22. Григоренко Я. М., Будаков В. Д., Григоренко О. Я. Розв’язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів : навчальний посібник. Миколаїв : Іліон, 2010. 294 с.
23. Григоренко Я. М., Василенко А. Т. Теория оболочек переменной жесткости. Киев : Наук.думка, 1981. 544 с.
24. Грищак В. З., Грищак Д. Д., Д’яченко Н. М., Дегтяренко П. Г. До проблеми стійкості та раціонального проектування складених підкріплених оболонкових конструкцій при статичному зовнішньому навантаженні. *VIII Міжнародна наук.-техн. конф. «Актуальні проблеми механіки та міцності конструкцій»* (м. Запоріжжя, 12 червня 2020 р.). Запоріжжя, 2020. URL: <https://drive.google.com/file/d/1fQD5nUevQEDIDK4I5z2ITCeHq7ZFCkAZ/view>.
25. Грищак В. З., Д’яченко Н. Н. Определение областей устойчивости конической оболочки при комбинированном нагружении на базе гибридного асимптотического похода. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 2. С. 33–46.
26. Грищак В. З., Маневич А. И. Влияние жесткости шпангоутов на изгиб из плоскости на устойчивость подкрепленной цилиндрической оболочки. *Гидроаэромеханика и теория упругости*. 1972. Вып. 14. С. 121–130.
27. Гудрамович В. С. Моделирование напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций ракетной техники и энергетики. *Техническая механика*. 2013. № 4. С. 97–104.

28. Гудрамович В. С., Гарт Е. Л., Рябоконт С. Ф. Применение проекционно-итерационных схем МКЭ к решению задач упругопластического деформирования оболочек с отверстиями. *Вісник Національного університету ім. Т. Шевченка. Серія фізико-математичні науки*. 2013. Вип. 3. С. 55–58.

29. Дегтяренко П. Г., Грищак В. З., Грищак Д. Д., Д'яченко Н. Н. Рівностійкість до локальних і загальних форм випинання шпангоутних оболонкових систем ракетноносіїв при комбінованому зовнішньому навантаженні. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій*: тези доповідей другої міжнародної наук.-техн. конф. Пам'яті академіка НАН України В.І. Моссаковського (до 100-річчя від дня народження). Дніпро : 2019. С. 311.

30. Дегтяренко П. Г., Грищак В. З., Грищак Д. Д., Д'яченко Н. Н. К проблеме равноустойчивости подкрепленной оболочечной конструкции при комбинированном нагружении. *Космічна наука і технологія*. 2019. Т. 25, № 6. С. 4–14.

31. Дегтяренко П. Г., Грищак В. З., Грищак Д. Д., Д'яченко Н. Н. Постановка и основные разрешающие уравнения задачи устойчивости оболочечной конструкции типа «бочка-оживало» при действии внешнего давления. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2019. Т. 30. С. 33–52.

32. Дегтяренко П. Г., Грищак В. З., Д'яченко Н. Н. К расчету на устойчивость комбинированной оболочечной конструкции с учетом дискретности расположения промежуточных шпангоутов. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2019. Т. 29. С. 113–131.

33. Зиновьев А. М., Кушнарев А. П., Кондратьев А. В., Потапов А. М., Кузнецов А. П., Коваленко В. А. Конструктивно-технологическое решение и несущая способность межступенного отсека ракеты-носителя «Циклон-4» из полимерных композиционных материалов. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2013. 33(100). С. 46–52.

34. Ильин А. М., Кожевников Е. А., Хлыбов В. И. Использование технологии компьютерного моделирования на базе конечно-элементного анализа в расчетах динамической нагруженности и температурных режимов ракетно-космической техники Хруничева. *Тр. Рос. Конф. пользователей системы MSC 2003 года*. Москва : MSC.Software Corporation. URL: http://www.mssoftware.ru/document/conf/Moscow_conf/conf_2003/kb_makeeva.zip.
35. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва : Наука, 1971. 576 с.
36. Капустин С. А., Киселев Л. К., Трубицин Л. Д. Решения задач термопластичности тонкостенных пространственных конструкций методом конечных элементов. *Тепловые напряжения в элементах конструкций*. 1977. Вып. 17. С. 35–38.
37. Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. Москва : Машиностроение, 1975. 376 с.
38. Клименко Д. В. Розробка методів розрахунку і прогнозування несучої здатності відсіків космічних ракет-носіїв з вирізами : дис. ... канд. техн. наук : 05.02.09. Харків, 2015. 150 с.
39. Колкунов Н. В. Основы расчета упругих оболочек. Москва : Высшая школа, 1972. 296 с.
40. Кондратьев А. В. Проектирование головных обтекателей ракет-носителей из полимерных композиционных материалов при одновременном тепловом и силовом воздействиях. *Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов*. 2010. Вып. 4. С. 11–22.
41. Кузнецов Е. Б. Метод продолжения решения и наилучшая параметризация. Москва : Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. 160 с.
42. Куркин С. А. Прочность сварных тонкостенных сосудов, работающих под давлением. Москва : Машиностроение, 1976. 184 с.
43. Лизин В. И., Пяткин В. А. Проектирование тонкостенных конструкций. Москва : Машиностроение, 1994. 384 с.

44. Липовцев Ю. В., Русин М. Ю. Прикладная теория упругости. Москва : Дрофа, 2008. 319 с.
45. Литвинов В. В., Андреев В. И., Чепурненко А. С. Устойчивость усеченной круговой конической оболочки при осевом сжатии. *Вестник МГСУ. Проектирование и конструирование строительных систем. Проблемы механики в строительстве*. 2012. № 10. С. 95–101.
46. Макаренко И. Н. Устойчивость сопряженных оболочек вращения. *Вестник СПбГУ. Сер. 1*. 2001. Вып. 3(17). С. 61–69.
47. Муштари Х. М. Об устойчивости тонкостенных конических оболочек кругового сечения при кручении парами. *Сборник научных трудов КАИ*. Казань : Изд-во Казанского авиационного ин-та, 1935. С. 39–40.
48. Мяченков В. И., Юсов В. Н. Деформация оболочечных конструкций из нелинейно-упругого материала. *Строительная механика и расчет сооружений*. 1981. № 1. С. 23–27.
49. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Ленинград : Судпромгиз, 1962. 432 с.
50. Опыт и новые технологии инженерного анализа в интересах космоса. Государственный космический научно-производственный центр имени М.В. Хруничева. 15.08.2011. URL: <http://www.khrunichev.ru/main.php?id=2&nid=2133>.
51. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами : монография. Киев : Наукова думка, 1985. 224 с.
52. Панасюк В. В., Савчук М. П., Дацышин А. П. Распространение напряжений около трещины в пластинках и оболочках : монография. Киев : Наукова думка, 1976. 700 с.
53. Пестриков В. М., Морозов Е. М. Механика разрушения. Курс лекций. Санкт-Петербург : Издательство «Профессия», 2012. 578 с.

54. Печников В. П., Захаров Р. В., Тарасова А. В. Проектирование вафельных оболочек топливных баков ракеты с учетом пластических деформаций. *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2017. Вып. 11. С. 1–14.

55. Печников В. П. Исследование на основе полубезмоментной теории устойчивости конической оболочки, подкрепленной упругими шпангоутами. *Изв. вузов. Машиностроение*. 1968. № 10. С. 37–42.

56. Пикуль В. В. Современное состояние теории оболочек и перспективы ее развития. *Известия АН. Механика твердого тела*. 2000. № 2. С. 145–168.

57. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев : Наукова думка, 1988. 102 с.

58. Полиновский В. П. Применение программных продуктов фирмы MSC.Software для расчета новых изделий из композиционных материалов в ГЛНПЦ им. М.В. Хруничева. *Тр. Рос. Конф. Пользователей системы MSC 2003 года*. Москва : MSC.Software Corporation. 5 с.

59. Постнов В. А., Тумашик И. В., Москвина И. В. Об устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки. *Проблемы прочности и пластичности*. 2007. Вып. 69. С. 18–23.

60. Преображенский И. Н., Грищак В. З. Устойчивость и колебания конических оболочек. Москва : Машиностроение, 1986. 240 с.

61. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига : Зинатне, 1988. 467 с.

62. Саченков А. В. Об устойчивости круговой конической оболочки при совместном действии загрузок. *Исследования по теории пластин и оболочек*. 1964. № 2. С. 57–70.

63. Сдобырев В. П. Длительная прочность сплава ЭИ 437Б при сложном напряженном состоянии. *Известия АН СССР, ОТН*. 1958. № 4. С. 92–97.

64. Семенов А. А. Алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочек. *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2014. №1. С. 49–63.

65. Товстик П. Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. Москва : Наука, 1995. 320 с.

66. Трушин С. И., Михайлов А. В. Устойчивость и бифуркации гибких пологих сетчатых оболочек. *Вестник НИЦ Строительство*. 2010. № 2. С. 150–158.

67. Фрёман Н., Фрёман П. У. ВКБ-приближение. Москва : Мир, 1967. 166 с.

68. Хасанов М. М., Чапаев Т. М., Амшоков Б. Х. Устойчивость стенки стального силоса при осесимметричном выпучивании и начальном искривлении оболочки, направленном внутрь. *Инж. Вестник Дона*. 2018. № 2. URL: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/4944>.

69. Чапаев Т. М., Балкизов А. Б., Сасиков А. С. и др. Анализ известных теоретических и экспериментальных исследований устойчивости стенки цилиндрического зернохранилища. *Инж. Вестник Дона*. 2018. № 4. URL: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5292>.

70. Черепанов Г. И. Механика хрупкого разрушения : монография. Москва : Наука, 1974. 976 с.

71. Чумаченко Е. Н., Полякова Т. В., Аксенов А. С. и др. Математическое моделирование в нелинейной механике (Обзор программных комплексов для решения задач моделирования сложных систем). Москва : Институт космических исследований РАН, 2009. 44 с.

72. Шевченко Ю. М., Андрушко Н. Ф., Бабешко М. О., Баняс М. В., Галішин О. З., Дегтяренко П. Г., Савченко В. Г., Тонконоженко А. М., Тормахов М. М. Розробка математичних моделей і комп'ютерних технологій для проведення віртуальних руйнівних випробувань оболонкових конструкцій. *Наука та інновації*. 2013. Т. 9, № 6. С. 23–30.

73. Шевченко Ю. М., Андрушко Н. Ф., Бабешко М. О., Баняс М. В., Галішин О. З., Дегтяренко П. Г., Савченко В. Г., Тонконоженко А. М., Тормахов М. М. Методика прогнозування експлуатаційного і граничного стану

відповідальних систем ракетної техніки при повторних термосилових навантаженнях. *Наука та інновації*. 2015. 11(5). С. 25–36.

74. Шевченко Ю. Н., Бабешко М. Е., Пискун В. В. и др. Решение осесимметричной задачи термопластичности для тонкостенных и толстостенных тел вращения на ЕС ЭВМ. Киев : Наукова думка, 1980. 196 с.

75. Шевченко Ю. Н., Бабешко М. Е., Прохоренко И. В. Методика решения осесимметричной задачи термо-вязко-пластичности для тонких слоистых оболочек ЕС ЭВМ. Киев : Наукова думка, 1981. 68 с.

76. Шевченко Ю. Н., Бабешко М. Е., Терехов Р. Г. Термо-вязко-упруго-пластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. Киев : Наукова думка, 1992. 328 с.

77. Шевченко Ю. Н., Прохоренко И. В. Теория упругопластических оболочек при неизотермических процессах нагружения : в 5 т. Киев : Наукова думка, 1981. Т. 3. 296 с.

78. Шевченко Ю. Н., Савченко В. Г. Механика связанных полей в элементах конструкций. Киев : Наукова думка, 1987. Т. 2 : Термо-вязко-пластичность. 264 с.

79. Шевченко Ю. Н., Савченко В. Г., Ищенко Д. А., Павлычко В. М. Расчеты и испытания на прочность. Метод и пакет прикладных программ расчета на ЭВМ нестационарной теплопроводности и упруго-пластического напряженно-деформированного состояния элементов конструкций типа тел вращения при осесимметричных силовых и тепловых нагрузках. Рекомендации Р54–284–90. Москва : ВНИИНМАШ Госстандарта СССР, 1990. 56 с.

80. Шевченко Ю. Н., Чернышенко И. С., Мерзляков В. А. и др. Автоматизированная система расчета «Пластичность – 1» для исследования на ЕС ЭВМ упругопластического напряженного состояния оболочечных элементов конструкций. *Проблемы прочности*. 1993. № 2. С. 90–96.

81. Шимкович Д. Г. Расчет конструкций в MSC/NASTRANforWindows. Москва : ДМК Пресс, 2003. 448 с.

82. Штейнман М. Я., Данев В. В., Важов А. Я. Основы бухгалтерского учета. Москва, 1966. Гл. 14 : Учет реализации продукции. С. 2111–2113.
83. Эдмондсон Б., Формби К., Юркевич Р., Стег М. Проблемы разрушения крупных стальных сосудов давления. *Новые методы оценки сопротивления металлов хрупкому разрушению*. Москва, 1972. С. 12-30.
84. Akimov D. V., Gristchak V. Z., Gomenjuk S. I., Larionov I. F., Klimenko D. V., Sirenko V. N. Finite-element analysis and experimental investigation on the strength of a three-layered honeycomb sandwich structure of spacecraft adapter module. *Problems of Strength*. 2016. № 3. P. 52–57.
85. Amabili M. *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*. Cambridge : Cambridge University Press, 2008. 304 p.
86. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of laminated shells using a modified first-order shear deformation theory. *European journal of mechanics – A/Solids*. 2018. Vol. 68. P. 75–87.
87. Bai X., Xu W., Ren H., Li J. Analysis of the influence of stiffness reduction on the load carrying capacity of ring-stiffened cylindrical shell. *Ocean Engineering*. 2017. Vol. 135. P. 52–62.
88. Bai X., Tang R., Zan Y., Li J. Stability analysis of a cylindrical shell with axially symmetric defects under axial compression based on the reduction stiffness method. *Ocean Engineering*. 2019. Vol. 193. No 106584.
89. Degtyarev M. A., Shapoval A. V., Gusev V. V., Avramov K. V., Sirenko V. N. Structural optimization of waffle shell sections in launch vehicles. *Strength of materials*. 2019. Vol. 51(2). P. 223-230.
90. Geer J. F., Andersen C. M. A hybrid perturbation – Galerkin technique with application to slender body theory. *SIAM J. Appl. Mech.* 1989. Vol. 49. P. 344–361.
91. Gristchak V. Z., Dimitrijeva E.M. A Hybrid WKB-Galerkin Method and its Using to Applied Mechanics Problems. *The scientific journal FACTA UNIVERSITATIS. Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics*. 1998. Vol. 2(8). P. 709–713.

92. Gristchak V., Hryshchak D., Dyachenko N., Degtiarenko P. Stability and rational design of the «barrel-ogive» type strengthened shell structures under combined loading. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. 4/7(106). P. 6–15.

93. Gristchak V. Z., Lysenko V. V. A hybrid asymptotic WKB-Galerkin method with application to the correlation analysis of stochastic behaviour of nonlinear systems with time-dependend parameters. *Proceedings of the 3rd ND-KhPI2010 International Conference on Nonlinear Dynamics*. (Kharkov, September 21–24, 2010). Kharkov, 2010. P. 290–295.

94. Gristchak V. Z., Pogrebetskaya A. M. On approximate analytical solution of nonlinear thermal emission problems. *Technische Mechanik*. 2011. Vol. 31, No 2. P. 112–120.

95. Gristchak V. Z., Gristchak D. D., Fatieieva Yu. A. Hybrid asymptotic methods. Theory and applications. Zaporizhzhya : Zaporizhzhya National University, 2016. 108 p.

96. Gristchak V. Z., Gomenniuk S. I., Grebeniuk S. N., Larionov I. F., Degtiarenko P. G., Sirenko V. N., Akimov D. V. An Investigation of a Space craft's Propellant Tank's Shell's Bearing Strength. *Aviation in the XXI-st Century. Safety in Aviation and Space Technologies: Proceedings the sixth world congress* (Kyiv, September 23-25, 2014). Kyiv, 2014, vol. 1. P. 1.14.49–1.1451.

97. Hart E. L., Hudramovych V. S. Projection-iterative schemes for realization of the finite element method in problems of deformation of plates with holes and inclusions. *J. of Math. Sci.* 2014. 203, No 1. P. 55–69.

98. Huang N. C., Li Y. C., Russel S. G. Fracture mechanics of plates and shells applied to fail-safe analysis of fuselage. PartI: Theory. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 1997. Vol. 32, No 27. P. 221–236.

99. Huang N. C., Li Y. C., Russel S. G. Fracture mechanics of plates and shells applied to fail-safe analysis of fuselage. Part II: Computational results. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 1997. Vol. 32, No 27. P. 237–253.

100. Hudramovich V. S., Hart E. L., Ryabokon S. A. Elastoplastic deformation of nonhomogeneous plates. *J. Eng. Math.* 2013. 78. P. 181–197.
101. Iqbal M. A., Tiwari G., Gupta P. K. Energy dissipation in thin metallic shells under projectile impact. *European Journal of Mechanics – A/Solids.* 2016. Vol. 59. P. 37–57.
102. Schmidt H. Two decades of research on the stability of steel shell structures at the University of Essen (1985–2005): Experiments, evaluations, and impact on design standards. *Advances in Structural Engineering.* 2018. Special Issue for Prof. Ratter. P. 1–29.
103. Seide P. On the Buckling of Truncated Conical Shells under Torsion. *Journal of Applied Mechanics Transactions of the ASME.* 1962. 34. P. 321–328.
104. Seide P. A. A survey of buckling theory and experiment for circular conical shells of constant thickness. *NASSA Technical Note.* 1962. D-1510. P. 401–426.
105. Tafreshi A., Bailey C. G. Instability of imperfect composite cylindrical shells under combined loading. *Composite Structures.* 2007. Vol. 80 (1). P. 49–64.
106. Teng J. G., Barbagallo M. Shell restraint to ring buckling at cone-cylinder intersections. *Engineering Structures.* 1997. Vol. 19(6). P. 425–431.
107. Teng J. G., Rotter J. M. *Buckling of Thin Metal Shells.* London and New York : CRC Press, 2004. 520 p.
108. Zhao Y, Teng J. G. A stability design proposal for cone-cylinder intersections under internal pressure. *International Journal of Pressure Vessels and Piping.* 2003. Vol. 80, No. 5. P. 297–309.
109. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. *The Finite Element Method: Its Basic and Fundamentals.* Amsterdam–London–NY–Oxford–Paris–Tokyo : Elsevier, 2005. 722 p.

ДОДАТОК А

ФРАГМЕНТ ПРОГРАМИ MAPLE ДЛЯ ОТРИМАННЯ

РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ НА

СТІЙКІСТЬ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

> restart

$$\begin{aligned} > \text{DeltaKf} := (x, \varphi) \rightarrow \frac{1}{L^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\Phi(x, \varphi)) \right) \\ + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (\Phi(x, \varphi)) \right); \end{aligned}$$

$$\text{DeltaKf} := (x, \varphi) \rightarrow \frac{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, \varphi) \right)}{L^2} + \frac{\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi(x, \varphi) \right)}{R^2} \quad \# \nabla^2 \Phi$$

> DeltaW1 := subs(Phi(x, phi) = w(x, phi), DeltaKf(x, phi))

$$\text{DeltaW1} := \frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, \varphi)}{L^2} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} w(x, \varphi)}{R^2} \quad \# \nabla^2 w_{cyl}$$

> DeltaWW := expand(subs(Phi(x, phi) = DeltaW1, DeltaKf(x, phi)))

$$\begin{aligned} \text{DeltaWW} := & \frac{\frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x, \varphi)}{L^4} + \frac{2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \varphi^2} w(x, \varphi) \right)}{L^2 R^2} \\ & + \frac{\frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} w(x, \varphi)}{R^4} \quad \# \nabla^4 w_{cyl} \end{aligned}$$

> DeltaKff := expand(subs(Phi(x, phi) = DeltaW1, DeltaKf(x, phi)))

$$\begin{aligned} \text{DeltaKff} := & \frac{\frac{\partial^4}{\partial x^4} \Phi(x, \varphi)}{L^4} + \frac{2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \varphi^2} \Phi(x, \varphi) \right)}{L^2 R^2} \\ & + \frac{\frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \Phi(x, \varphi)}{R^4} \quad \# \nabla^4 \Phi \end{aligned}$$

> DeltaWWWW := expand(subs(w(x, phi) = DeltaWW, DeltaWW))

$$\begin{aligned} \text{DeltaWWWW} := & \frac{\frac{\partial^8}{\partial x^8} w(x, \varphi)}{L^8} + \frac{4 \left(\frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial \varphi^2} w(x, \varphi) \right)}{L^6 R^2} \quad \# \quad \nabla^8 w_{cyl} \\ & + \frac{6 \left(\frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial \varphi^4} w(x, \varphi) \right)}{L^4 R^4} + \frac{4 \left(\frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial \varphi^6} w(x, \varphi) \right)}{L^2 R^6} \\ & + \frac{\frac{\partial^8}{\partial \varphi^8} w(x, \varphi)}{R^8} \end{aligned}$$

$$\text{> } \kappa1 := (x, \varphi) \rightarrow -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (w(x, \varphi)) \right) \cdot \frac{1}{L^2} :$$

$$\text{> } \kappa2 := (x, \varphi) \rightarrow \left(-\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (w(x, \varphi)) \right) \right) \cdot \frac{1}{R^2} :$$

$$\text{> } \kappa12 := (x, \varphi) \rightarrow -\left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} (w(x, \varphi)) \right) \right) \cdot \frac{1}{R \cdot L} :$$

$$\text{#### } p_x \left(\frac{\partial^2 w_{cyl}}{\partial s^2} \right) + p_y \left(\frac{\partial^2 w_{cyl}}{\partial y^2} \right) + 2p_{xy} \left(\frac{\partial^2 w_{cyl}}{\partial s \partial y} \right), \quad p_x = \frac{T}{Rh}, \quad p_y = q \frac{R}{h}, \quad p_{xy} = -\frac{M}{2\pi h R^2}$$

$$\text{> } qQ := \frac{T}{R \cdot h0} \cdot \kappa1(x, \varphi) + \frac{q \cdot R}{h0} \cdot \kappa2(x, \varphi) - 2 \cdot \frac{M}{2 \cdot \text{Pi} \cdot R^2 \cdot h0} \cdot \kappa12(x, \varphi)$$

$$qQ := -\frac{T \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, \varphi) \right)}{R h0 L^2} - \frac{q \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} w(x, \varphi) \right)}{R h0} + \frac{M \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} w(x, \varphi) \right)}{R^3 L \pi h0}$$

$$\text{##### } \nabla^4 \left(p_x \left(\frac{\partial^2 w_{cyl}}{\partial s^2} \right) + p_y \left(\frac{\partial^2 w_{cyl}}{\partial y^2} \right) + 2p_{xy} \left(\frac{\partial^2 w_{cyl}}{\partial s \partial y} \right) \right)$$

$$\text{> } qq := -\text{expand}(\text{subs}(\Phi(x, \varphi) = qQ, \text{DeltaKff}))$$

$$qq := \frac{T \left(\frac{\partial^6}{\partial x^6} w(x, \varphi) \right)}{L^6 R h0} + \frac{q \left(\frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial \varphi^2} w(x, \varphi) \right)}{L^4 R h0} - \frac{M \left(\frac{\partial^6}{\partial x^5 \partial \varphi} w(x, \varphi) \right)}{L^5 R^3 \pi h0} + \frac{2 T \left(\frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial \varphi^2} w(x, \varphi) \right)}{L^4 R^3 h0} + \frac{2 q \left(\frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial \varphi^4} w(x, \varphi) \right)}{L^2 R^3 h0} - \frac{2 M \left(\frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial \varphi^3} w(x, \varphi) \right)}{L^3 R^5 \pi h0} + \frac{T \left(\frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial \varphi^4} w(x, \varphi) \right)}{R^5 h0 L^2} + \frac{q \left(\frac{\partial^6}{\partial \varphi^6} w(x, \varphi) \right)}{R^5 h0} - \frac{M \left(\frac{\partial^6}{\partial x \partial \varphi^5} w(x, \varphi) \right)}{R^7 L \pi h0}$$

$$\text{##### } \frac{R^9}{\pi} \cdot \left\{ \frac{D}{h} \nabla^8 w_{cyl} + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w_{cyl}}{\partial s^4} + p_x \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w_{cyl}}{\partial s^2} \right) + p_y \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w_{cyl}}{\partial y^2} \right) + 2p_{xy} \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w_{cyl}}{\partial s \partial y} \right) \right\}$$

$$\text{> } ur1 := \text{expand} \left(\frac{R^9}{\text{Pi}} \cdot \left(\frac{DI}{h0} \cdot \text{DeltaWWWW} + \frac{E}{R^2} \cdot \frac{1}{L^4} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} w(x, \varphi) \right) \right) \right) \right) + qq \right)$$

$$\begin{aligned}
ur1 := & \frac{R^9 DI \left(\frac{\partial^8}{\partial x^8} w(x, \varphi) \right)}{\pi h0 L^8} + \frac{4 R^7 DI \left(\frac{\partial^8}{\partial x^6 \partial \varphi^2} w(x, \varphi) \right)}{\pi h0 L^6} \\
& + \frac{6 R^5 DI \left(\frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial \varphi^4} w(x, \varphi) \right)}{\pi h0 L^4} + \frac{4 R^3 DI \left(\frac{\partial^8}{\partial x^2 \partial \varphi^6} w(x, \varphi) \right)}{\pi h0 L^2} \\
& + \frac{R DI \left(\frac{\partial^8}{\partial \varphi^8} w(x, \varphi) \right)}{\pi h0} + \frac{R^7 E \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x, \varphi) \right)}{\pi L^4} \\
& + \frac{R^8 T \left(\frac{\partial^6}{\partial x^6} w(x, \varphi) \right)}{\pi L^6 h0} + \frac{R^8 q \left(\frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial \varphi^2} w(x, \varphi) \right)}{\pi L^4 h0} \\
& - \frac{R^6 M \left(\frac{\partial^6}{\partial x^5 \partial \varphi} w(x, \varphi) \right)}{\pi^2 L^5 h0} + \frac{2 R^6 T \left(\frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial \varphi^2} w(x, \varphi) \right)}{\pi L^4 h0} \\
& + \frac{2 R^6 q \left(\frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial \varphi^4} w(x, \varphi) \right)}{\pi L^2 h0} - \frac{2 R^4 M \left(\frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial \varphi^3} w(x, \varphi) \right)}{\pi^2 L^3 h0} \\
& + \frac{R^4 T \left(\frac{\partial^6}{\partial x^2 \partial \varphi^4} w(x, \varphi) \right)}{\pi h0 L^2} + \frac{R^4 q \left(\frac{\partial^6}{\partial \varphi^6} w(x, \varphi) \right)}{\pi h0} \\
& - \frac{R^2 M \left(\frac{\partial^6}{\partial x \partial \varphi^5} w(x, \varphi) \right)}{\pi^2 L h0}
\end{aligned}$$

$w_{cyl}(\bar{x}, \bar{\varphi}) = W_{cyl}(\bar{x}) \cdot \cos(\gamma_{cyl}(1 - \bar{x}) + n\bar{\varphi})$

> w := (x, φ) → W(x) · cos(γL · (1 - x) + n · φ)
w := (x, φ) → W(x) cos(γL (1 - x) + n φ)

Підстановка $w_{cyl}(\bar{x}, \bar{\varphi})$ в ліву частину рівняння (2.1)

> ur1 := collect(ur1, [W(x), (d/dx W(x)), (d^2/dx^2 W(x)),
(d^3/dx^3 W(x)), (d^4/dx^4 W(x))]) :

> uuur1 := collect(simplify(ur1, assume = real), φ) : # Спрощення отриманого виразу

> WW := (x, φ) → cos(γL · (1 - x) + n · φ)
WW := (x, φ) → cos(γL (1 - x) + n φ)

Застосування методу Бубнова-Гальоркіна передбачає помноження одержаного виразу на функцію $\cos(\gamma_{cyl}(1 - \bar{x}) + n\bar{\varphi})$ та інтегрування від 0 до 2π .

> $rab := \text{simplify}(\text{int}(uur1 \cdot WW(x, \varphi), \varphi = 0 .. 2 \cdot \text{Pi}), \text{assume} = \text{real}) :$
 $rab := \text{simplify}(rab, \{\sin(\pi n) = 0, (\cos(\pi n))^2 = 1\}) :$

> $uur1 := \text{collect}\left(\text{expand}(rab), \left[W(x), \left(\frac{d}{dx} W(x)\right), \left(\frac{d^2}{dx^2} W(x)\right), \left(\frac{d^3}{dx^3} W(x)\right), \left(\frac{d^4}{dx^4} W(x)\right), \left(\frac{d^5}{dx^5} W(x)\right), \left(\frac{d^6}{dx^6} W(x)\right), \left(\frac{d^7}{dx^7} W(x)\right), \left(\frac{d^8}{dx^8} W(x)\right), M, \gamma l, T, q, DI, L, R, h0, \text{Pi}\right]\right)$

$$\begin{aligned}
 uur1 := & \left(\left(-\frac{n^5 R^2 \gamma l}{h0 \pi L} - \frac{n R^6 \gamma l^5}{h0 \pi L^5} - \frac{2 n^3 R^4 \gamma l^3}{h0 \pi L^3} \right) M + \left(-\frac{R^8 \gamma l^6}{h0 L^6} - \frac{2 n^2 R^6 \gamma l^4}{h0 L^4} - \frac{n^4 R^4 \gamma l^2}{h0 L^2} \right) T + \left(-\frac{n^2 R^8 \gamma l^4}{h0 L^4} - \frac{n^6 R^4}{h0} - \frac{2 n^4 R^6 \gamma l^2}{h0 L^2} \right) q + \left(\frac{R^9 \gamma l^8}{h0 L^8} + \frac{4 n^2 R^7 \gamma l^6}{h0 L^6} + \frac{6 n^4 R^5 \gamma l^4}{h0 L^4} + \frac{4 n^6 R^3 \gamma l^2}{h0 L^2} + \frac{n^8 R}{h0} \right) DI + \frac{R^7 E \gamma l^4}{L^4} \right) \\
 & W(x) + \left(\left(\frac{10 n R^6 \gamma l^3}{h0 \pi L^5} + \frac{6 n^3 R^4 \gamma l}{h0 \pi L^3} \right) M + \left(\frac{n^4 R^4}{h0 L^2} + \frac{15 R^8 \gamma l^4}{h0 L^6} + \frac{12 n^2 R^6 \gamma l^2}{h0 L^4} \right) T + \left(\frac{6 n^2 R^8 \gamma l^2}{h0 L^4} + \frac{2 n^4 R^6}{h0 L^2} \right) q + \left(-\frac{28 R^9 \gamma l^6}{h0 L^8} - \frac{60 n^2 R^7 \gamma l^4}{h0 L^6} - \frac{36 n^4 R^5 \gamma l^2}{h0 L^4} - \frac{4 n^6 R^3}{h0 L^2} \right) DI - \frac{6 R^7 E \gamma l^2}{L^4} \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} W(x) \right) \\
 & + \left(-\frac{5 n R^6 M \gamma l}{h0 \pi L^5} + \left(-\frac{2 n^2 R^6}{h0 L^4} - \frac{15 R^8 \gamma l^2}{h0 L^6} \right) T - \frac{n^2 q R^8}{h0 L^4} + \left(\frac{6 n^4 R^5}{h0 L^4} + \frac{70 R^9 \gamma l^4}{h0 L^8} + \frac{60 n^2 R^7 \gamma l^2}{h0 L^6} \right) DI + \frac{R^7 E}{L^4} \right) \\
 & \left(\frac{d^4}{dx^4} W(x) \right) + \left(\frac{R^8 T}{h0 L^6} + \left(-\frac{4 n^2 R^7}{h0 L^6} - \frac{28 R^9 \gamma l^2}{h0 L^8} \right) DI \right) \left(\frac{d^6}{dx^6} W(x) \right) + \frac{R^9 DI \left(\frac{d^8}{dx^8} W(x) \right)}{h0 L^8}
 \end{aligned}$$

Проводяться перетворення, виходячи з позначень

$$\# \eta_{cyl} = \frac{T}{E h^2}, \quad \chi_{cyl} = \frac{q R^2}{E h^2}, \quad \lambda_{cyl} = \frac{M}{2 \pi E R h^2}, \quad \gamma_{cyl} = \frac{n L}{R} \gamma_1, \quad K = \frac{L}{R}, \quad \varepsilon_1 = \frac{h}{R},$$

$$\omega = 12(1 - \nu^2), \quad D = \frac{E h^3}{\omega},$$

$$> L := k \cdot R : h0 := \varepsilon \cdot R :$$

$$> D1 := \frac{E \cdot h0^3}{Koren^2} : B1 := E \cdot h0 :$$

$$> T := \eta \cdot E \cdot h0 \cdot h0 : q := \frac{\chi \cdot E \cdot h0^2}{R^2} :$$

$$> M := 2 \cdot \text{Pi} \cdot \lambda \cdot E \cdot R \cdot h0^2 : \gamma c1 := \frac{n \cdot \gamma l \cdot L}{R} :$$

$$> \text{uur1} := \text{collect} \left(\text{expand} \left(\text{simplify} \left(\frac{\text{uur1}}{n^2 \cdot E \cdot h0 \cdot R^2}, \{L = k \cdot R, h0 = \varepsilon \varepsilon \cdot R\} \right) \right), \left[W(x), \left(\frac{d}{dx} W(x) \right), \left(\frac{d^2}{dx^2} W(x) \right), \left(\frac{d^3}{dx^3} W(x) \right), \left(\frac{d^4}{dx^4} W(x) \right), \left(\frac{d^5}{dx^5} W(x) \right), \left(\frac{d^6}{dx^6} W(x) \right), \left(\frac{d^7}{dx^7} W(x) \right), \left(\frac{d^8}{dx^8} W(x) \right), \text{Koren}, \lambda, \eta, \chi, n, k, \text{Pi}, \gamma l, \varepsilon \varepsilon \right] \right)$$

$$\begin{aligned} \text{uur1} := & \left((-2 \gamma l - 4 \gamma l^3 - 2 \gamma l^5) n^4 \lambda + (-\gamma l^6 - 2 \gamma l^4 - \gamma l^2) n^4 \eta + (-2 \gamma l^2 - 1 - \gamma l^4) n^4 \chi + \frac{n^2 \gamma l^4}{\varepsilon} \right. \\ & \left. + \frac{(6 \varepsilon \gamma l^4 + 4 \varepsilon \gamma l^2 + \varepsilon + \varepsilon \gamma l^8 + 4 \varepsilon \gamma l^6) n^6}{Koren^2} \right) W(x) \\ & + \left(\frac{(12 \gamma l + 20 \gamma l^3) n^2 \lambda}{k^2} + \frac{(1 + 12 \gamma l^2 + 15 \gamma l^4) n^2 \eta}{k^2} \right. \\ & \left. + \frac{(2 + 6 \gamma l^2) n^2 \chi}{k^2} - \frac{6 \gamma l^2}{\varepsilon k^2} \right. \\ & \left. + \frac{(-36 \varepsilon \gamma l^2 - 4 \varepsilon - 60 \varepsilon \gamma l^4 - 28 \varepsilon \gamma l^6) n^4}{k^2 Koren^2} \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} W(x) \right) \\ & + \left(-\frac{10 \gamma l \lambda}{k^4} + \frac{(-15 \gamma l^2 - 2) \eta}{k^4} + \frac{1}{\varepsilon k^4 n^2} - \frac{\chi}{k^4} \right. \\ & \left. + \frac{(70 \varepsilon \gamma l^4 + 60 \varepsilon \gamma l^2 + 6 \varepsilon) n^2}{k^4 Koren^2} \right) \left(\frac{d^4}{dx^4} W(x) \right) + \left(\frac{\eta}{k^6 n^2} \right. \\ & \left. + \frac{-4 \varepsilon - 28 \varepsilon \gamma l^2}{k^6 Koren^2} \right) \left(\frac{d^6}{dx^6} W(x) \right) + \frac{\varepsilon \left(\frac{d^8}{dx^8} W(x) \right)}{Koren^2 k^8 n^2} \end{aligned}$$

З урахуванням $K^2 > 1$, $n^2 \gg 1$, $\varepsilon_1 \ll 1$ доданки, що містять шосту і восьму похідні, не включаються до розв'язувального рівняння (4.4) з коефіцієнтами (4.5).

ДОДАТОК Б

МАТРИЧНИЙ МЕТОД ДЛЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ НАПРУЖЕНО- ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПРИ ПЕРЕХОДІ ЧЕРЕЗ ШПАНГОУТ

Розглядається випадок, коли на підкріплену циліндричну оболонку впливає зовнішній тиск і осьове зусилля. Функція нормальних переміщень оболонки можна подати у вигляді $w(\bar{x}, \bar{\varphi}) = W(\bar{x}) \cdot \cos n\bar{\varphi}$.

Основні припущення:

1. Центри ваги поперечного перерізу кожного шпангоута лежать в серединній поверхні оболонки.

2. Ширина шпангоута на багато менша за довжину прольоту оболонки.

Вводяться позначення: $C = Eh$ – жорсткість оболонки на розтягнення, N_{0i} – докритичне кільцеве зусилля в шпангоуті (в загальному випадку його можна покласти рівним нулю); q_{xi} , q_{yi} – тангенціальні зусилля, що виникають при випинанні при взаємодії шпангоута з оболонкою.

Переміщення оболонки пов'язані з співвідношеннями:

$$v = \int w d\bar{\varphi}, \quad u = -\int \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} d\bar{\varphi}. \quad (\text{Б.1})$$

Тангенціальні зусилля в оболонці виражаються формулами:

$$T = \frac{Eh}{R} \frac{\partial u}{\partial \bar{x}}, \quad S = -\int \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} d\bar{\varphi}. \quad (\text{Б.2})$$

Умови спряження прольотів оболонки при переході через шпангоут:

1) рівність колових і осьових переміщень правої та лівої ділянок оболонки

$$v_{i+} = v_{i-} = v_i, \quad u_{i+} = u_{i-} = u_i; \quad (\text{Б.3})$$

2) дотичні напруження, що передається через шпангоут, дорівнює різниці відповідних зусиль на правій і лівій ділянках оболонки

$$q_{xi} = T_{i+} - T_{i-}, \quad q_{yi} = S_{i+} - S_{i-}. \quad (\text{Б.4})$$

Рівняння вигину i -ого шпангоута в його площині (з урахуванням N_{0i}) має вигляд :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{\varphi}^2} + 1 \right)^2 \frac{\partial^2 v_i}{\partial \bar{\varphi}^2} + \frac{N_{0i} R^2}{(EJ)_{xi}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{\varphi}^2} + 1 \right) \frac{\partial^2 v_i}{\partial \bar{\varphi}^2} = \frac{R^4 q_{yi}}{(EJ)_{xi}}. \quad (\text{Б.5})$$

Рівняння вигину i -ого шпангоута із його площині має вигляд [26]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{\varphi}^2} + 1 \right)^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial \bar{\varphi}^2} + \frac{N_{0i} R^2}{(EJ)_{zi}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{\varphi}^2} - \kappa_i \right) \frac{\partial^2 u_i}{\partial \bar{\varphi}^2} = \frac{R^4}{(EJ)_{zi}} \left(\frac{\partial^2 q_{xi}}{\partial \bar{\varphi}^2} - \kappa_i q_{xi} \right), \quad (\text{Б.6})$$

де $\kappa_i = \frac{(EJ)_{zi}}{(GJ)_{tors,i}}$.

Для розв'язання системи рівнянь функції переміщень подаються у формі [26]:

$$w(\bar{x}, \bar{\varphi}) = W(\bar{x}) \cdot \cos n\bar{\varphi}, \quad u(\bar{x}, \bar{\varphi}) = U(\bar{x}) \cdot \cos n\bar{\varphi}, \quad \dot{v}(\bar{x}, \bar{\varphi}) = \dot{V}(\bar{x}) \cdot \cos n\bar{\varphi}, \quad (\text{Б.7})$$

$$q_{xi}(\bar{x}, \bar{\varphi}) = Q_{xi}(\bar{x}) \cdot \cos n\bar{\varphi}, \quad \dot{q}_{yi}(\bar{x}, \bar{\varphi}) = \dot{Q}_{yi}(\bar{x}) \cdot \cos n\bar{\varphi}. \quad (\text{Б.8})$$

Із (Б.1) і (Б.7) випливає

$$v = \int w d\bar{\varphi} \Rightarrow \dot{v} = w,$$

$$\dot{V}(\bar{x}) \cdot \cos n\bar{\varphi} = W(\bar{x}) \cdot \cos n\bar{\varphi} \Rightarrow \dot{V}(\bar{x}) = W(\bar{x}); \quad (\text{Б.9})$$

$$u = -\int \frac{\partial v}{\partial \bar{x}} d\bar{\varphi} \Rightarrow \dot{u} = -\frac{\partial v}{\partial \bar{x}} \Rightarrow \ddot{u} = -\frac{\partial \dot{v}}{\partial \bar{x}},$$

$$-n^2 U(\bar{x}) \cdot \cos n\bar{\varphi} = -\dot{V}'(\bar{x}) \cdot \cos n\bar{\varphi} n \Rightarrow n^2 U(\bar{x}) = W'(\bar{x}) \Rightarrow$$

$$U(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} W'(\bar{x}). \quad (\text{Б.10})$$

Оскільки

$$T = T^* \cos n\bar{\varphi}, \quad S = S^* \cos n\bar{\varphi},$$

то із (Б.2), (Б.7), (Б.9) і (Б.10) маємо співвідношення

$$T = \frac{Eh}{R} \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \Rightarrow T^* \cos n\bar{\varphi} = \frac{Eh}{R} U'(\bar{x}) \cos n\bar{\varphi} \Rightarrow \frac{R}{Eh} T^* = \frac{1}{n^2} W''(\bar{x}); \quad (\text{Б.11})$$

$$S = -\int \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} d\bar{\varphi} \Rightarrow \dot{S}^* = -\frac{\partial T^*}{\partial \bar{x}} \Rightarrow -\frac{R}{Eh} \dot{S}^* = \frac{1}{n^2} W'''(\bar{x}). \quad (\text{Б.12})$$

Перед проведенням підстановки $\dot{v}_i(\bar{x}, \bar{\varphi})$ до рівняння (Б.5) його вираз переписується у формі

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{\varphi}^2} + 1 \right)^2 \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial \bar{\varphi}} + \frac{N_{0i} R^2}{(EJ)_{xi}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{\varphi}^2} + 1 \right) \frac{\partial \dot{v}_i}{\partial \bar{\varphi}} = \frac{R^4 q_{yi}}{(EJ)_{xi}},$$

а тангенціальне зусилля – у формі $q_{yi}(\bar{x}, \bar{\varphi}) = \dot{Q}_{yi}(\bar{x}) \cdot \frac{1}{n} \cos n\bar{\varphi}$, після чого

отримується рівняння

$$\left\{ -n(n^2 - 1)^2 \dot{V}_i + \frac{N_{0i} R^2}{(EJ)_{xi}} n(n^2 - 1) \dot{V}_i \right\} \cos n\bar{\varphi} = \frac{R^4 \dot{Q}_{yi}}{(EJ)_{xi}} \frac{1}{n} \cos n\bar{\varphi},$$

звідки

$$\dot{Q}_{yi} = \frac{1}{R^2} n^2 (n^2 - 1) \left\{ -\frac{(EJ)_{xi}}{R^2} (n^2 - 1) + N_{0i} \right\} \dot{V}_i. \quad (\text{Б.13})$$

Після підстановки $u_i(\bar{x}, \bar{\varphi})$ до рівняння (Б.6) одержується рівняння:

$$\left\{ -n^2(n^2-1)^2 U_i + \frac{N_{0i}R^2}{(EJ)_{zi}} n^2(n^2+\kappa_i) U_i + \frac{R^4}{(EJ)_{zi}} (n^2+\kappa_i) Q_{xi} \right\} \cos n\bar{\varphi} = 0;$$

$$Q_{xi} = \left(\frac{(EJ)_{zi}(n^2-1)^2}{R^2(n^2+\kappa_i)} - N_{0i} \right) \frac{n^2 U_i}{R^2}. \quad (\text{Б.14})$$

Із (Б.4), (Б.12) і (Б.13) отримуються вирази:

$$\dot{S}_{i+} = \dot{S}_{i-} + \dot{q}_{yi},$$

$$-\frac{R}{Eh} \dot{S}_{i+}^* = -\frac{R}{Eh} \dot{S}_{i-}^* - \frac{1}{EhR} n^2(n^2-1) \left\{ \frac{(EJ)_{xi}}{R^2} (n^2-1) - N_{0i} \right\} \dot{V}_i,$$

$$\frac{1}{n^2} W_{i+}'''(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} W_{i-}'''(\bar{x}) - \frac{1}{EhR} n^2(n^2-1) \left\{ \frac{(EJ)_{xi}}{R^2} (n^2-1) - N_{0i} \right\} W_i; \quad (\text{Б.15})$$

аналогічно із (Б.4), (Б.11) і (Б.14) –

$$T_{i+} = T_{i-} + q_{xi},$$

$$\frac{R}{Eh} T_{i+}^* = \frac{R}{Eh} T_{i-}^* + \frac{n^2}{EhR} \left(\frac{(EJ)_{zi}(n^2-1)^2}{R^2(n^2+\kappa_i)} - N_{0i} \right) U_i(\bar{x}),$$

$$\frac{1}{n^2} W_{i+}''(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} W_{i-}''(\bar{x}) + \frac{n^2}{EhR} \left(\frac{(EJ)_{zi}(n^2-1)^2}{R^2(n^2+\kappa_i)} - N_{0i} \right) \frac{1}{n^2} W_i'(\bar{x}). \quad (\text{Б.16})$$

Вводяться позначення щодо жорсткостей шпангоута в своїй площині та із площини:

$$\frac{1}{EhR} n^4(n^2-1) \left\{ \frac{(EJ)_{xi}}{R^2} (n^2-1) - N_{0i} \right\} \approx \frac{n^4(n^2-1)^2 (EJ)_{xi}}{CR^3} = G_1^i, \quad (\text{Б.17})$$

$$\frac{n^2}{EhR} \left(\frac{(EJ)_{zi} (n^2 - 1)^2}{R^2 (n^2 + \kappa_i)} - N_{0i} \right) \approx \frac{n^2 (n^2 - 1)^2 (EJ)_{zi}}{CR^3 (n^2 + 1)} = G_2^i, \quad (\text{Б.18})$$

тоді рівняння (Б.15) і (Б.16) переписуються у вигляді

$$W_{i+}'''(\bar{x}) = W_{i-}'''(\bar{x}) - G_1^i W_i; \quad (\text{Б.19})$$

$$W_{i+}''(\bar{x}) = W_{i-}''(\bar{x}) + G_2^i W_i'(\bar{x}). \quad (\text{Б.20})$$

Рівняння прольоту $[\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]$ оболонки може бути записаним у матричному вигляді:

$$\vec{r}(\bar{x}) = A(\bar{x}_i, \bar{x}) \cdot \vec{r}(\bar{x}_i),$$

де $\vec{r}(\bar{x})$ – вектор-стовпець тангенціальних зміщень та зусиль, $A(\bar{x}_i, \bar{x})$ – фундаментальна матриця такого типу, як подано у формулі (Б.2.5):

$$\vec{r}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\dot{V}(\bar{x})}{n^2} \\ U(\bar{x}) \\ \frac{R}{Eh} T^*(\bar{x}) \\ \frac{R}{Eh} S^*(\bar{x}) \end{pmatrix} = \frac{1}{n^2} \begin{pmatrix} W(\bar{x}) \\ W'(\bar{x}) \\ W''(\bar{x}) \\ W'''(\bar{x}) \end{pmatrix}.$$

Для того, щоб переписати зазначений вектор, застосовано співвідношення (Б.9), (Б.1), (Б.19), (Б.20), (Б.11) та (Б.22).

Запроваджується матриця

$$B_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2^i & 1 & 0 \\ -G_1^i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

обчислюється добуток

$$\begin{aligned}
 B_{i+1} \cdot A(\bar{x}_i, \bar{x}) \cdot \begin{pmatrix} W(x_i) \\ W'(x_i) \\ W''(x_i) \\ W'''(x_i) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2^{i+1} & 1 & 0 \\ -G_1^{i+1} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \\ \psi'_1 & \psi'_2 & \psi'_3 & \psi'_4 \\ \psi''_1 & \psi''_2 & \psi''_3 & \psi''_4 \\ \psi'''_1 & \psi'''_2 & \psi'''_3 & \psi'''_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W(x_i) \\ W'(x_i) \\ W''(x_i) \\ W'''(x_i) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \\ \psi'_1 & \psi'_2 & \psi'_3 & \psi'_4 \\ G_2^{i+1}\psi'_1 + \psi''_1 & G_2^{i+1}\psi'_2 + \psi''_2 & G_2^{i+1}\psi'_3 + \psi''_3 & G_2^{i+1}\psi'_4 + \psi''_4 \\ -G_1^{i+1}\psi_1 + \psi'''_1 & -G_1^{i+1}\psi_2 + \psi'''_2 & -G_1^{i+1}\psi_3 + \psi'''_3 & -G_1^{i+1}\psi_4 + \psi'''_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W(x_i) \\ W'(x_i) \\ W''(x_i) \\ W'''(x_i) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} W_-(x_{i+1}) \\ W'_-(x_{i+1}) \\ G_2^{i+1}W'_-(x_{i+1}) + W''_-(x_{i+1}) \\ -G_1^{i+1}W_-(x_{i+1}) + W'''_-(x_{i+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_+(x_{i+1}) \\ W'_+(x_{i+1}) \\ W''_+(x_{i+1}) \\ W'''_+(x_{i+1}) \end{pmatrix}. \tag{Б.21}
 \end{aligned}$$

Остання рівність є наслідком рівностей (Б.3), (Б.4). Таким чином, добуток

$$B_{i+1} \cdot A(\bar{x}_i, \bar{x}) \cdot \begin{pmatrix} W(x_i) \\ W'(x_i) \\ W''(x_i) \\ W'''(x_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_+(x_{i+1}) \\ W'_+(x_{i+1}) \\ W''_+(x_{i+1}) \\ W'''_+(x_{i+1}) \end{pmatrix}$$

характеризує зміну напружено-деформованого стану циліндричної оболонки при переході через проміжний, $(i+1)$ -й, шпангоут. Саме цим рівнянням визначається зазначений матричний метод.

ДОДАТОК В

ФРАГМЕНТ ПРОГРАМИ MAPLE ДЛЯ ОТРИМАННЯ

РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ НА

СТІЙКІСТЬ «БОЧКОПОДІБНОЇ» І «ОЖИВАЛЬНОЇ» ОБОЛОНОК

В.1 Випадок «бочкоподібної» оболонки

> restart

> # $\nabla^2 \Phi$

$$Deltaf := (x, \varphi) \rightarrow \frac{1}{A1(x) \cdot A2(x)} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A2(x)}{A1(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\Phi(x, \varphi)) \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{A1(x)}{A2(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Phi(x, \varphi)) \right) \right) \cdot \frac{L^2}{R^2};$$

> $DeltaW1 := subs(\Phi(x, \varphi) = w(x, \varphi), Deltaf(x, \varphi)) :$ # $\nabla^2 w_{cyl}$

> $DeltaWW := subs(\Phi(x, \varphi) = DeltaW1, Deltaf(x, \varphi)) :$ # $\nabla^4 w_{cyl}$

> $A1 := (x) \rightarrow 1 : A2 := (x) \rightarrow \frac{1}{R} \cdot (R + CA \cdot \sin(\pi \cdot x)) :$

Відповідно до (5.5) $A_1 = \sqrt{a_{11}} \approx 1$, $A_2 = \sqrt{a_{22}} = 1 + C_{cyl} \sin \frac{\pi \bar{s}}{L}$.

> $DeltaWW1 := collect\left(simplify\left(expand\left(DeltaWW \cdot (R + CA \sin(\pi x))^4, assume = real \right), \left[\frac{\partial}{\partial x} w(x, \varphi), \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, \varphi), \frac{\partial^3}{\partial x^3} w(x, \varphi), \frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x, \varphi) \right] \right) \right) :$

>

$\nabla_k^2 \Phi$

$$\begin{aligned} \text{DeltaKf} &:= (x, \varphi) \rightarrow \frac{1}{A1(x) \cdot A2(x)} \\ &\cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k2(x) \cdot \frac{A2(x)}{A1(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\Phi(x, \varphi))}{L^2} \right) \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{k1(x) \cdot \frac{A1(x)}{A2(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Phi(x, \varphi))}{R^2} \right) \right) : \\ k2 &:= x \rightarrow \frac{1}{(R + CA \cdot \sin(\pi x))} : k1 := x \rightarrow \frac{CA \cdot \pi^2}{L^2} \cdot \sin(\pi x) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{DeltaKf1} &:= (x, \varphi) \rightarrow \text{collect} \left(\text{simplify} \left(\text{expand} \left(\text{DeltaKf}(x, \varphi) \cdot (R \right. \right. \right. \\ &\left. \left. + CA \sin(\pi x) \right)^4 \right), \text{assume} = \text{real} \right), \left[\Phi(x, \varphi), \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, \varphi), \right. \\ &\left. \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, \varphi), \frac{\partial^3}{\partial x^3} \Phi(x, \varphi), \frac{\partial^4}{\partial x^4} \Phi(x, \varphi) \right] : \text{DeltaKf1}(x, \varphi) : \end{aligned}$$

>

$$\text{DeltaKW} := (x, \varphi) \rightarrow \text{expand}(\text{subs}(\Phi(x, \varphi) = w(x, \varphi), \text{DeltaKf1}(x, \varphi))) : \text{DeltaKW}(x, \varphi) :$$

$\nabla_k^2 w_{\text{cyl}}$

>

$$\begin{aligned} k1 &:= (x, \varphi) \rightarrow -\frac{1}{L^2 \cdot A1(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{A1(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (w(x, \varphi)) \right) \\ &- \frac{1}{(A2(x))^2 \cdot A1(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (A1(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{(w(x, \varphi))}{R^2} : \end{aligned}$$

Відповідно до (5.19)

>

$$\begin{aligned} k2 &:= (x, \varphi) \rightarrow \left(-\frac{1}{A2(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{A2(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (w(x, \varphi)) \right) \right. \\ &\left. - \frac{1}{A2(x) \cdot (A1(x))^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (A2(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{(w(x, \varphi))}{L^2} \right) : \end{aligned}$$

Відповідно до (5.19)

>

$$\begin{aligned} qq &:= \text{collect} \left(\text{expand} \left(\text{simplify} \left(\text{expand} \left((-N1 \cdot k1(x, \varphi) + N2 \cdot k2(x, \right. \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. \varphi) \cdot (R + CA \sin(\pi x)) \right)^4 \right), \text{assume} = \text{real} \right) \right), \left\{ ww(x), \right. \\ &\left. \left(\frac{d}{dx} ww(x) \right), \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x) \right), \left(\frac{d^3}{dx^3} ww(x) \right), \left(\frac{d^4}{dx^4} ww(x) \right) \right\} \\ &\left. \right) : \end{aligned}$$

Відповідно до (5.20)

>

$$\text{ur1} := \text{collect}(\text{expand}(D1 \cdot \text{DeltaWW1} - \text{DeltaKf1}(x, \varphi) - qq), [w(x, \varphi), \Phi(x, \varphi)]) :$$

Перше рівняння (5.21)

>

$$\text{Deltaff} := \text{subs}(w(x, \varphi) = \Phi(x, \varphi), \text{DeltaWW1}) :$$

$\nabla^4 \Phi$

>

$$\text{ur2} := \text{expand} \left(\frac{1}{E h_0} \cdot \text{Deltaff} + \text{DeltaKW}(x, \varphi) \right) :$$

Друге рівняння (5.21)

>

$$w := (x, \varphi) \rightarrow ww(x) \cdot \cos(n \cdot \varphi); \Phi := (x, \varphi) \rightarrow E \cdot h_0^2 \cdot \Phi(x) \cdot \cos(r \cdot \varphi);$$

Відповідно до (5.24)

> $ur1 := collect\left(\left(ur1\right), \left\{ww(x), \left(\frac{d}{dx} ww(x)\right), \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x)\right), \left(\frac{d^3}{dx^3} ww(x)\right), \left(\frac{d^4}{dx^4} ww(x)\right), \Phi\Phi(x), \left(\frac{d}{dx} \Phi\Phi(x)\right), \left(\frac{d^2}{dx^2} \Phi\Phi(x)\right), \left(\frac{d^3}{dx^3} \Phi\Phi(x)\right), \left(\frac{d^4}{dx^4} \Phi\Phi(x)\right)\right\}\right):$

> $ur2 := collect\left(\left(ur2\right), \left\{ww(x), \left(\frac{d}{dx} ww(x)\right), \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x)\right), \left(\frac{d^3}{dx^3} ww(x)\right), \left(\frac{d^4}{dx^4} ww(x)\right), \Phi\Phi(x), \left(\frac{d}{dx} \Phi\Phi(x)\right), \left(\frac{d^2}{dx^2} \Phi\Phi(x)\right), \left(\frac{d^3}{dx^3} \Phi\Phi(x)\right), \left(\frac{d^4}{dx^4} \Phi\Phi(x)\right)\right\}\right):$

> $uur1 := collect(simplify(ur1, assume = real), [\varphi, x]):$

> $uur2 := collect(simplify(ur2, assume = real), [\varphi, x]):$

> $CA := koeff \cdot R;$

> $WW := (x, \varphi) \rightarrow \cos(n \cdot \varphi)$

Перетворення (5.21)

$CA = C_{cyl}R$

Застосування методу Бубнова-Гальоркіна передбачає помноження одержаного виразу на функцію $\cos(n\bar{\varphi})$ та інтегрування від 0 до 2π .

> $rab := (int(uur1 \cdot WW(x, \varphi), \varphi = 0 .. 2 \cdot Pi)):$

> $rab := simplify(rab, \{\sin(\pi n) = 0, (\cos(\pi n))^2 = 1\}):$

> $rab2 := simplify(int(uur2 \cdot WW(x, \varphi), \varphi = 0 .. 2 \cdot Pi), assume = real):$

> $rab2 := simplify(rab2, \{\sin(\pi n) = 0, (\cos(\pi n))^2 = 1\}):$

> $uur1 := collect\left(expand(rab), \left[ww(x), \left(\frac{d}{dx} ww(x)\right), \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x)\right), \left(\frac{d^3}{dx^3} ww(x)\right), \left(\frac{d^4}{dx^4} ww(x)\right), \Phi\Phi(x), \left(\frac{d}{dx} \Phi\Phi(x)\right), \left(\frac{d^2}{dx^2} \Phi\Phi(x)\right), \left(\frac{d^3}{dx^3} \Phi\Phi(x)\right), \left(\frac{d^4}{dx^4} \Phi\Phi(x)\right)\right]\right):$

> $uur2 := collect\left(expand(rab2), \left[ww(x), \left(\frac{d}{dx} ww(x)\right), \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x)\right), \left(\frac{d^3}{dx^3} ww(x)\right), \left(\frac{d^4}{dx^4} ww(x)\right), \Phi\Phi(x), \left(\frac{d}{dx} \Phi\Phi(x)\right), \left(\frac{d^2}{dx^2} \Phi\Phi(x)\right), \left(\frac{d^3}{dx^3} \Phi\Phi(x)\right), \left(\frac{d^4}{dx^4} \Phi\Phi(x)\right)\right]\right):$

> $N1 := \left(-q CA \sin(Pi \cdot x) + \frac{-T}{2 \cdot Pi \cdot (R + CA \sin(\pi x))}\right):$

> $N2 := -(R + CA \sin(Pi \cdot x)) q + \frac{1}{2} \frac{CA \sin(\pi x) \pi T}{L^2}:$

Відповідно до (5.36)

Відповідно до (5.37)

Проводяться перетворення, виходячи з позначень

$$\# \eta_{cyl} = \frac{T}{Eh^2}, \quad \chi_{cyl} = \frac{qR^2}{Eh^2}, \quad \gamma_{cyl} = \frac{nL}{R} \gamma_1, \quad K = \frac{L}{R}, \quad \varepsilon_1 = \frac{h}{R}, \quad \omega = 12(1-\nu^2), \quad D = \frac{E h^3}{\omega},$$

$$> DI := \frac{E \cdot h0^3}{Koren^2} :$$

$$> T := \eta \cdot E \cdot h0 \cdot h0 : CA := koef \cdot R : q := \frac{\chi \cdot E \cdot h0^2}{R^2} : h0 := \varepsilon \varepsilon \varepsilon \cdot R : L := KKK \cdot R :$$

$$> uur11 := collect \left(\left(expand \left(simplify \left(\frac{uur1}{\varepsilon \varepsilon \varepsilon^2 E R^3} \right) \right), \left[\Phi \Phi(x), \left(\frac{d}{dx} \Phi \Phi(x) \right), \left(\frac{d^2}{dx^2} \Phi \Phi(x) \right), \left(\frac{d^3}{dx^3} \Phi \Phi(x) \right), \left(\frac{d^4}{dx^4} \Phi \Phi(x) \right), ww(x), \frac{d}{dx} ww(x), \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x) \right), \left(\frac{d^3}{dx^3} ww(x) \right), \left(\frac{d^4}{dx^4} ww(x) \right) \right] \right) \right)$$

$$\begin{aligned} uur11 := & \left(\frac{n^2 koef \pi^3 \sin(\pi x)}{KKK^2} - \frac{2n^2 koef^2 \pi^3 \cos(\pi x)^2}{KKK^2} + \frac{n^2 koef^3 \pi^3 \sin(\pi x)}{KKK^2} - \frac{n^2 koef^3 \pi^3 \sin(\pi x) \cos(\pi x)^2}{KKK^2} \right. \\ & + \frac{2n^2 koef^2 \pi^3}{KKK^2} \left. \Phi \Phi(x) + \left(\frac{3\pi koef^2 \cos(\pi x)^2}{KKK^2} - \frac{3\pi koef^2}{KKK^2} - \frac{\pi koef^3 \sin(\pi x)}{KKK^2} + \frac{\pi koef^3 \cos(\pi x)^2 \sin(\pi x)}{KKK^2} - \frac{\pi}{KKK^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3\pi koef \sin(\pi x)}{KKK^2} \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} \Phi \Phi(x) \right) + \left(n^2 \pi koef^3 \cos(\pi x)^2 \chi \sin(\pi x) - \frac{2n^2 \pi^3 \varepsilon \varepsilon \varepsilon koef^2}{KKK^2 Koren^2} - \frac{2n^2 \pi^3 \varepsilon \varepsilon \varepsilon koef \sin(\pi x)}{KKK^2 Koren^2} \right. \\ & + \frac{n^2 \pi^2 koef^2 \eta}{KKK^2} + \frac{1}{2} \frac{n^2 \pi^2 koef \sin(\pi x) \eta}{KKK^2} + \frac{n^4 \pi \varepsilon \varepsilon \varepsilon}{Koren^2} - 3n^2 \pi koef^2 \chi - \frac{n^2 \pi^2 koef^2 \eta \cos(\pi x)^2}{KKK^2} - \frac{2n^2 \pi^3 \varepsilon \varepsilon \varepsilon koef^2 \cos(\pi x)^2}{KKK^2 Koren^2} \\ & - n^2 \pi \chi - \frac{1}{2} \frac{n^2 \pi^2 koef^3 \cos(\pi x)^2 \sin(\pi x) \eta}{KKK^2} + \frac{1}{2} \frac{n^2 \pi^2 koef^3 \sin(\pi x) \eta}{KKK^2} - 3n^2 \pi koef \sin(\pi x) \chi - n^2 \pi koef^3 \chi \sin(\pi x) \\ & + 3n^2 \pi koef^2 \cos(\pi x)^2 \chi \left. \right) ww(x) + \left(- \frac{4 koef^4 \cos(\pi x)^3 \pi^2 \chi \sin(\pi x)}{KKK^2} + \frac{koef^3 \cos(\pi x) \pi^4 \varepsilon \varepsilon \varepsilon}{KKK^4 Koren^2} \right. \\ & + \frac{2 koef^2 \cos(\pi x) \pi^2 n^2 \varepsilon \varepsilon \varepsilon \sin(\pi x)}{KKK^2 Koren^2} + \frac{koef \cos(\pi x) \pi^2 \chi}{KKK^2} + \frac{4 koef^4 \cos(\pi x) \pi^2 \chi \sin(\pi x)}{KKK^2} + \frac{koef^5 \cos(\pi x)^3 \pi^3 \eta}{KKK^4} \\ & - \frac{1}{2} \frac{koef^2 \cos(\pi x) \pi^3 \sin(\pi x) \eta}{KKK^4} - \frac{koef \cos(\pi x) \pi^4 \varepsilon \varepsilon \varepsilon}{KKK^4 Koren^2} - \frac{3}{2} \frac{koef^3 \cos(\pi x) \pi^3 \eta}{KKK^4} + \frac{4 koef^2 \cos(\pi x) \pi^2 \sin(\pi x) \chi}{KKK^2} \\ & - \frac{1}{2} \frac{koef^5 \cos(\pi x)^5 \pi^3 \eta}{KKK^4} + \frac{3}{2} \frac{koef^4 \cos(\pi x)^3 \pi^3 \sin(\pi x) \eta}{KKK^4} + \frac{6 koef^3 \cos(\pi x) \pi^2 \chi}{KKK^2} + \frac{koef^4 \cos(\pi x) \pi^4 \varepsilon \varepsilon \varepsilon \sin(\pi x)}{KKK^4 Koren^2} \\ & + \frac{2 koef \cos(\pi x) \pi^2 n^2 \varepsilon \varepsilon \varepsilon}{KKK^2 Koren^2} - \frac{6 koef^3 \cos(\pi x)^3 \pi^2 \chi}{KKK^2} - \frac{2 koef^5 \cos(\pi x)^3 \pi^2 \chi}{KKK^2} + \frac{koef^5 \cos(\pi x)^5 \pi^2 \chi}{KKK^2} + \frac{koef^5 \cos(\pi x) \pi^2 \chi}{KKK^2} \\ & \left. - \frac{3}{2} \frac{koef^4 \cos(\pi x) \pi^3 \sin(\pi x) \eta}{KKK^4} - \frac{1}{2} \frac{koef^5 \cos(\pi x) \pi^3 \eta}{KKK^4} - \frac{koef^2 \cos(\pi x) \pi^4 \varepsilon \varepsilon \varepsilon \sin(\pi x)}{KKK^4 Koren^2} + \frac{3}{2} \frac{koef^3 \cos(\pi x)^3 \pi^3 \eta}{KKK^4} \right) \\ & \left(\frac{d}{dx} ww(x) \right) + \left(\frac{3}{2} \frac{koef \sin(\pi x) \eta}{KKK^2} - \frac{3}{2} \frac{koef^2 \cos(\pi x)^2 \eta}{KKK^2} + \frac{4 koef^4 \chi \pi}{KKK^2} + \frac{4 koef^2 \chi \pi}{KKK^2} + \frac{1}{2} \frac{koef^3 \sin(\pi x) \eta}{KKK^2} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2} \frac{\text{coeff}^2 \eta}{KKK^2} - \frac{4 n^2 \varepsilon \varepsilon \text{coeff} \sin(\pi x) \pi}{KKK^2 \text{Koren}^2} + \frac{2 n^2 \varepsilon \varepsilon \text{coeff}^2 \cos(\pi x)^2 \pi}{KKK^2 \text{Koren}^2} + \frac{4 \varepsilon \varepsilon \text{coeff}^3 \cos(\pi x)^2 \pi^3 \sin(\pi x)}{KKK^4 \text{Koren}^2} + \frac{\chi \text{coeff} \sin(\pi x) \pi}{KKK^2} \\
& + \frac{\text{coeff}^5 \chi \sin(\pi x) \pi}{KKK^2} - \frac{1}{2} \frac{\text{coeff}^3 \sin(\pi x) \cos(\pi x)^2 \eta}{KKK^2} + \frac{6 \text{coeff}^3 \chi \sin(\pi x) \pi}{KKK^2} - \frac{8 \text{coeff}^4 \cos(\pi x)^2 \chi \pi}{KKK^2} + \frac{4 \text{coeff}^4 \cos(\pi x)^4 \chi \pi}{KKK^2} \\
& - \frac{4 \text{coeff}^2 \chi \pi \cos(\pi x)^2}{KKK^2} - \frac{6 \varepsilon \varepsilon \text{coeff}^2 \pi^3}{KKK^4 \text{Koren}^2} - \frac{2 \varepsilon \varepsilon \text{coeff}^4 \pi^3}{KKK^4 \text{Koren}^2} - \frac{2 n^2 \varepsilon \varepsilon \pi}{KKK^2 \text{Koren}^2} + \frac{1}{2} \frac{\eta}{KKK^2} + \frac{\text{coeff}^5 \cos(\pi x)^4 \chi \sin(\pi x) \pi}{KKK^2} \\
& - \frac{2 n^2 \varepsilon \varepsilon \text{coeff}^2 \pi}{KKK^2 \text{Koren}^2} - \frac{6 \varepsilon \varepsilon \text{coeff}^3 \pi^3 \sin(\pi x)}{KKK^4 \text{Koren}^2} - \frac{2 \varepsilon \varepsilon \text{coeff} \sin(\pi x) \pi^3}{KKK^4 \text{Koren}^2} + \frac{5 \varepsilon \varepsilon \text{coeff}^2 \cos(\pi x)^2 \pi^3}{KKK^4 \text{Koren}^2} - \frac{\varepsilon \varepsilon \text{coeff}^4 \pi^3 \cos(\pi x)^4}{KKK^4 \text{Koren}^2} \\
& + \frac{3 \varepsilon \varepsilon \text{coeff}^4 \pi^3 \cos(\pi x)^2}{KKK^4 \text{Koren}^2} - \frac{2 \text{coeff}^5 \cos(\pi x)^2 \chi \sin(\pi x) \pi}{KKK^2} - \frac{6 \text{coeff}^3 \cos(\pi x)^2 \chi \sin(\pi x) \pi}{KKK^2} \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x) \right) + \left(\right. \\
& - \frac{6 \varepsilon \varepsilon \text{coeff}^3 \cos(\pi x)^3 \pi^2}{KKK^4 \text{Koren}^2} + \frac{6 \varepsilon \varepsilon \text{coeff}^3 \cos(\pi x) \pi^2}{KKK^4 \text{Koren}^2} + \frac{2 \varepsilon \varepsilon \text{coeff}^4 \cos(\pi x) \pi^2 \sin(\pi x)}{KKK^4 \text{Koren}^2} - \frac{2 \varepsilon \varepsilon \text{coeff}^4 \cos(\pi x)^3 \pi^2 \sin(\pi x)}{KKK^4 \text{Koren}^2} \\
& + \frac{2 \varepsilon \varepsilon \text{coeff} \cos(\pi x) \pi^2}{KKK^4 \text{Koren}^2} + \left. \frac{6 \varepsilon \varepsilon \text{coeff}^2 \cos(\pi x) \pi^2 \sin(\pi x)}{KKK^4 \text{Koren}^2} \right) \left(\frac{d^3}{dx^3} ww(x) \right) + \left(\frac{\varepsilon \varepsilon \pi \text{coeff}^4 \cos(\pi x)^4}{KKK^4 \text{Koren}^2} + \frac{4 \varepsilon \varepsilon \pi \text{coeff} \sin(\pi x)}{KKK^4 \text{Koren}^2} \right. \\
& + \frac{4 \varepsilon \varepsilon \pi \text{coeff}^3 \sin(\pi x)}{KKK^4 \text{Koren}^2} - \frac{2 \varepsilon \varepsilon \pi \text{coeff}^4 \cos(\pi x)^2}{KKK^4 \text{Koren}^2} - \frac{6 \varepsilon \varepsilon \pi \text{coeff}^2 \cos(\pi x)^2}{KKK^4 \text{Koren}^2} + \frac{6 \varepsilon \varepsilon \pi \text{coeff}^2}{KKK^4 \text{Koren}^2} + \frac{\varepsilon \varepsilon \pi}{KKK^4 \text{Koren}^2} \\
& \left. - \frac{4 \varepsilon \varepsilon \pi \text{coeff}^3 \cos(\pi x)^2 \sin(\pi x)}{KKK^4 \text{Koren}^2} + \frac{\varepsilon \varepsilon \pi \text{coeff}^4}{KKK^4 \text{Koren}^2} \right) \left(\frac{d^4}{dx^4} ww(x) \right)
\end{aligned}$$

Після спрощення першого рівняння отримаємо:

$$\begin{aligned}
> UUur11 := & \left(\frac{\pi^3 n^2 \text{coeff} \sin(\pi x) (\text{coeff} \sin(\pi x) + 1)^2}{KKK^2} \right) \Phi\Phi(x) - \frac{\pi (\text{coeff} \sin(\pi x) + 1)^3}{KKK^2} \left(\frac{d^2}{dx^2} \Phi\Phi(x) \right) + \left(-\pi (\text{coeff} \sin(\pi x) \right. \\
& + 1)^3 \Big) n^2 \chi + \frac{1}{2} \frac{\pi^2 \text{coeff} \sin(\pi x) (\text{coeff} \sin(\pi x) + 1)^2 n^2 \eta}{KKK^2} \\
& + \left. \frac{n^4 \varepsilon \varepsilon \pi + \frac{(2 \pi^3 \text{coeff} \varepsilon \varepsilon (-2 \text{coeff} + \text{coeff} \sin(\pi x)^2 - \sin(\pi x))) n^2}{KKK^2}}{\text{Koren}^2} \right) ww(x) + \pi^2 \text{coeff} \cos(\pi x) (\text{coeff} \sin(\pi x) \\
& + 1) \left(\frac{(\text{coeff} \sin(\pi x) + 1)^3 \chi}{KKK^2} - \frac{1}{2} \frac{\text{coeff} \pi \sin(\pi x) (\text{coeff} \sin(\pi x) + 1)^2 \eta}{KKK^4} + \frac{\frac{2 \varepsilon \varepsilon n^2}{KKK^2} + \frac{-\pi^2 \varepsilon \varepsilon + \pi^2 \text{coeff}^2 \varepsilon \varepsilon}{KKK^4}}{\text{Koren}^2} \right) \left(\frac{d}{dx} ww(x) \right) \\
& + \frac{1}{KKK^2} \left(\pi (\text{coeff} \sin(\pi x) + 1)^2 \left(\text{coeff} \sin(\pi x) (1 + \text{coeff} \sin(\pi x))^2 \chi + \frac{(1 + \text{coeff} \sin(\pi x)) \eta}{2 \pi} \right. \right. \\
& \left. \left. - 2 n^2 \varepsilon \varepsilon + \frac{(-\varepsilon \varepsilon \sin(\pi x)^2 - \varepsilon \varepsilon) \pi^2 \text{coeff}^2 - 2 \pi^2 \varepsilon \varepsilon \text{coeff} \sin(\pi x)}{KKK^2} \right) \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x) \right) \\
& + \frac{2 \pi^2 \varepsilon \varepsilon \text{coeff} \cos(\pi x) (1 + \text{coeff} \sin(\pi x))^3}{KKK^4 \text{Koren}^2} \left(\frac{d^3}{dx^3} ww(x) \right) + \frac{\pi \varepsilon \varepsilon (1 + \text{coeff} \sin(\pi x))^4}{KKK^4 \text{Koren}^2} \left(\frac{d^4}{dx^4} ww(x) \right) :
\end{aligned}$$

$$> \text{uur22} := \text{subs} \left(CA = \text{coeff} \cdot R, h0 = \varepsilon \varepsilon \cdot R, L = KKK \cdot R, \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. \text{collect} \left(\text{expand} \left(\text{simplify} \left(\frac{\text{uur2} \cdot h0 \cdot KKK^4}{\varepsilon \varepsilon^2 \cdot \pi \cdot KKK^4 n^4 \cdot R^2} \right) \right) \right), \left[\Phi\Phi(x), \right. \\
& \left(\frac{d}{dx} \Phi\Phi(x) \right), \left(\frac{d^2}{dx^2} \Phi\Phi(x) \right), \left(\frac{d^3}{dx^3} \Phi\Phi(x) \right), \left(\frac{d^4}{dx^4} \Phi\Phi(x) \right), \\
& \left. ww(x), \frac{d}{dx} ww(x), \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x) \right) \right] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
uur22 := & \left(-\frac{2 \text{coeff}^2 \cos(\pi x)^2 \pi^2}{n^2 KKK^2} - \frac{2 \text{coeff} \sin(\pi x) \pi^2}{n^2 KKK^2} - \frac{2 \text{coeff}^2 \pi^2}{n^2 KKK^2} + 1 \right) \Phi\Phi(x) + \left(\frac{\text{coeff}^3 \cos(\pi x) \pi^3}{n^4 KKK^4} + \frac{\text{coeff}^4 \cos(\pi x) \pi^3 \sin(\pi x)}{n^4 KKK^4} \right. \\
& + \frac{2 \text{coeff} \cos(\pi x) \pi}{n^2 KKK^2} - \frac{\text{coeff}^2 \cos(\pi x) \pi^3 \sin(\pi x)}{n^4 KKK^4} + \frac{2 \text{coeff}^2 \cos(\pi x) \pi \sin(\pi x)}{n^2 KKK^2} - \frac{\text{coeff} \cos(\pi x) \pi^3}{n^4 KKK^4} \left. \right) \left(\frac{d}{dx} \Phi\Phi(x) \right) + \left(\right. \\
& - \frac{\text{coeff}^4 \pi^2 \cos(\pi x)^4}{n^4 KKK^4} - \frac{2 \text{coeff}^2}{n^2 KKK^2} - \frac{6 \text{coeff}^3 \pi^2 \sin(\pi x)}{n^4 KKK^4} - \frac{2 \text{coeff} \sin(\pi x) \pi^2}{n^4 KKK^4} - \frac{4 \text{coeff} \sin(\pi x)}{n^2 KKK^2} + \frac{5 \text{coeff}^2 \cos(\pi x)^2 \pi^2}{n^4 KKK^4} \\
& \left. - \frac{2}{n^2 KKK^2} + \frac{2 \text{coeff}^2 \cos(\pi x)^2}{n^2 KKK^2} + \frac{3 \text{coeff}^4 \pi^2 \cos(\pi x)^2}{n^4 KKK^4} - \frac{2 \text{coeff}^4 \pi^2}{n^4 KKK^4} - \frac{6 \text{coeff}^2 \pi^2}{n^4 KKK^4} + \frac{4 \text{coeff}^3 \cos(\pi x)^2 \pi^2 \sin(\pi x)}{n^4 KKK^4} \right) \\
& \left(\frac{d^2}{dx^2} \Phi\Phi(x) \right) + \left(\frac{2 \text{coeff} \cos(\pi x) \pi}{n^4 KKK^4} + \frac{2 \text{coeff}^4 \cos(\pi x) \pi \sin(\pi x)}{n^4 KKK^4} - \frac{2 \text{coeff}^4 \cos(\pi x)^3 \pi \sin(\pi x)}{n^4 KKK^4} + \frac{6 \text{coeff}^2 \cos(\pi x) \pi \sin(\pi x)}{n^4 KKK^4} \right. \\
& + \frac{6 \text{coeff}^3 \cos(\pi x) \pi}{n^4 KKK^4} - \frac{6 \text{coeff}^3 \cos(\pi x)^3 \pi}{n^4 KKK^4} \left. \right) \left(\frac{d^3}{dx^3} \Phi\Phi(x) \right) + \left(\frac{1}{n^4 KKK^4} + \frac{6 \text{coeff}^2}{n^4 KKK^4} - \frac{4 \text{coeff}^3 \sin(\pi x) \cos(\pi x)^2}{n^4 KKK^4} \right. \\
& \left. - \frac{6 \text{coeff}^2 \cos(\pi x)^2}{n^4 KKK^4} + \frac{\text{coeff}^4}{n^4 KKK^4} + \frac{\text{coeff}^4 \cos(\pi x)^4}{n^4 KKK^4} + \frac{4 \text{coeff}^3 \sin(\pi x)}{n^4 KKK^4} + \frac{4 \text{coeff} \sin(\pi x)}{n^4 KKK^4} - \frac{2 \text{coeff}^4 \cos(\pi x)^2}{n^4 KKK^4} \right) \\
& \left(\frac{d^4}{dx^4} \Phi\Phi(x) \right) + \left(\frac{2 \text{coeff}^2 \pi^2 \cos(\pi x)^2}{\epsilon \epsilon \epsilon n^2 KKK^2} + \frac{\text{coeff}^3 \pi^2 \sin(\pi x) \cos(\pi x)^2}{\epsilon \epsilon \epsilon n^2 KKK^2} - \frac{2 \text{coeff}^2 \pi^2}{\epsilon \epsilon \epsilon n^2 KKK^2} - \frac{\text{coeff}^3 \pi^2 \sin(\pi x)}{\epsilon \epsilon \epsilon n^2 KKK^2} \right. \\
& \left. - \frac{\text{coeff} \pi^2 \sin(\pi x)}{\epsilon \epsilon \epsilon n^2 KKK^2} \right) ww(x) + \left(-\frac{3 \text{coeff}^2 \cos(\pi x)^2}{\epsilon \epsilon \epsilon n^4 KKK^2} + \frac{3 \text{coeff} \sin(\pi x)}{\epsilon \epsilon \epsilon n^4 KKK^2} + \frac{\text{coeff}^3 \sin(\pi x)}{\epsilon \epsilon \epsilon n^4 KKK^2} + \frac{3 \text{coeff}^2}{\epsilon \epsilon \epsilon n^4 KKK^2} + \frac{1}{\epsilon \epsilon \epsilon n^4 KKK^2} \right. \\
& \left. - \frac{\text{coeff}^3 \sin(\pi x) \cos(\pi x)^2}{\epsilon \epsilon \epsilon n^4 KKK^2} \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x) \right)
\end{aligned} \tag{17}$$

Після спрощення другого рівняння отримаємо:

Спростуємо з урахуванням $K^2 > 1$, $n^2 \gg 1$, $\epsilon_1 \ll 1$

>

$$\begin{aligned}
uur22 := & (1) \Phi\Phi(x) \\
& - \frac{\text{coeff} \pi^2 \sin(\pi x) (\text{coeff} \sin(\pi x) + 1)^2}{\epsilon \epsilon \epsilon n^2 KKK^2} ww(x) \\
& + \frac{(\text{coeff} \sin(\pi x) + 1)^3}{\epsilon \epsilon \epsilon n^4 KKK^2} \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x) \right):
\end{aligned}$$

Із другого рівняння виражаємо $\Phi(x)$

$$\begin{aligned}
> uur22 := & \left(1 + \frac{2 \text{coeff} \pi^2 (-2 \text{coeff} + \text{coeff} \sin(\pi x)^2 - \sin(\pi x))}{n^2 KKK^2} \right) \Phi\Phi(x) + \text{coeff} \cos(\pi x) \pi \left(\frac{2}{n^2 KKK^2} \right. \\
& + \left. \frac{(\text{coeff}^2 - 1) \pi^2}{n^4 KKK^4} \right) (\text{coeff} \sin(\pi x) + 1) \left(\frac{d}{dx} \Phi\Phi(x) \right) - (\text{coeff} \sin(\pi x) + 1)^2 \left(\frac{2}{n^2 KKK^2} \right. \\
& + \left. \frac{((\sin(\pi x)^2 + 1) \text{coeff}^2 + 2 \text{coeff} \sin(\pi x)) \pi^2}{n^4 KKK^4} \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} \Phi\Phi(x) \right) + \frac{2 \text{coeff} \cos(\pi x) \pi (\text{coeff} \sin(\pi x) + 1)^3}{n^4 KKK^4} \left(\frac{d^3}{dx^3} \Phi\Phi(x) \right) \\
& + \frac{(\text{coeff} \sin(\pi x) + 1)^4}{n^4 KKK^4} \left(\frac{d^4}{dx^4} \Phi\Phi(x) \right) - \frac{\text{coeff} \pi^2 \sin(\pi x) (\text{coeff} \sin(\pi x) + 1)^2}{\epsilon \epsilon \epsilon n^2 KKK^2} ww(x) \\
& + \frac{(\text{coeff} \sin(\pi x) + 1)^3}{\epsilon \epsilon \epsilon n^4 KKK^2} \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x) \right): \\
> rraabb := & \text{collect} \left((\text{expand}(111)), \left[ww(x), \frac{d}{dx} ww(x), \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x) \right), \left(\frac{d^3}{dx^3} ww(x) \right), \left(\frac{d^4}{dx^4} ww(x) \right) \right] \right):
\end{aligned}$$

Попередній вигляд розв'язувального рівняння після підстановки в перше рівняння функції $\Phi(x)$

>

$$\begin{aligned} RezRez1 := & collect \left(expand \left(subs \left(h0 = \varepsilon\varepsilon \cdot R, L = KKK \cdot R, \Phi\Phi(x) = \right. \right. \right. \\ & - \left(- \frac{koeff \pi^2 \sin(\pi x) (koeff \sin(\pi x) + 1)^2}{\varepsilon\varepsilon n^2 KKK^2} ww(x) \right. \\ & \left. \left. + \frac{(koeff \sin(\pi x) + 1)^3}{\varepsilon\varepsilon n^4 KKK^2} \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x) \right) \right), \varepsilon\varepsilon UUur11 \right), \\ & \left[ww(x), \frac{d}{dx} ww(x), \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x) \right), \left(\frac{d^3}{dx^3} ww(x) \right), \right. \\ & \left. \left(\frac{d^4}{dx^4} ww(x) \right) \right] \end{aligned}$$

Спрощене розв'язувальне рівняння

>

$$\begin{aligned} RezRez := & \left(+ \frac{1}{2} \frac{\pi^2 \varepsilon\varepsilon koeff \sin(\pi x) (koeff \sin(\pi x) + 1)^2 n^2 \eta}{KKK^2} - \pi (koeff \sin(\pi x) + 1)^3 \varepsilon\varepsilon n^2 \chi + \frac{\pi n^4 \varepsilon\varepsilon^2}{Koren^2} \right. \\ & + \frac{2 \pi^3 koeff (-2 koeff + koeff \sin(\pi x)^2 - \sin(\pi x)) \varepsilon\varepsilon^2 n^2}{Koren^2 KKK^2} + \frac{1}{KKK^4} \left(\pi^5 koeff^2 \sin(\pi x)^2 (koeff \sin(\pi x) + 1)^4 \right. \\ & \left. + \frac{\pi^5 koeff (9 koeff^2 \sin(\pi x)^3 + 8 koeff \sin(\pi x)^2 - 6 koeff^2 \sin(\pi x) + \sin(\pi x) - 4 koeff) (koeff \sin(\pi x) + 1)^3}{n^2} \right) ww(x) \\ & + \left(\frac{\pi^2 koeff \cos(\pi x) (koeff \sin(\pi x) + 1)^4 \varepsilon\varepsilon \chi + \frac{(2 \cos(\pi x) \pi^2 koeff (koeff \sin(\pi x) + 1)) \varepsilon\varepsilon^2 n^2}{Koren^2}}{KKK^2} \right. \\ & - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon \pi^3 koeff^2 \cos(\pi x) \sin(\pi x) (koeff \sin(\pi x) + 1)^3 \eta}{KKK^4} \\ & + \frac{1}{KKK^4} \left(\frac{\cos(\pi x) \pi^4 koeff (koeff - 1) (koeff + 1) (koeff \sin(\pi x) + 1) \varepsilon\varepsilon^2}{Koren^2} \right. \\ & \left. + \frac{-2 \cos(\pi x) \pi^4 koeff (3 koeff \sin(\pi x) + 1) (koeff \sin(\pi x) + 1)^4}{n^2} \right) \left(\frac{d}{dx} ww(x) \right) \\ & + \left(\frac{koeff \sin(\pi x) \pi (koeff \sin(\pi x) + 1)^4 \varepsilon\varepsilon \chi + \pi (koeff \sin(\pi x) + 1)^3 \frac{\varepsilon\varepsilon \eta}{2 \text{Pi}} + \frac{-2 \pi (koeff \sin(\pi x) + 1)^2 \varepsilon\varepsilon^2 n^2}{Koren^2}}{KKK^2} \right. \\ & + \frac{1}{KKK^4} \left(\frac{-\pi^3 koeff (koeff \sin(\pi x)^2 + 2 \sin(\pi x) + koeff) (koeff \sin(\pi x) + 1)^2 \varepsilon\varepsilon^2}{Koren^2} + \right. \\ & \left. - \frac{2 \pi^3 koeff \sin(\pi x) (koeff \sin(\pi x) + 1)^5}{n^2} + \frac{-3 \pi^3 koeff (3 koeff \sin(\pi x)^2 + \sin(\pi x) - 2 koeff) (koeff \sin(\pi x) + 1)^4}{n^4} \right) \\ & \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x) \right) \\ & + \frac{2 \pi^2 koeff \cos(\pi x) (koeff \sin(\pi x) + 1)^3 (3 koeff^2 \sin(\pi x)^2 Koren^2 + 6 koeff \sin(\pi x) Koren^2 + \varepsilon\varepsilon^2 n^4 + 3 Koren^2)}{KKK^4 Koren^2 n^4} \left(\frac{d^3}{dx^3} \right. \\ & \left. ww(x) \right) + \frac{\pi (koeff \sin(\pi x) + 1)^4 (koeff^2 \sin(\pi x)^2 Koren^2 + 2 koeff \sin(\pi x) Koren^2 + \varepsilon\varepsilon^2 n^4 + Koren^2)}{KKK^4 Koren^2 n^4} \left(\frac{d^4}{dx^4} ww(x) \right) : \\ = & \end{aligned}$$

Порівняння з рівнянням для циліндричної оболонки

$$\begin{aligned} > \text{RezRez111} := \text{subs}\left(\text{coeff}=0, \text{collect}\left(\text{expand}\left(\frac{\text{RezRez} \cdot n^2}{\epsilon \epsilon \epsilon \text{Pi}}\right), \left[ww(x), \right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left(\frac{d}{dx} ww(x)\right), \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x)\right), \left(\frac{d^3}{dx^3} ww(x)\right), \left(\frac{d^4}{dx^4} ww(x)\right)\right]\right) \\ & \left.\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{RezRez111} := & \left(\frac{n^6 \epsilon \epsilon \epsilon}{\text{Koren}^2} - n^4 \chi\right) ww(x) + \left(-\frac{2 n^4 \epsilon \epsilon \epsilon}{\text{KKK}^2 \text{Koren}^2}\right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{n^2 \eta}{\pi \text{KKK}^2}\right) \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x)\right) + \left(\frac{n^2 \epsilon \epsilon \epsilon}{\text{KKK}^4 \text{Koren}^2}\right. \\ & \left. + \frac{1}{n^2 \epsilon \epsilon \epsilon \text{KKK}^4}\right) \left(\frac{d^4}{dx^4} ww(x)\right) \end{aligned}$$

В.2 Випадок «оживальной» оболонки

> restart

$$> \# \frac{\pi(l1x - l0)}{l1 - l0} \frac{\pi(l1x)}{l1 - l0} \text{!!!!!!!}$$

спрощений запис для Ω

Відповідно до (5.12), (5.13), (5.14), а також заміна $L = l_1, R = 1$

>

$$A1 := (x) \rightarrow 1 : A2 := (x) \rightarrow l1 \cdot x \cdot \cos(\alpha) + \text{BB} \cdot \sin\left(\frac{\pi(l1x)}{l1 - l0}\right) : L$$

$$:= l1 : R := 1 : \text{BB} := \text{coefc} \cdot l1 \cdot \cos(\alpha) :$$

$$R1 := \frac{(l1 - l0)^2}{\text{BB} \cdot \pi^2 \sin(\alpha) \cdot \sin\left(\frac{\pi(l1x)}{l1 - l0}\right)} : R2 := \frac{l1 \cdot x \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$+ \frac{\text{BB}}{\sin(\alpha)} \cdot \sin\left(\frac{\pi(l1x)}{l1 - l0}\right) : k2 := (x) \rightarrow \frac{1}{R2} : k1 := (x)$$

$$\rightarrow \frac{1}{R1} :$$

>

$$\text{Deltaf} := (x, \varphi) \rightarrow \frac{1}{A1(x) \cdot A2(x)}$$

$\nabla^2 \Phi$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\left(\frac{A2(x)}{A1(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\Phi(x, \varphi)) \right)}{L^2} \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\left(\frac{A1(x)}{A2(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Phi(x, \varphi)) \right)}{R^2} \right) :$$

$$> \text{DeltaW1} := \text{subs}(\Phi(x, \varphi) = w(x, \varphi), \text{Deltaf}(x, \varphi)) :$$

$\nabla^2 w_{\text{cone}}$

$$> \text{DeltaWW} := \text{subs}(\Phi(x, \varphi) = \text{DeltaW1}, \text{Deltaf}(x, \varphi)) :$$

$\nabla^4 w_{\text{cone}}$

- > $ur1 := \text{collect}(\text{expand}(Dl \cdot \text{Delta}WW1 - \text{Delta}Kfl(x, \varphi) - qq), [w(x, \varphi), \Phi(x, \varphi)]) :$ # Перше рівняння (5.21)
- > $\text{Delta}ff := \text{subs}(w(x, \varphi) = \Phi(x, \varphi), \text{Delta}WW1) :$ # $\nabla^4 \Phi$
- > $ur2 := \text{expand}\left(\frac{1}{E h0} \cdot \text{Delta}ff + \text{Delta}KW(x, \varphi)\right) :$ # Друге рівняння (5.21)
- > $s := x \cdot ll : N1 := - \left(\frac{1}{2} \frac{q (s^2 - l0^2) \cos(\alpha)^2}{\sin(\alpha) \left(\cos(\alpha) s + BB \sin\left(\frac{\pi (ll \cdot x)}{ll - l0}\right) \right)} + \frac{q BB \sin\left(\frac{\pi (ll \cdot x)}{ll - l0}\right)}{\sin(\alpha)} + \frac{1}{2} \frac{TT}{\sin(\alpha) \pi \left(\cos(\alpha) s + BB \sin\left(\frac{\pi (ll \cdot x)}{ll - l0}\right) \right)} \right) :$ # Відповідно до (5.38)
- > $N2 := - \frac{1}{2} \frac{BB \sin\left(\frac{\pi (ll \cdot x)}{ll - l0}\right) \pi TT}{\sin(\alpha) (-ll + l0)^2} - q \left(\frac{s \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{1}{\sin(\alpha)} \left(BB \left(\sin\left(\frac{\pi ll \cdot x}{ll - l0}\right) + \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{\pi (ll \cdot x)}{ll - l0}\right) \cos(\alpha)^2 (s^2 - l0^2) \pi^2}{(ll - l0)^2} \right) \right) \right) :$ # Відповідно до (5.39)
- # $N2 := - \frac{q \cdot s \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} :$
- > $w(x, \varphi) := ww(x) \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \cdot \cos(n \cdot \varphi); \Phi(x, \varphi) := \Phi\Phi(x) \cdot \varepsilon^2 \cdot ll \cdot E \cdot h0 \cdot \left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \right)^2 \cdot \cos(n \cdot \varphi);$ # Відповідно до (5.31)

Перетворення рівнянь системи (5.21)

- > $ur1 := \text{collect}\left(\left(ur1\right), \left\{ww(x), \left(\frac{d}{dx} ww(x)\right), \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x)\right), \left(\frac{d^3}{dx^3} ww(x)\right), \left(\frac{d^4}{dx^4} ww(x)\right), \Phi\Phi(x), \left(\frac{d}{dx} \Phi\Phi(x)\right), \left(\frac{d^2}{dx^2} \Phi\Phi(x)\right), \left(\frac{d^3}{dx^3} \Phi\Phi(x)\right), \left(\frac{d^4}{dx^4} \Phi\Phi(x)\right)\right\}\right) :$

$$\begin{aligned} > \text{ur2} := \text{collect} \left((\text{ur2}), \left[\text{ww}(x), \left(\frac{d}{dx} \text{ww}(x) \right), \left(\frac{d^2}{dx^2} \text{ww}(x) \right), \right. \right. \\ & \left. \left(\frac{d^3}{dx^3} \text{ww}(x) \right), \left(\frac{d^4}{dx^4} \text{ww}(x) \right), \Phi\Phi(x), \left(\frac{d}{dx} \Phi\Phi(x) \right), \right. \\ & \left. \left(\frac{d^2}{dx^2} \Phi\Phi(x) \right), \left(\frac{d^3}{dx^3} \Phi\Phi(x) \right), \left(\frac{d^4}{dx^4} \Phi\Phi(x) \right) \right] \right) : \end{aligned}$$

$$> \text{uur1} := \text{collect}(\text{simplify}(\text{ur1}, \text{assume} = \text{real}), [\varphi, x]) :$$

$$> \text{uur2} := \text{collect}(\text{simplify}(\text{ur2}, \text{assume} = \text{real}), [\varphi, x]) :$$

$$> \text{WW} := (x, \varphi) \rightarrow \cos(n \cdot \varphi)$$

Застосування методу Бубнова-Гальоркіна передбачає помноження одержаного виразу на функцію $\cos(n\bar{\varphi})$ та інтегрування від 0 до 2π .

$$> \text{rab} := (\text{int}(\text{uur1} \cdot \text{WW}(x, \varphi), \varphi = 0 .. 2 \cdot \text{Pi})) :$$

$$\begin{aligned} > \text{rab} := \text{simplify} \left(\text{rab}, \left\{ \sin(\pi n) = 0, (\cos(\pi n))^2 = 1, \frac{n^2}{(\cos(\alpha))^2} \right. \right. \\ & \left. \left. = \delta p \right\} \right) : \end{aligned}$$

$$> \text{rab2} := \text{simplify}(\text{int}(\text{uur2} \cdot \text{WW}(x, \varphi), \varphi = 0 .. 2 \cdot \text{Pi}), \text{assume} = \text{real}) :$$

$$\begin{aligned} > \text{rab2} := \text{simplify} \left(\text{rab2}, \left\{ \sin(\pi n) = 0, (\cos(\pi n))^2 = 1, \frac{n^2}{(\cos(\alpha))^2} \right. \right. \\ & \left. \left. = \delta p \right\} \right) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \text{uur1} := \text{collect} \left(\text{expand}(\text{rab} \cdot (2x1l^6 h0 - 4x1l^5 h0 l0 \right. \\ & \left. + 2x1l^4 h0 l0^2)), \left[\text{ww}(x), \left(\frac{d}{dx} \text{ww}(x) \right), \left(\frac{d^2}{dx^2} \text{ww}(x) \right), \right. \right. \\ & \left(\frac{d^3}{dx^3} \text{ww}(x) \right), \left(\frac{d^4}{dx^4} \text{ww}(x) \right), \Phi\Phi(x), \left(\frac{d}{dx} \Phi\Phi(x) \right), \\ & \left. \left(\frac{d^2}{dx^2} \Phi\Phi(x) \right), \left(\frac{d^3}{dx^3} \Phi\Phi(x) \right), \left(\frac{d^4}{dx^4} \Phi\Phi(x) \right) \right] \right) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \text{uur2} := \text{collect} \left(\text{expand}(\text{rab2} \cdot (l1^5 - 2l1^4 l0 + l1^3 l0^2)), \left[\text{ww}(x), \right. \right. \\ & \left(\frac{d}{dx} \text{ww}(x) \right), \left(\frac{d^2}{dx^2} \text{ww}(x) \right), \left(\frac{d^3}{dx^3} \text{ww}(x) \right), \left(\frac{d^4}{dx^4} \text{ww}(x) \right), \\ & \Phi\Phi(x), \left(\frac{d}{dx} \Phi\Phi(x) \right), \left(\frac{d^2}{dx^2} \Phi\Phi(x) \right), \left(\frac{d^3}{dx^3} \Phi\Phi(x) \right), \\ & \left. \left(\frac{d^4}{dx^4} \Phi\Phi(x) \right) \right] \right) : \end{aligned}$$

Проводяться перетворення, виходячи з позначень

$$\# \delta = \frac{n^2}{\cos^2 \alpha}, \quad p = \varepsilon \delta, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{h \operatorname{ctg} \alpha}{l_1 \sqrt{12(1-v^2)}}}, \quad K_c = \frac{l_0}{l_1}, \quad \Omega = \frac{\pi(s-l_0)}{l_1-l_0},$$

$$\# \chi_{\text{cone}} = \frac{q^* l_1}{Eh \varepsilon^3 \operatorname{tg}^3 \alpha}, \quad \eta_{\text{cone}} = \frac{T \cos \alpha}{2\pi Eh \varepsilon^2 l_1 \sin^3 \alpha},$$

$$\# \omega = 12(1-v^2), \quad D = \frac{E h^3}{\omega},$$

$$> \delta p := \frac{p}{\varepsilon};$$

$$TT := \frac{\eta \cdot 2 \cdot \text{Pi} \cdot l_1 \cdot \varepsilon^2 \cdot E \cdot h_0 \cdot (\sin(\alpha))^3}{\cos(\alpha)}; \quad q := \frac{\chi \cdot E \cdot h_0 \cdot \varepsilon^3 \cdot (\sin(\alpha))^3}{l_1 (\cos(\alpha))^3}$$

$$> DI := \frac{E \cdot h_0^3}{K_{\text{oren}}^2} : \text{koren} := K_{\text{oren}} :$$

$$\begin{aligned} > \text{uur11} := & \left(\text{collect} \left(\text{expand} \left(\text{simplify} \left(\text{subs} \left(h_0 = \text{koren} \cdot \frac{\varepsilon^2 \cdot l_1 \cdot \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \right. \right. \right. \right. \right. \\ & l_0 = K_{Kc} \cdot l_1, \frac{1}{E \varepsilon^5 \sin(\alpha)^4 l_1^6} \left(\text{uur1} \cos(\alpha) \cdot \left(-\sin(\alpha) K_{Kc} x \right. \right. \right. \\ & + \sin(\alpha) K_{Kc} \operatorname{cofc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + K_{Kc}}\right) + \sin(\alpha) x \\ & - \sin(\alpha) \operatorname{cofc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + K_{Kc}}\right) \left. \left. \left. \right) \right) \right), \left\{ \cos(\pi x)^2 = 1 \right. \\ & \left. - \sin(\pi x)^2 \right\} \left. \right), \left[\Phi\Phi(x), \left(\frac{d}{dx} \Phi\Phi(x) \right), \left(\frac{d^2}{dx^2} \Phi\Phi(x) \right), \right. \\ & \left. \left(\frac{d^3}{dx^3} \Phi\Phi(x) \right), \left(\frac{d^4}{dx^4} \Phi\Phi(x) \right), ww(x), \frac{d}{dx} ww(x), \right. \\ & \left. \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x) \right), \left(\frac{d^3}{dx^3} ww(x) \right), \left(\frac{d^4}{dx^4} ww(x) \right) \right] \end{aligned}$$

Після спрощення першого рівняння отримаємо:

$$\begin{aligned}
> UUuur11 := & -2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \pi^3 \cos(\alpha)^2 p x \text{coefc} \sin(\alpha) \left(\text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) - x\right)^2 \mathcal{O}\mathcal{O}(x) - 2x \pi \varepsilon \left(\right. \\
& - \sin(\alpha) \left. \left(\text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) - x\right)^3 (-1 + KKc)^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} \mathcal{O}\mathcal{O}(x)\right) - \pi \sin(\alpha) p x \left(\left(\varepsilon \left(\text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \right. \right. \right. \right. \\
& - x \left. \left. \left. \left. \left(-2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} KKc^2 + 4 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} KKc + \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} KKc^2 \pi^2 \cos(\alpha)^2 \right. \right. \right. \right. \right. \\
& - \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) x^2 \text{coefc} \pi^2 \cos(\alpha)^2 - 2 \text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) - 4 KKc x + 2x + 2 KKc^2 x \left. \right) \right) \chi + \\
& - 2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} \cos(\alpha)^2 \pi^2 \left(\text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) - x\right)^2 \eta - 4 \pi^2 \varepsilon^2 \text{coefc} x \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) - 2 KKc^2 \varepsilon p \\
& - 4 \pi^2 \varepsilon^2 \text{coefc}^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) - 2 \varepsilon p + 16 \pi \varepsilon^2 \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} + 8 \varepsilon^2 + 4 KKc \varepsilon p + 8 KKc^2 \varepsilon^2 - 16 KKc \varepsilon^2 \\
& + 8 \pi^2 \varepsilon^2 \text{coefc}^2 - 16 KKc \pi \varepsilon^2 \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} \Big)_{ww(x)} + \left(-\frac{\pi}{-1 + KKc} \sin(\alpha) x \varepsilon \left(-x \right. \right. \\
& + \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} \left. \left(\left(\varepsilon \left(-x + \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} \right)^2 \left(-2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} \right. \right. \right. \right. \right. \\
& + 4 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} KKc - \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} \pi^2 x^2 \cos(\alpha)^2 + \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} KKc^2 \pi^2 \cos(\alpha)^2 \\
& - 2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} KKc^2 + 2x - 4 KKc x + 2 KKc^2 x \left. \left(KKc - \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} \pi - 1 \right) \right) \right) \chi + \\
& - 2 \pi^2 \cos(\alpha)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} \left(-x + \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} \right)^2 \left(KKc - \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} \pi - 1 \right) \eta \\
& - 12 \varepsilon KKc^2 p + 12 \varepsilon KKc p + 4 \varepsilon KKc^3 p - 2 \varepsilon^2 - 6 \pi^2 \varepsilon^2 \text{coefc}^2 - 2 \pi^3 \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \varepsilon^2 \text{coefc}^3 \\
& - 6 \pi \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \varepsilon^2 \text{coefc} - 4 KKc^2 \pi \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) p \varepsilon \text{coefc} + 8 KKc \pi \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) p \varepsilon \text{coefc} \\
& + 4 \pi^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) x \varepsilon^2 \text{coefc} - 2 KKc \pi^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \varepsilon^2 \text{coefc}^2 - 4 \varepsilon p + 2 \pi^3 \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) x^2 \varepsilon^2 \text{coefc} \\
& - 6 KKc^2 \pi \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \varepsilon^2 \text{coefc} + 12 KKc \pi \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \varepsilon^2 \text{coefc} - 4 \pi \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) p \varepsilon \text{coefc} \\
& + 6 KKc \pi^2 \varepsilon^2 \text{coefc}^2 + 2 \pi^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \varepsilon^2 \text{coefc}^2 + 2 \varepsilon^2 KKc^3 - 6 \varepsilon^2 KKc^2 - 4 KKc \pi^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) x \varepsilon^2 \text{coefc} \\
& + 6 \varepsilon^2 KKc \left. \right) \left(\frac{d}{dx} ww(x) \right) + x \pi \varepsilon \sin(\alpha) \left(-x + \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} \right)^2 \left(\left(\varepsilon \left(-x \right. \right. \right. \right. \\
& + \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} \left. \left(-1 + KKc \right)^2 \left(KKc^2 - 2 \text{coefc}^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \right)^2 + 2x \text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) - x^2 \right) \right) \chi \\
& - 2 (-1 + KKc)^2 \left(-x + \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} \right) \eta - 4 KKc^2 p \varepsilon - 2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \pi^2 \varepsilon^2 \text{coefc}^2 - 2 \varepsilon^2 \\
& - 4 \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \pi \varepsilon^2 \text{coefc} + 8 KKc p \varepsilon - 2 \pi^2 \varepsilon^2 \text{coefc}^2 - 4 p \varepsilon + 4 KKc \varepsilon^2 + 4 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \pi^2 x \varepsilon^2 \text{coefc} \\
& - 2 KKc^2 \varepsilon^2 + 4 KKc \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \pi \varepsilon^2 \text{coefc} \left. \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x) \right) - 4x \pi \varepsilon^3 \sin(\alpha) \left(-x + \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} \right)^3 (-1 \\
& + KKc) \left(KKc - \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} \pi - 1 \right) \left(\frac{d^3}{dx^3} ww(x) \right) + 2x \pi \varepsilon^3 \sin(\alpha) \left(-x + \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} \right)^4 \left(\right. \\
& \left. -1 + KKc \right)^2 \left(\frac{d^4}{dx^4} ww(x) \right) :
\end{aligned}$$

$$> UUuur11 := \text{simplify}(UUuur11, \{\varepsilon^3 = 0\}) :$$

$$\begin{aligned}
JJ := & \frac{1}{p^2 \varepsilon (-1 + KKc)^2} \left(-\sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right)^3 \cos(\alpha)^2 \pi^2 p \text{coefc}^3 \text{ww}(x) + 2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right)^2 \cos(\alpha)^2 \pi^2 p \text{coefc}^2 \text{ww}(x) x \right. \\
& - \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \cos(\alpha)^2 \pi^2 p \text{coefc} \text{ww}(x) x^2 + \varepsilon \left(\frac{d^2}{dx^2} \text{ww}(x) \right) \text{coefc}^3 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right)^3 - 2 \varepsilon \left(\frac{d^2}{dx^2} \text{ww}(x) \right) \text{coefc}^3 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right)^3 KKc \\
& + \varepsilon \left(\frac{d^2}{dx^2} \text{ww}(x) \right) \text{coefc}^3 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right)^3 KKc^2 - 3 \varepsilon \left(\frac{d^2}{dx^2} \text{ww}(x) \right) \text{coefc}^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right)^2 x + 6 \varepsilon \left(\frac{d^2}{dx^2} \text{ww}(x) \right) \text{coefc}^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right)^2 x KKc \\
& - 3 \varepsilon \left(\frac{d^2}{dx^2} \text{ww}(x) \right) \text{coefc}^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right)^2 x KKc^2 + 3 \varepsilon \left(\frac{d^2}{dx^2} \text{ww}(x) \right) \text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) x^2 - 6 \varepsilon \left(\frac{d^2}{dx^2} \text{ww}(x) \right) \text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) x^2 KKc \\
& \left. + 3 \varepsilon \left(\frac{d^2}{dx^2} \text{ww}(x) \right) \text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) x^2 KKc^2 - \varepsilon \left(\frac{d^2}{dx^2} \text{ww}(x) \right) x^3 + 2 \varepsilon \left(\frac{d^2}{dx^2} \text{ww}(x) \right) x^3 KKc - \varepsilon \left(\frac{d^2}{dx^2} \text{ww}(x) \right) x^3 KKc^2 \right)
\end{aligned}$$

Отримуємо попередній вигляд розв'язувального рівняння після підстановки в перше рівняння функції $\Phi(x)$

$$> \text{rabb} := \text{expand}(\text{subs}(\Phi\Phi(x) = JJ, UUur11 \cdot p^2 (1 - 2 \cdot KKc + KKc^2))):$$

$$> \text{RezRez1} := \text{collect}\left(\text{expand}(\text{rabb}), \left[\text{ww}(x), \frac{d}{dx} \text{ww}(x), \left(\frac{d^2}{dx^2} \text{ww}(x) \right), \left(\frac{d^3}{dx^3} \text{ww}(x) \right), \left(\frac{d^4}{dx^4} \text{ww}(x) \right) \right]\right):$$

Спрощене розв'язувальне рівняння

$$\begin{aligned}
> \text{RezRez2} := & \frac{\left(\sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} - x \right)^6 (-1 + KKc)^4}{x^6} \varepsilon \left(\frac{d^4}{dx^4} \text{ww}(x) \right) - \frac{6}{x^6} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} - x \right)^5 (-1 \\
& + KKc)^3 \left(-\pi \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \text{coefc} + KKc - 1 \right) \varepsilon \left(\frac{d^3}{dx^3} \text{ww}(x) \right) + \frac{1}{x^6} \left(\text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) - x \right)^3 (-1 \\
& + KKc)^2 \left((-p^2 \varepsilon (-1 + KKc)^2) \eta - \pi^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \cos(\alpha)^2 p \text{coefc}^3 + 2 \pi^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \cos(\alpha)^2 p x \text{coefc}^2 \right. \\
& - 9 \pi^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right)^3 \varepsilon \text{coefc}^3 - \pi^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \cos(\alpha)^2 p x^2 \text{coefc} + 12 \pi^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right)^2 x \varepsilon \text{coefc}^2 \\
& - \pi^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \cos(\alpha)^2 \left(\text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) - x \right)^2 p \text{coefc} \\
& - 12 KKc \pi \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \varepsilon \text{coefc}^2 - 3 \pi^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) x^2 \varepsilon \text{coefc} \\
& + 6 \pi^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \varepsilon \text{coefc}^3 + 6 KKc^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \varepsilon \text{coefc} + 12 KKc \pi \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) x \varepsilon \text{coefc} \\
& - 6 \pi^2 x \varepsilon \text{coefc}^2 + 12 \pi \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \varepsilon \text{coefc}^2 - 12 KKc \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \varepsilon \text{coefc} \\
& \left. - 12 \pi \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) x \varepsilon \text{coefc} - 6 KKc^2 x \varepsilon - 6 x \varepsilon + 12 KKc x \varepsilon + 6 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \varepsilon \text{coefc} \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} \text{ww}(x) \right) \\
& + \frac{1}{x^6} \pi^2 \cos(\alpha)^2 p \text{coefc} \left(\text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) - x \right)^3 (-1 + KKc) \left(\sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) p \varepsilon (KKc - 1 \right. \\
& - \text{coefc} \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \pi) \eta + 2 \left(\text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) - x \right) \left(-3 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \pi \text{coefc} \right. \\
& - 2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) + 2 KKc \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) \pi x) \left(\frac{d}{dx} \text{ww}(x) \right) - \frac{p}{2 x^6 \varepsilon \sin(\alpha)} \left(\right. \\
& - 4 \varepsilon \pi^2 x^3 \sin(\alpha) \cos(\alpha)^2 \text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right) + 4 \varepsilon \pi^2 \sin(\alpha) \text{coefc}^4 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right)^4 KKc^2 \cos(\alpha)^2 \\
& - 104 \varepsilon \pi^4 x^2 \sin(\alpha) \text{coefc}^4 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right)^4 \cos(\alpha)^2 + 12 \varepsilon \pi^2 x^2 \sin(\alpha) \text{coefc}^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right)^2 \cos(\alpha)^2 \\
& + 72 \varepsilon \pi^4 x^3 \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right)^3 \cos(\alpha)^2 \text{coefc}^3 - 8 \varepsilon \pi^2 \sin(\alpha) \text{coefc}^4 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right)^4 KKc \cos(\alpha)^2 \\
& \left. - 12 \varepsilon \pi^2 x \sin(\alpha) \text{coefc}^3 \sin\left(\frac{\pi x}{-1 + KKc}\right)^3 \cos(\alpha)^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2p \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^2 \pi^4 \cos(\alpha)^4 x^2 \text{coefc}^2 \sin(\alpha) \left(\text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) - x\right)^2 \\
& + 16 \varepsilon \pi^3 \sin(\alpha) \text{coefc}^5 \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^4 \cos(\alpha)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) - 22 \varepsilon \pi^4 x^4 \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^2 \cos(\alpha)^2 \text{coefc}^2 \\
& + 70 \varepsilon \pi^4 x \sin(\alpha) \text{coefc}^5 \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^5 \cos(\alpha)^2 + 8 \varepsilon x^4 \sin(\alpha) \cos(\alpha)^2 \text{coefc}^2 \pi^4 \\
& + 12 \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^4 \pi^4 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) \varepsilon \text{coefc}^6 \\
& - 16 \varepsilon \pi^3 \sin(\alpha) \text{coefc}^5 \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^4 KKc \cos(\alpha)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) \\
& + 72 \varepsilon \pi^3 x^2 \sin(\alpha) \text{coefc}^3 \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^2 \cos(\alpha)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) \\
& - 56 \varepsilon \pi^3 x \sin(\alpha) \text{coefc}^4 \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^3 \cos(\alpha)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) \\
& - 40 \varepsilon \pi^3 x^3 \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) \cos(\alpha)^2 \text{coefc}^2 \cos\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) \\
& + 40 \varepsilon \pi^3 x^3 \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) \cos(\alpha)^2 \text{coefc}^2 \cos\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) KKc \\
& + 8 \varepsilon \pi^2 x^3 \sin(\alpha) KKc \cos(\alpha)^2 \text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) - 8 \varepsilon \pi^3 x^4 \sin(\alpha) \cos(\alpha)^2 \text{coefc} \cos\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) KKc \\
& - 24 \varepsilon \pi^2 x^2 \sin(\alpha) \text{coefc}^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^2 KKc \cos(\alpha)^2 + 12 \varepsilon \pi^2 x^2 \sin(\alpha) \text{coefc}^2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^2 KKc^2 \cos(\alpha)^2 \\
& - 72 \varepsilon \pi^3 x^2 \sin(\alpha) \text{coefc}^3 \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^2 KKc \cos(\alpha)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) \\
& + 56 \varepsilon \pi^3 x \sin(\alpha) \text{coefc}^4 \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^3 KKc \cos(\alpha)^2 \cos\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) \\
& - 4 \varepsilon \pi^2 x^3 \sin(\alpha) KKc^2 \cos(\alpha)^2 \text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) + 24 \varepsilon \pi^2 x \sin(\alpha) \text{coefc}^3 \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^3 \cos(\alpha)^2 KKc \\
& - 12 \varepsilon \pi^2 x \sin(\alpha) \text{coefc}^3 \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^3 \cos(\alpha)^2 KKc^2 + 2 \varepsilon \pi^4 x^5 \sin(\alpha) \cos(\alpha)^2 \text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) \\
& - 12 \varepsilon^2 p^3 \sin(\alpha) KKc^2 + 8 \varepsilon^2 p^3 \sin(\alpha) KKc + 8 \varepsilon^2 p^3 \sin(\alpha) KKc^3 - 2 \varepsilon^2 p^3 \sin(\alpha) KKc^4 - 2 \varepsilon^2 p^3 \sin(\alpha) \\
& - 18 \varepsilon \pi^4 \sin(\alpha) \text{coefc}^6 \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^6 \cos(\alpha)^2 + 4 \varepsilon \pi^2 \sin(\alpha) \text{coefc}^4 \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^4 \cos(\alpha)^2 \\
& - 2p \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^4 \pi^4 \cos(\alpha)^4 \text{coefc}^4 \sin(\alpha) \left(\text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) - x\right)^2 \\
& + 8 \varepsilon \pi^3 x^4 \sin(\alpha) \cos(\alpha)^2 \text{coefc} \cos\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) + \sin(\alpha) p^2 \varepsilon^2 \left(\text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) - x\right)^2 (-1+KKc)^2 \left(\right. \\
& - 2 \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) \text{coefc} KKc^2 + \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) \text{coefc} \pi^2 KKc^2 \cos(\alpha)^2 + 2x KKc^2 - 4x KKc \\
& \left. + 4 \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) \text{coefc} KKc - \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) \cos(\alpha)^2 \pi^2 x^2 \text{coefc} - 2 \text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) + 2x \right) \chi \\
& - 2 \pi^2 \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) \cos(\alpha)^2 p^2 \varepsilon \text{coefc} \left(\text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) - x\right)^2 (-1+KKc)^2 \eta \\
& + 4p \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^3 \pi^4 \cos(\alpha)^4 x \text{coefc}^3 \sin(\alpha) \left(\text{coefc} \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right) - x\right)^2 \\
& - 44 \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^3 \pi^4 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) x \varepsilon \text{coefc}^5 + 60 \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^2 \pi^4 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) x^2 \varepsilon \text{coefc}^4 \\
& - 36 \sin\left(\frac{\pi x}{-1+KKc}\right)^4 \pi^4 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) x^3 \varepsilon \text{coefc}^3 \Big) \quad ww(x) :
\end{aligned}$$

Порівняння з рівнянням для кінчної оболонки

>

$$\begin{aligned}
> \text{factor} & \left(\left(\frac{36 KKc^2}{x} + \frac{6}{x} + \frac{6 KKc^4}{x} - \frac{24 KKc}{x} - \frac{24 KKc^3}{x} \right) \right); \\
& \text{factor} \left((1 - 4 KKc + 6 KKc^2 - 4 KKc^3 + KKc^4) \right); \\
& \frac{6 (KKc - 1)^4}{x} \\
& (KKc - 1)^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> \text{collect} & \left(\text{expand} \left(-\frac{p^3 (x^3 \chi - p)}{x^6} ww(x) \right. \right. \\
& + \frac{(6x + p^2 \eta)}{x^3} \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x) \right) + \frac{6}{x} \left(\frac{d^3}{dx^3} ww(x) \right) \\
& \left. \left. + \left(\frac{d^4}{dx^4} ww(x) \right) \right) \right), \left[ww(x), \left(\frac{d}{dx} ww(x) \right), \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x) \right), \right. \\
& \left. \left(\frac{d^3}{dx^3} ww(x) \right), \left(\frac{d^4}{dx^4} ww(x) \right), \varepsilon \right] \\
& \left(-\frac{p^3 \chi}{x^3} + \frac{p^4}{x^6} \right) ww(x) + \left(\frac{6}{x^2} + \frac{p^2 \eta}{x^3} \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x) \right) \\
& + \frac{6 \left(\frac{d^3}{dx^3} ww(x) \right)}{x} + \frac{d^4}{dx^4} ww(x)
\end{aligned}$$

Перетворення розв'язувального рівняння з урахуванням початкового спрощеного виразу для Ω

$$\begin{aligned}
> \frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \\
> \text{RezRez3} := \frac{\varepsilon}{x^6} \left(\frac{d^4}{dx^4} ww(x) \right) \left(\text{coefc} \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) - x \right)^6 (-1 + KKc)^4 - \frac{6}{x^6} \left(\frac{d^3}{dx^3} ww(x) \right) \varepsilon \left(\text{coefc} \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) - x \right)^5 (-1 \\
+ KKc)^3 \left(-\cos \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \pi \text{coefc} + KKc - 1 \right) - \frac{1}{x^6} \left(\text{coefc} \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) - x \right)^3 (-1 + KKc)^2 \left(p^2 (KKc - 1)^2 \varepsilon \eta + \left(\right. \right. \\
- 3 \left(\sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \text{coefc} - x \right) \left(-3 \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \right)^2 \pi^2 \text{coefc}^2 + \pi^2 x \text{coefc} \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) + 2 \pi^2 \text{coefc}^2 \\
- 4 \text{coefc} \pi KKc \cos \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) + 4 \text{coefc} \pi \cos \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) - 4 KKc + 2 + 2 KKc^2 \left. \right) \varepsilon \\
+ 2 \pi^2 \cos(\alpha)^2 \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) p \text{coefc} \left(\sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \text{coefc} - x \right)^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} ww(x) \right) - \frac{p}{x^6} \varepsilon \left(p^2 \left(-x \right. \right. \\
+ \text{coefc} \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \left. \right)^2 (-1 + KKc)^2 \left(-\sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \text{coefc} KKc^2 + \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \text{coefc} \pi^2 \cos(\alpha)^2 KKc^2 + x KKc^2 \right. \\
+ 2 \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \text{coefc} KKc - 2 x KKc - \frac{x^2}{2} \pi^2 \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \text{coefc} \cos(\alpha)^2 - \text{coefc} \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) + x \left. \right) \varepsilon^2 \chi - p^3 \left(\right. \\
- 1 + KKc)^4 \varepsilon^2 + \pi^2 \cos(\alpha)^2 \text{coefc} \left(-x + \text{coefc} \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \right)^3 \left(-9 \pi^2 \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \right)^3 \text{coefc}^2 \\
+ 8 x \pi^2 \text{coefc} \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right)^2 + 6 \text{coefc}^2 \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \pi^2 - \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) x^2 \pi^2 \\
+ 8 \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \pi \text{coefc} \cos \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) - 8 \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \pi \text{coefc} KKc \cos \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) + 2 KKc^2 \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \\
- 4 \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) KKc + 2 \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) - 4 x \pi^2 \text{coefc} - 4 \pi x \cos \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) + 4 \pi x \cos \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) KKc \left. \right) \varepsilon \\
- \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right)^2 \pi^4 \cos(\alpha)^4 p \text{coefc}^2 \left(-x + \text{coefc} \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \right)^4 \left. \right) ww(x) \\
+ \frac{1}{x^6} \left(2 p \pi^2 \cos(\alpha)^2 \text{coefc} \left(\frac{d}{dx} ww(x) \right) \left(\text{coefc} \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) - x \right)^4 (-1 + KKc) \left(2 \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \right) KKc \right. \\
\left. - 3 \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \cos \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \text{coefc} \pi - 2 \sin \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) + x \cos \left(\frac{\pi (x - KKc)}{-1 + KKc} \right) \pi \right) \varepsilon
\end{aligned}$$

Додаток Г

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Заступник Генерального конструктора
з наукової та навчальної роботи
ДП «Конструкторське бюро «Південне»
доктор технічних наук

 В.С. Шеховцов
" 21 "  2020 р.

Акт

про впровадження результатів наукових досліджень за темою
«Напружено-деформований стан та чисельне моделювання силових
конструкцій аерокосмічного машинобудування»

Комісія в складі: головного наукового співробітника І.Ф. Ларіонова, начальника розрахунково-теоретичного комплексу В.М. Сіренка, начальника відділу міцності і навантажень Д.В. Клименка склала цей акт про те, що методи та алгоритми розрахунків напружено-деформованого стану та стійкості оболонкових конструкцій аерокосмічного машинобудування на основі аналітико-чисельних підходів і відповідного програмного забезпечення з урахуванням особливостей геометричної форми, жорсткості підкріплюючих елементів і характеру комбінованого зовнішнього навантаження, які представлені у дисертаційній роботі на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук Дегтяренка Павла Глібовича «Напружено-деформований стан та чисельне моделювання силових конструкцій аерокосмічного машинобудування», було впроваджено та використано у науково-виробничій діяльності ДП «Конструкторське бюро «Південне» для дослідження напружено-деформованого стану оболонкових конструкцій ракетної техніки, зокрема головного обтічника за темами «Циклон-4», «Циклон-4М» та «Маяк-С3.9».

При розробці матеріалів ескізного проекту для ОТР використовувались математичні моделі, та технології комп'ютерного моделювання приведенні в розділі 2 та [1], зокрема для проведення аналізу напружено-деформованого стану металевого корпусу твердопаливного маршового двигуна.

При розробці проектних матеріалів за темами «Циклон-4» та «Циклон-4М» в частині аналізу стійкості та міцності головного обтічника, використовувались підходи викладені у розділі 4 та [2], [3].

Для попередньої оцінки обліку головних обтічників перспективних РКП планується використовувати підходи, викладені у розділі 5 та [4].

Отримані з використанням вищезазначених підходів результати розрахунків наведено у розрахунковій документації по відповідних темах (див. додаток до цього акту).

Статті, які використані при розробці матеріалів за темами, наведені у додатку до цього акту.

Члени комісії:

Начальник розрахунково-
теоретичного комплексу,
кандидат технічних наук



4.10.20

В.М. Сіренко

Головний науковий співробітник,
кандидат технічних наук



11.11.20

І.Ф. Ларіонов

Начальник відділу
міцності і навантажень,
кандидат технічних наук



11.11.2020

Д.В. Клименко

Вчений секретар
ДП «КБ «Південне»,
кандидат технічних наук



11.11.2020

Л. П. Потапович

Додаток до акту про впровадження результатів наукових досліджень за темою
«Напружено-деформований стан та чисельне моделювання силових
конструкцій аерокосмічного машинобудування»

Статті, які використані при розробці матеріалів:

1. Шевченко Ю.М., Андрушко Н.Ф., Бабешко М.О., Баняс М.В., Галішкін О.З., Дегтяренко П.Г., Савченко В.Г., Тонконоженко А.М., Тормахов М.М. Розробка математичних моделей і комп'ютерних технологій для проведення віртуальних руйнівних випробувань оболонкових конструкцій. *Наука та інновації*. 2013. Т.9. №6, С. 23-30;
2. Дегтяренко П.Г., Грищак В.З., Грищак Д.Д., Дьяченко Н.Н. К проблеме равноустойчивости подкрепленной оболочечной конструкции при комбинированном нагружении. *ISSN 1561-8889. Космічна наука і технологія*. 2019. Т.25. №6, С. 4-14;
3. Дегтяренко П.Г., Грищак В.З., Дьяченко Н.Н. К расчету на устойчивость комбинированной оболочечной конструкции с учетом дискретности расположения промежуточных шпангоутов. *Проблеми обчислюваної механіки і міцності конструкцій*. 2019. Т.29. С. 113-131;
4. Дегтяренко П.Г., Грищак В.З., Грищак Д.Д., Дьяченко Н.Н. Постановка и основные разрешающие уравнения задачи устойчивости оболочечной конструкции типа «бочка-оживало» при действии внешнего давления. *Проблеми обчислюваної механіки і міцності конструкцій*. 2019. Т.30. Прийнято до друку.

Розрахункова документація:

1. КРК «Циклон-4». Технический отчет. Использование головного обтекателя типа 01 в составе РКН «Циклон-4» для выведения ПГ на типовые орбиты и отлетную траекторию. 2Ц41.21.16939.103 ОТ. 2011 г.
2. РКН «Циклон-4М». Материалы по прочности ракеты космического назначения на различных этапах эксплуатации. Прочность. С4М YZH ANL 047 01. 2017 г.
3. Эскизный проект «Сапсан». ВТС.21.17000.103 ОТ. 2011 г.
4. Программа «Гром-2». Технический отчет. Дополнительные материалы по расчету прочности сбрасываемого аэродинамического обтекателя. GR2 YZH ANL 235 01. 2016 г.
5. Программа «Гром-2». Технический отчет. Дополнительные расчетные материалы по конструкции отсека наведения с САО с пиротехническим устройством отделения и ДУ увода. GR2 YZH ANL 243 01. 2017 г.
6. Программа «Маяк-3.9». Материалы по прочности ракеты космического назначения на различных этапах эксплуатации. Прочность. MSC YZH ANL 025 01. 2017 г.

ДОДАТОК Д
СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ
ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Праці, в яких опубліковані основні наукові результати:

1. Шевченко Ю. М., Андрушко Н. Ф., Бабешко М. О., Баняс М. В., Галішин О. З., Дегтяренко П. Г., Савченко В. Г., Тонконоженко А. М., Тормахов М. М. Розробка математичних моделей і комп'ютерних технологій для проведення віртуальних руйнівних випробувань оболонкових конструкцій. *Наука та інновації*. 2013. Т. 9, № 6. С. 23-30.
2. Аврамов К. В., Морачковский О. К., Тонконоженко А. М., Кожарин В. Ю., Дегтяренко П. Г. Численный анализ разрушающих нагрузок ребренных баков ракетносителей. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2014. № 5 (112). С. 40–46
3. Дегтяренко П. Г., Грищак В. З., Дьяченко Н. Н. К расчету на устойчивость комбинированной оболочечной конструкции с учетом дискретности расположения промежуточных шпангоутов. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2019. Т. 29. С. 113–131.
4. Дегтяренко П. Г., Грищак В. З., Грищак Д. Д., Дьяченко Н. Н. Постановка и основные разрешающие уравнения задачи устойчивости оболочечной конструкции типа «бочка-оживало» при действии внешнего давления. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2019. Т. 30. С. 33–52.
5. Дегтяренко П. Г., Грищак В. З., Грищак Д. Д., Дьяченко Н. Н. К проблеме равноустойчивости подкрепленной оболочечной конструкции при комбинированном нагружении. *Космічна наука і технологія*. 2019. Т. 25, № 6. С. 4–14.
6. Gristchak V., Hryshchak D., Dyachenko N., Degtiarenko P. Stability and rational design of the «barrel-ogive» type strengthened shell structures under

combined loading. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. 4/7(106). P. 6–15.

Праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

7. Дегтяренко П. Г., Грищак В. З., Грищак Д. Д., Д'яченко Н. Н. Рівностійкість до локальних і загальних форм випинання шпангоутних оболонкових систем ракетноносіїв при комбінованому зовнішньому навантаженні. *Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій*: тези доповідей другої міжнародної наук.-техн. конф. Пам'яті академіка НАН України В. І. Моссаковського (до сторіччя від дня народження). Дніпро: 2019. С. 311.

8. Gristchak V. Z., Gomenniuk S. I., Grebeniuk S. N., Larionov I. F., Degtiarenko P. G., Sirenko V. N., Akimov D. V. An Investigation of a Spacecraft's Propellant Tank's Shell's Bearing Strength. *Aviation in the XXI-st Century. Safety in Aviation and Space Technologies: Proceedings the sixth world congress* (Kyiv, September 23-25, 2014). Kyiv, 2014. Vol. 1. P. 1.14.49–1.1451.