Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний технічний університет

ГРЕБЕНЮК СЕРГІЙ МИКОЛАЙОВИЧ

УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПРОСТОРОВИХ КОНСТРУКЦІЙ НА ОСНОВІ ГОМОГЕНІЗАЦІЇ ВОЛОКНИСТИХ КОМПОЗИТІВ

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Запоріжжя – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Запорізькому національному університеті Міністерства освіти і науки України

Науковий консультант:

доктор технічних наук, професор **Гоменюк Сергій Іванович**, Запорізький національний університет, декан математичного факультету

Офіційні опоненти:

доктор технічних наук, професор **Дзюба Анатолій Петрович**, Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара Міністерства освіти і науки України, завідувач кафедри обчислювальної механіки і міцності конструкцій;

доктор фізико-математичних наук, професор **Карнаухов Василь Гаврилович**, Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України, завідувач відділом термопружності;

доктор технічних наук, старший науковий співробітник **Сметанкіна Наталя Володимирівна**, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, провідний науковий співробітник.

Захист відбудеться “ 25 ” жовтня 2016 року о “ 13^{30} “ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 17.052.01 при Запорізькому національному технічному університеті за адресою: 69600, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 64, ауд. 153.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Запорізького національного університету за адресою: 69600, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 66 та на сайті ЗНТУ у розділі «Наука» – «Спеціалізована вчена рада».

Автореферат розісланий “22 ” вересня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради О.А. Мітяєв

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Однією з тенденцій розвитку сучасної техніки є дедалі більше використання композиційних матеріалів при її виробництві. Це дає змогу зменшити матеріалоємність конструкції без утрати необхідних характеристик міцності та жорсткості.

В процесі проектування конструкцій на основі волокнистих композитів проводиться попередній розрахунок деформаційних, міцнісних та інших характеристик конструкцій. Аналіз цих розрахунків надалі уможливлює коригування конструктивних особливостей шляхом зміни механічних властивостей композита та параметрів конструкції (розміру, форми тощо). Процес проектування конструкцій із використанням волокнистих композитів дає додаткові можливості для керування механічними властивостями композита за рахунок варіювання марками матеріалів матриці та волокна, розмірами волокон, характеристиками армування (напрямом, частотою, схемою укладки) тощо. Для раціонального вибору вищезазначених параметрів необхідно якомога точніше визначити компоненти напружено-деформованого стану конструкцій у реальних умовах експлуатації.

Існує значна кількість механічних аспектів, які необхідно враховувати при дослідженні волокнистих композиційних матеріалів. Зокрема, однією з основних проблем при розв’язанні задач механіки композитів є адекватне визначення пружних властивостей композиційного матеріалу. При реалізації цього завдання найпоширенішою тенденцією є врахування специфічних властивостей матриці та волокна (анізотропії, пластичності, в’язкопружності та інших) при визначенні властивостей композита, а також урахування особливостей їх сумісного деформування (наявність перехідного шару, адгезії тощо). Процес розрахунку напружено-деформованого стану конструкцій із композитів без урахування анізотропних властивостей волокна та матриці не завжди дає адекватні результати.

У випадках, коли армування композиційного матеріалу набуває просторового характеру, або ж елемент конструкції з композиційного матеріалу є складовою тривимірної конструкції, розрахунок потребує застосування просторової теорії пружності й розвитку відповідних методів. Одним із таких методів є метод скінченних елементів, який при використанні традиційної схеми не завжди дає прийнятні результати. Тому при розрахунку композитних конструкцій для усунення недоліків традиційного методу доцільно використовувати моментну схему скінченного елемента (МССЕ) з можливістю задавати просторову орієнтацію волокон та анізотропні властивості матеріалу.

Низка конструкцій із композиційних матеріалів, зокрема, з гумовокордних, у реальних умовах експлуатації проявляють геометрично нелінійний характер

залежності між напруженнями та деформаціями. Вказаний характер деформування потребує розробки концептуально нових способів її врахування.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана згідно з планом наукових досліджень, проведених на математичному факультеті Запорізького національного університету за держбюджетними темами «Розробка чисельних методів та інструментальних засобів для математичного моделювання статичних і динамічних процесів у складних механічних системах» (2003-2005 рр.), № ДР 0103U000721; «Розробка методів чисельного аналізу контактних задач механіки еластомерів та композитів у статичній та динамічній постановці» (2005-2007 рр.), № ДР 0105U002192; «Розробка методик та програмного забезпечення для розрахунку конструкцій із гумових та гумовокордних матеріалів» (2009-2010 рр.), № ДР 0109U002522; «Аналітико-чисельні методи розв'язку задач механіки неоднорідних конструкцій на базі сучасних комп'ютерних технологій та візуалізація процесів» (2012-2013 рр.), № ДР 0112U003061; «Математичне моделювання конструкцій неоднорідної структури на базі сучасних інформаційних технологій» (2015-2016 рр.), № ДР 0115U00761; «Інструментальна система аналізу складних механічних процесів FORTU-FEM», № ДР 0111U009113, (2011 р.) та за господарським договором № 1/15 від 5.02.2015 р. «Разработка программно-методического обеспечения для определения разрушающих нагрузок оболочек трехслойной конструкции из композиционного материала в условиях комплексного эксплуатационного нагружения» між Державним підприємством «Конструкторське бюро «Південне» та Запорізьким національним університетом (2015 р.).

Мета та задачі дослідження. Метою роботи є розв'язання проблеми визначення напружено-деформованого стану просторових конструкцій із волокнистих композиційних матеріалів на основі вдосконалення моделей пружних сталих та розробки ефективних чисельних підходів до розв'язання крайових задач механіки деформівного твердого тіла.

Поставлена мета передбачає реалізацію таких завдань:

- визначення ефективних пружних характеристик композиційного матеріалу з урахуванням трансверсально-ізотропних (транстропних) властивостей матриці та волокна на основі кінематичної та енергетичної умови узгодження;
- розробка підходу до розрахунку пружних сталих односпрямованого композита, періодично армованого двома сортами волокон, з урахуванням транстропних властивостей матриці та волокна;
- побудова матриці жорсткості тривимірного скінченного елемента для композиційного матеріалу з урахуванням просторового армування волокнами на основі МССЕ;

- застосування МССЕ до розробки чисельного підходу з урахуванням геометричної нелінійності матеріалу;
- створення пакету прикладних програм для визначення напружено-деформованого стану конструкцій із волокнистих композитів й дослідження його ефективності на конкретних задачах;
- визначення та аналіз напружено-деформованого стану промислових конструкцій із гумовокордних матеріалів на базі запропонованого програмного пакету;
- застосування програмного пакету до визначення напружено-деформованого стану аерокосмічних конструкцій із волокнистих композитів.

Об'єкт дослідження – процеси деформування волокнистих композиційних матеріалів та конструкцій на їх основі.

Предмет дослідження – компоненти напружено-деформованого стану волокнистих композиційних матеріалів та конструкцій із них.

Методи дослідження – для визначення ефективних пружних характеристик волокнистого композиційного матеріалу та напружено-деформованого стану конструкцій із композитів використовувались як аналітичні методи розв'язання крайових задач, так і модифікований метод скінченних елементів.

Наукова новизна отриманих результатів:

- на основі дослідження представницького об'ємного елемента вперше отримані аналітичні співвідношення для ефективних пружних характеристик волокнистого композиційного матеріалу з урахуванням транстропних властивостей матриці та волокна;
- вперше запропоновано підхід до визначення ефективних характеристик односпрямованого волокнистого композиційного матеріалу, періодично армованого двома сортами волокон, з урахуванням транстропних властивостей матриці та волокон;
- на основі моментної схеми скінченного елемента вперше побудовано матрицю жорсткості тривимірного скінченного елемента композиційного матеріалу з урахуванням просторового армування волокнами;
- отримали подальший розвиток чисельні підходи до врахування геометричної нелінійності волокнистого композиційного матеріалу із застосуванням МССЕ для дослідження напружено-деформованого стану силових елементів із волокнистих композитів;
- досліджено особливості напружено-деформованого стану конструкцій із гумовокордних матеріалів на основі застосування МССЕ;
- запропоновано методику визначення напружено-деформованого стану аерокосмічних конструкцій із волокнистих композитів в умовах експлуатаційного навантаження.

Практичне значення отриманих результатів. Отримані співвідношення для визначення ефективних характеристик волокнистих композитів та

розроблений програмний комплекс можуть бути застосовані при проектуванні та вдосконаленні конструкцій із композиційних матеріалів на відповідних промислових підприємствах машинобудівної, металургійної, будівельної, транспортної та інших галузей.

Підходи, запропоновані в дисертаційній роботі, були використані у відділі механіки еластомерних конструкцій інституту геотехнічної механіки НАН України (м. Дніпро) при розрахунку та створенні гумових віброізоляторів із проміжним шаром із волокнистих композитів. Розроблений програмний комплекс використовувався і впроваджений в КБ «Південне» (м. Дніпро) для визначення напружено-деформованого стану головного обтічника ракетоносія.

Результати дисертаційного дослідження використовуються в навчальному процесі при виконанні кваліфікаційних робіт студентів напряму підготовки «Математика» та при вивченні студентами напряму підготовки «Прикладна математика» навчального курсу «Метод скінченних елементів».

Особистий внесок здобувача. Матеріали дисертаційної роботи повною мірою відображені в публікаціях автора. Основні результати дослідження викладено в 67 наукових працях, з них: 3 монографії [1-3]; 53 статті [4-9, 11-46, 57-67], серед яких 30 входять до переліків, затверджених Департаментом атестації кадрів вищої кваліфікації Міністерства освіти і науки України з технічних наук [11-40], 6 у журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних, або у зарубіжних наукових фахових виданнях [4-9], 6 у збірниках матеріалів конференцій [41-46] та 11 додаткових публікацій [57-67]; 10 тез доповідей [47-56] та 1 авторське свідоцтво [10].

Усі результати дисертаційної роботи, що виносяться на захист, отримані автором особисто. 9 наукових робіт опубліковано одноосібно [4, 11-15, 44, 48, 61]. У роботах, написаних у співавторстві, здобувачеві належать:

- застосування моментної схеми до побудови матриці жорсткості скінченних елементів [3, 5, 22, 63];
- чисельні результати пружного розрахунку конструкцій за допомогою методу скінченних елементів, у тому числі неоднорідних [1-3, 6, 8, 9, 16, 20, 21, 23-27, 33-40, 41-43, 47, 49, 51, 53-56, 57, 58, 62, 65,];
- співвідношення для ефективних характеристик волокнистого композиційного матеріалу [1, 10, 17, 19, 28, 29, 32, 46, 59, 66];
- розробка підходу до врахування геометричної нелінійності волокнистого композиційного матеріалу із застосуванням моментної схеми скінченного елемента [1-3, 7, 18];
- пакет прикладних програм для визначення напружено-деформованого стану конструкцій із волокнистих композитів [1-3, 30, 31, 45, 49, 50, 52, 60, 64, 67].

Апробація результатів дисертації. Основні результати роботи доповідались на конференціях та симпозіумах: Міжнародна конференція

«Dynamical System Modeling and Stability Investigation» – «DSMSI – 2001», КНУ ім. Тараса Шевченка, м. Київ, 22-25 травня 2001 р.; XII, XIII симпозіуми «Проблемы шин и резинокордных композитов», НДІШП, м. Москва, 2001 р., 2002 р.; Міжнародна науково-технічна конференція «Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні ІКТМ-2004», Національний авіаційний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», м. Харків, 17-19 листопада 2004 р.; VI Міжнародний симпозіум «Механіка еластомерів – 2005», інститут геотехнічної механіки ім. Н.С. Полякова, м. Дніпропетровськ, 22-24 листопада 2005 р.; XI міжнародна наукова конференція імені М. Кравчука, КНУ ім. Тараса Шевченка, м. Київ, 18-20 травня 2006 р.; Міжнародна конференція «Актуальні проблеми прикладної математики і механіки», ІПМаш ім. А.М. Підгорного НАН України, м. Харків, 23-26 жовтня 2006 р.; Конференція молодих вчених та спеціалістів «Сучасні проблеми машинобудування», ІПМаш ім. А.М. Підгорного НАН України, м. Харків, 4-7 грудня 2006 р.; Міжнародна науково-технічна конференція «Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні ІКТМ-2008», Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків, 2008 р.; IV Всеукраїнська науково-практична конференція «Сучасні тенденції розвитку інформаційних технологій у науці, освіті та економіці», ЛНУ ім. Т. Шевченка, м. Луганськ, 15-17 квітня 2010 р.; II Міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій», м. Ялта, 4-7 червня 2010 р.; XI Міжнародна конференція з математичного моделювання МКММ – 2010, присвячена 100-річчю від дня народження академіка В.В. Новожилова, м. Херсон, Херсонський національний технічний університет, 13-18 вересня 2010 р.; Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки – 2011», м. Дніпропетровськ-Дніпродзержинськ, 13-15 квітня 2011 р; XII Міжнародна конференція з математичного моделювання МКММ–2011, присвячена 190-річчю від дня народження академіка П.Л. Чебишева, м. Херсон, Херсонський національний технічний університет, 12-17 вересня 2011 р.; III Міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій», м. Ялта, 10-14 червня 2011 р.; IV Міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми прикладної механіки і міцності конструкцій», м. Запоріжжя, 8-10 червня 2012 р.; XIII Міжнародна конференція з математичного моделювання МКММ – 2012, присвячена 370-річчю від дня народження академіка І. Ньютона, м. Херсон, Херсонський національний технічний університет, 17-22 вересня 2012 р.; XIV Міжнародна конференція з математичного моделювання МКММ – 2013, присвячена 150-річчю від дня народження академіка О.М. Крилова, м. Херсон, Херсонський національний технічний університет, 17-21 вересня 2013 р.; XV Міжнародна конференція з математичного моделювання МКММ-2014, присвячена 160-річчю від дня народження Анрі Пуанкаре, м. Херсон,

Херсонський національний технічний університет, 16-20 вересня 2014 р.; V Міжнародна науково-технічна конференція «Актуальні проблеми прикладної механіки і міцності конструкцій», м. Запоріжжя, 21-24 травня 2015 р.; 20th International Scientific Conference «Mechanika 2015», Kaunas, Lithuania, 23-24 April 2015.

У цілому дисертація була представлена та обговорювалася на міжвузівському науковому семінарі Запорізького національного університету «Актуальні проблеми прикладної математики і механіки» (керівник д.т.н., проф. В.З. Грищак, 2016) та обговорювалася у відділі обчислювальної механіки Інституту механіки імені С.П. Тимошенка НАН України (керівник д.ф.-м.н., проф. О.Я. Григоренко, 2016).

Публікації. Основні результати дослідження викладено в 67 наукових працях, з них: 3 монографії; 53 статті, серед яких 30 входять до переліків, затверджених Департаментом атестації кадрів вищої кваліфікації Міністерства освіти і науки України з технічних наук, 6 у журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних, або в зарубіжних наукових фахових виданнях, 6 у збірниках матеріалів конференцій та 11 додаткових публікацій; 10 тез доповідей та 1 авторське свідоцтво.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, семи розділів, висновків та списку використаних джерел із 341 найменування на 42 сторінках та 6 додатків на 18 сторінках. Загальний обсяг роботи складає 319 сторінок, у тому числі 255 сторінок основного тексту, ілюстрованих 107 рисунками та 10 таблицями.

ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовується актуальність теми дослідження, формулюються мета та завдання роботи, визначаються об’єкт, предмет та методи досліджень, висвітлюються наукова новизна та практичне значення отриманих результатів, а також особистий внесок автора в роботах, виконаних у співавторстві, наводиться апробація результатів дисертації та кількість публікацій, виконаних за темою дисертаційної роботи.

У **першому розділі** розглядаються основні підходи до розв’язання задач механіки волокнистих композитів. Як правило, з огляду на конструктивні особливості композиційного матеріалу задача поділяється на дві. Перша полягає у гомогенізації пружних сталих волокнистого композита. У загальному випадку неоднорідний композит представляється однорідним анізотропним матеріалом з пружними сталими, що залежать від пружних сталих компонентів та об’ємного вмісту кожного з них у композиті. На сьогодні основною тенденцією при визначенні механічних характеристик композиційних матеріалів є врахування

особливих властивостей матеріалів матриці та волокна (анізотропії, в'язкопружності, пластичності, слабкої стисливості тощо) та особливостей сумісного деформування матриці та волокна (контакту матеріалу матриці з матеріалом волокна, особливостей зчеплення між ними, дифузії, наявності пошкоджень тощо). Наслідком урахування цих особливостей є створення громіздких математичних моделей, до яких не завжди вдається застосовувати аналітичні методи розв'язку. Для використання цих моделей застосовують наближені методи (асимптотичні, чисельні), які, як правило, дають не аналітичні співвідношення, а числові значення механічних характеристик. Дослідження механічних характеристик композитів отримали глибокий розвиток у фундаментальних роботах таких авторів, як Аболіньш Д.С., Акбаров С.Д., Андріанов І.В., Ахундов В.М., Большаков В.І., Ванін Г.А., Верещака С.М., Гузь О.М., Данишевський В.В., Кагадій Т.С., Карпинос Д.М., Класторни М., Кондерла П., Крістенсен Р., Кучер М.К., Лапін О.А., Маслов Б.П., Назаренко Л.В., Павленко А.В., Пієкарський Р., Сендецькі Дж., Тангорра Г., Фильштинський Л.А., Хашин З., Хілл Р., Хорошун Л.П., Шикула О.М., Aboudi J., Abrahams I.D., Akasaka T., Allen D.H., Ashton J.E., Argyris J., Arnold S.M., Barbero E.J., Berger H., Bravo-Castillero J., Dvorak G., Halpin J.C., Hazel A.L., Gabbert U., Guinovart-Díaz R., Kamiński M., Klusemann B., López-Realpozo J.C., Panzera T.H., Parnell W.J., Pastore C.M., Rodríguez-Ramos R., Sabina F.J., Suwatnodom P., Talreja R., Tang T., Tenek L.T., Tucker C.L., Würkner M. та інші.

На основі аналізу наведених досліджень можна зазначити, що знаходження в аналітичному вигляді співвідношень для пружних сталих композиційного матеріалу з урахуванням особливостей механічних характеристик матриці та волокна, які б адекватно описували поведінку реальних композитів, є актуальним і перспективним завданням.

Застосування ефективних механічних характеристик композита зводить задачу механіки неоднорідного середовища до задачі механіки анізотропного тіла, до розв'язання якої адаптовано відомі як аналітичні, так і чисельні методи розв'язку. Великий внесок у розвиток методів розв'язання задач механіки анізотропних та неоднорідних середовищ, у тому числі механіки волокнистих композиційних та гумовокордних матеріалів, зробили такі науковці, як Амбарцумян С.О., Бабаєв А.Е., Бабич І.Ю., Баженов В.А., Бакулін В.М., Беспалова О.І., Бідерман В.Л., Болотін В.В., Булавс Ф.Я., Ванін Г.А., Василенко А.Т., Васильєв В.В., Вериженко В.Є., Головчан В.Т., Голуб Г.П., Гондлях О.В., Григолюк Е.І., Григоренко О.Я., Григоренко Я.М., Грищак В.З., Гудрамович В.С., Гузь О.М., Гузь І.О., Гуляр О.І., Дзюба А.П., Дохняк Б.М., Димніков С.І., Дирда В.І., Ємельянов І.Г., Камінський А.О., Карнаухов В.Г., Карпинос Д.М., Каспаров А.А., Кваша Е.М., Киричевський В.В., Кислоокий В.М., Козак О.Л., Космодаміанський О.С., Коханенко Ю.В., Кубенко В.Д., Куликов Г.М., Курпа Л.В., Лоза І.А., Мельников С.Л., Муштарі Х.М.,

Назаренко В.М., Немировський Ю.В., Пелех Б.Л., Піскунов В.Г., Плотнікова С.В., Победря Б.Є., Протасов В.Д., Рассказов О.О., Рассоха О.О., Растеряєв Ю.К., Рікардс Р.Б., Рутковський В.А., Сахаров О.С., Сендецькі Дж., Скорняков Е.С., Скудра А.М., Сметанкіна Н.В., Тамуж В.П., Тарнопольський Ю.М., Тетерс Г.О., Томашевський В.Т., Топор О.Г., Хорошун Л.П., Циховський В.К., Шевченко В.П., Шевченко Ю.М., Шейко Т.І., Шульга М.О., Kennedy R.H., Pagano H.J., Patel H.P. та інші.

Для розрахунку напружено-деформованого стану реальних конструкцій широко використовуються чисельні методи, орієнтовані на сучасні комп'ютери. Значного розвитку набули такі чисельні методи, як метод скінченних різниць, метод граничних елементів, метод скінченних елементів (МСЕ).

Одним із універсальних методів дослідження промислових конструкцій є МСЕ. Тому при створенні ефективних методів розрахунку напружено-деформованого стану конструкцій, не орієнтованих на конкретний клас об'єктів і різновид навантаження, МСЕ має безсумнівні переваги в порівнянні як з аналітичними, так і з іншими чисельними методами та знаходить широке застосування при розв'язанні задач механіки деформівного твердого тіла в дослідженнях науковців: Баженова В.А., Гоменюка С.І., Гондляха О.В., Городецького О.С., Григоренка Я.М., Гуляра О.І., Киричевського В.В., Кислоокого В.М., Козака О.Л., Мельникова С.Л., Пискунова С.О., Рутковського В.А., Сахарова О.С., Топора О.Г., Циховського В.К. та інших.

Аналізуючи представлені методи, можна зазначити, що попри наявність робіт, присвячених визначенню напружено-деформованого стану конструкцій на основі волокнистих композитів, окремі проблеми наразі залишаються розв'язаними в неповній мірі. Крім того, наявність у складі конструкції композитних матеріалів зумовлює подальше ускладнення конструкції, як з геометричної точки зору, так і в аспекті її експлуатації. Унаслідок цього виникають досить складні математичні задачі, у яких не завжди можливо ввести спрощувальні гіпотези та ефективно застосувати наявні методи. Це зумовлює необхідність розвитку методів розв'язання таких задач, зокрема, методу скінченних елементів. Складна структура армування та складна геометрія конструкції потребують розробки скінченних елементів, які без утрати точності розрахунків дозволили б спростити проектування конструкцій інженерами.

У **другому розділі** методом представницького об'ємного елемента, на основі кінематичної умови узгодження, отримано співвідношення для ефективних пружних сталих композиційного матеріалу. Схему армування прийнято гексагональною, матеріал матриці і волокна – транстропними (площина ізотропії перпендикулярна осі волокон).

Елемент волокнистого композиційного матеріалу, що має транстропні властивості, представлено у вигляді комбінації двох циліндрів нескінченної довжини: транстропного порожнистого, що моделює матрицю, та транстропного

суцільного, що моделює волокно. Для цього об’єм елементарної гексагональної комірки апроксимовано об’ємом циліндра, причому радіус циліндра прийнято таким, щоб об’ємний вміст волокна в гексагональній комірці та об’ємний вміст волокна $f = a^2/b^2$ в циліндричній комірці були б однаковими (рис.1).

Пружні сталі знаходяться із розв’язання двох крайових задач, спочатку розв’язується крайова задача сумісного деформування транстропної матриці та транстропного волокна. В результаті розв’язання задачі отримано компоненти напружено-деформованого стану як функції пружних сталих матеріалу матриці та матеріалу волокна, а також об’ємної частки кожного з них у композиті. Далі отримано розв’язок аналогічної крайової задачі для композита, який представляється однорідним транстропним матеріалом із поки ще невідомими пружними сталими. В результаті розв’язання отримано компоненти напружено-деформованого стану як функції невідомих пружних сталих однорідного транстропного матеріалу, що моделює композит. Умовою узгодження виступає рівність деяких компонентів вектора переміщень у обох задачах. Із цієї умови знаходимо невідомі пружні сталі транстропного матеріалу як функції пружних сталих матеріалу матриці та матеріалу волокна, а також об’ємної частки кожного з них в композиті.

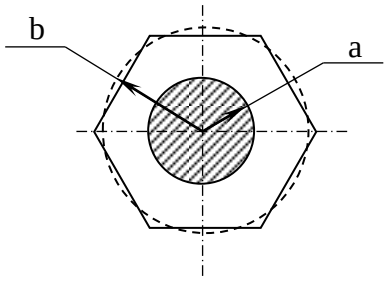


Рисунок 1 – Гексагональна комірка.

Чим точніше розв’язана крайова задача, тим точнішими будуть пружні характеристики композита. Аналітичні розв’язки для такої комбінації можна отримати лише для обмеженого кола крайових задач. У процесі визначення пружних сталих розв’язано такі задачі: рівномірне поздовжнє розтягнення, рівномірне поперечне розтягнення, чистий поперечний зсув та чистий поздовжній зсув. На основі кінематичної умови узгодження із розв’язання задачі про рівномірне поздовжнє розтягнення отримано ефективні пружні сталі волокнистого композита: поздовжній модуль E_1 та коефіцієнт Пуассона ν_{12} (символом $^\circ$ позначені пружні сталі, що відносяться до матеріалу волокна, а символом * – до матеріалу матриці):

$$E_1 = \frac{\left(\alpha - 2\nu_{12}^{\circ}\beta\right)E_1^{*}(1-f) + \left(\alpha - 2\nu_{12}^{*}\beta\right)E_1^{\circ} f}{\alpha - 2\beta\nu_{12}^{\circ} + 2f\nu_{21}^{*}E_2^{\circ}\left(\nu_{12}^{\circ} - \nu_{12}^{*}\right)}, \tag{1}$$

$$\nu_{12} = \frac{\left(\alpha - 2\beta\nu_{12}^{\circ}\right)\nu_{12}^{*} + 2E_2^{\circ} f\left(\nu_{12}^{\circ} - \nu_{12}^{*}\right)}{\alpha - 2\beta\nu_{12}^{\circ} + 2f\nu_{21}^{*}E_2^{\circ}\left(\nu_{12}^{\circ} - \nu_{12}^{*}\right)}, \tag{2}$$

де $\alpha = E_2^{*}(1-f)\left(1-\nu_{23}^{\circ}\right) + E_2^{\circ}\left(f\left(1-\nu_{23}^{*}\right) + \left(1+\nu_{23}^{*}\right)\right)$, $\beta = \nu_{21}^{\circ}E_2^{*}(1-f) + \nu_{21}^{*}fE_2^{\circ}$.

На основі кінематичної умови узгодження із розв'язання задач про рівномірне поперечне розтягнення та чистий поперечний зсув отримано ефективні пружні сталі волокнистого композита: поздовжній модуль E_2 та коефіцієнт Пуассона ν_{23}. Використовуючи рівність радіальних переміщень при чистому поперечному зсуві як кінематичну умову узгодження для поздовжнього модуля E_2, маємо:

$$E_2 = \frac{2\alpha E_2^*}{\left(\alpha\left(\left(1+\nu_{23}^*\right)+4\left(\gamma-2E_2^*\right)\left(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*\right)\left(f\chi_1+\chi_2\right)\right)+\delta+\eta_1\eta_2\right)}, \qquad (3)$$

де $\gamma = E_2^*\left(1-\nu_{23}^\circ\right)+E_2^\circ\left(1+\nu_{23}^*\right)$, $\delta = f\left(1+\nu_{23}^*\right)\left(\gamma-2E_2^\circ\right)+\gamma\left(1-\nu_{23}^*\right)$, $\eta_1 = 2E_1^\circ E_1^*(f-1)\times$ $\times f\left(\nu_{21}^*\gamma-2\nu_{21}^\circ E_2^*\right)^2$, $\eta_2 = 1/\left(E_2^*\left(\alpha\left(E_1^\circ f+E_1^*(1-f)\right)-2\beta\left(\nu_{12}^* E_1^\circ f+\nu_{12}^\circ E_1^*(1-f)\right)\right)\right)$, $\chi_1 = \frac{(d_{11}-d_{21})}{d_{11}d_{22}-d_{21}d_{12}}$, $\chi_2 = \frac{(d_{22}-d_{12})}{d_{11}d_{22}-d_{21}d_{12}}$, $d_{11} = E_2^\circ\left(\left(4f-3-1/f^2\right)\left(1+\nu_{23}^*\right)-\right.$ $\left.-4f\left(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*\right)\right)-E_2^*\left(\left(4f-1/f^2-3\right)\left(1+\nu_{23}^\circ\right)+4\left(1/f^2-f\right)\left(1-\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ\right)\right)$, $d_{12} =$ $= E_2^\circ\left((1/f-f)\left(1+\nu_{23}^*\right)-4\left(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*\right)\right)-E_2^*\left((1/f-f)\left(1+\nu_{23}^\circ\right)+4(1-1/f)\left(1-\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ\right)\right)$, $d_{21} = E_2^\circ\left(4f\left(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*\right)+\left(2f+1/f^2-3\right)\left(1+\nu_{23}^*\right)\right)-E_2^*\left(\left(2f+1/f^2-3\right)\left(1+\nu_{23}^\circ\right)+\right.$ $\left.+4\left(f-1/f^2\right)\left(1-\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ\right)\right)$, $d_{22} = E_2^\circ\left((2-f-1/f)\left(1+\nu_{23}^*\right)-4\left(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*\right)\right)-$ $-E_2^*\left((2-f-1/f)\left(1+\nu_{23}^\circ\right)+4(1/f-1)\left(1-\nu_{21}^\circ\nu_{12}^\circ\right)\right)$.

Для коефіцієнта Пуассона:

$$\nu_{23} = \frac{\left(\alpha\left(\left(1+\nu_{23}^*\right)+4\left(\gamma-2E_2^*\right)\left(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*\right)\left(f\chi_1+\chi_2\right)\right)-\left(\delta+\eta_1\eta_2\right)\right)}{\left(\alpha\left(\left(1+\nu_{23}^*\right)+4\left(\gamma-2E_2^*\right)\left(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*\right)\left(f\chi_1+\chi_2\right)\right)+\left(\delta+\eta_1\eta_2\right)\right)}. \qquad (4)$$

Використовуючи рівність окружних переміщень при чистому поперечному зсуві як кінематичну умову узгодження для поздовжнього модуля E_2, маємо:

$$E_2 = \frac{2\alpha E_2^*}{\left(\alpha\left(\left(1+\nu_{23}^*\right)+4\left(\gamma-2E_2^*\right)\left(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*\right)\left(f\chi_1-\chi_2\right)\right)+\delta+\eta_1\eta_2\right)}. \qquad (5)$$

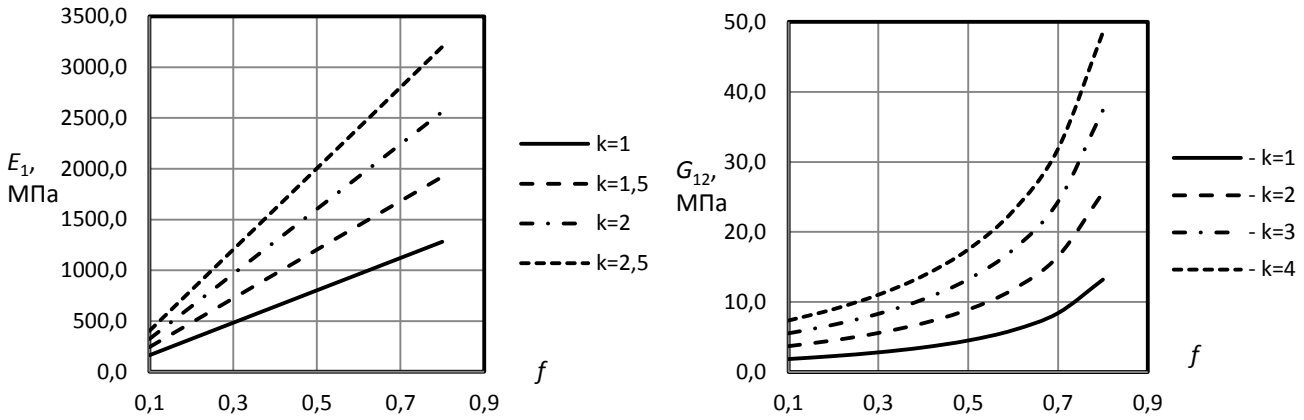
Для коефіцієнта Пуассона:

$$\nu_{23} = \frac{\left(\alpha\left(\left(1+\nu_{23}^*\right)+4\left(\gamma-2E_2^*\right)\left(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*\right)\left(f\chi_1-\chi_2\right)\right)-\left(\delta+\eta_1\eta_2\right)\right)}{\left(\alpha\left(\left(1+\nu_{23}^*\right)+4\left(\gamma-2E_2^*\right)\left(1-\nu_{21}^*\nu_{12}^*\right)\left(f\chi_1-\chi_2\right)\right)+\left(\delta+\eta_1\eta_2\right)\right)}. \qquad (6)$$

На основі кінематичної умови узгодження із розв'язання задачі про чистий поздовжній зсув отримаємо ефективний модуль зсуву:

$$G_{12}=\frac{G_{12}^{*}\left(G_{12}^{*}(1-f)+G_{12}^{\circ}(f+1)\right)}{G_{12}^{\circ}(1-f)+G_{12}^{*}(f+1)}. \qquad (7)$$

Визначено ефективні пружні сталі для гумовокордного матеріалу (рис.2) і композиційного матеріалу на основі епоксидної смоли та поліетиленових волокон, проведено їх порівняння з результатами експериментальних досліджень.



а б

Рисунок 2 – Залежність поздовжнього модуля E_1 (а) та модуля зсуву G_{12} (б) гумовокордного матеріалу від f (модуль пружності гуми дорівнює kE^{*}, $E^{\circ}=1{,}6\cdot 10^{3}$ МПа, $E^{*}=4{,}5$ МПа).

У **третьому розділі** для визначення ефективних пружних сталих композиційного матеріалу методом представницького об’ємного елемента в аналогічний спосіб використано енергетичну умову узгодження: рівність енергії пружної деформації для сумісного деформування суцільного та порожнистого циліндрів, що моделюють матеріал волокна та матриці відповідно, та енергії пружної деформації для суцільного циліндра, що моделює композит.

Співвідношення для сталих E_1, ν_{12} та G_{12} збігаються для кінематичної та енергетичної умов узгодження. Для поперечного модуля E_2 маємо:

$$E_2=\frac{2\alpha E_2^{*}E_2^{\circ}}{\left(E_2^{\circ}(\delta_1+\eta_1\eta_2)+\alpha\delta_2\right)}, \qquad (8)$$

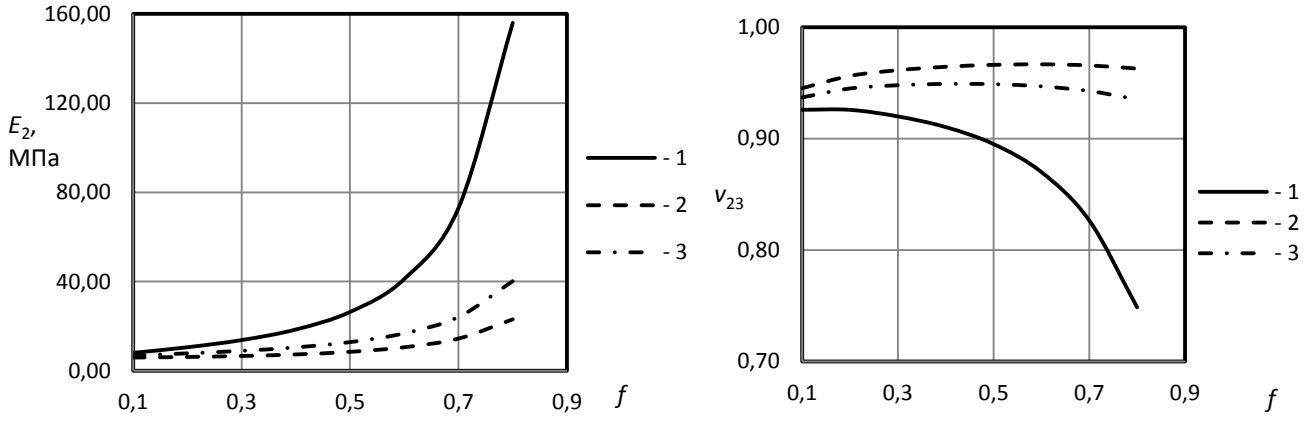
де $\delta_1=E_2^{*}\left(1-\nu_{23}^{\circ}\right)\left(f\left(1+\nu_{23}^{*}\right)+\left(1-\nu_{23}^{*}\right)\right)+E_2^{\circ}\left(1-\left(\nu_{23}^{*}\right)^2\right)(1-f)$, $\delta_2=E_2^{\circ}\left(\alpha_1\left(1+\nu_{23}^{*}\right)+\right.$ $\left.+\beta_1\left(\nu_{23}^{*}+\nu_{21}^{*}\nu_{12}^{*}\right)\right)+E_2^{*}\left(\alpha_2\left(1+\nu_{23}^{\circ}\right)+\beta_2\left(\nu_{23}^{\circ}+\nu_{21}^{\circ}\nu_{12}^{\circ}\right)\right)$, $b_1=E_2^{\circ}\left(1+\nu_{23}^{*}\right)-E_2^{*}\left(1+\nu_{23}^{\circ}\right)$, $\alpha_1=\left(1+2f(\zeta_1-3\zeta_2)+3\left(1/f^3+1/f^2+1/f+3+6f^2\right)\zeta_2^2-6\left(f^2+1/f^2+2f\right)\zeta_1\zeta_2+\right.$ $\left.+\left(f^2+3/f-3+3f\right)\zeta_1^2\right)(1-f)$, $\alpha_2=f+2(1-f)f(3\zeta_2-\zeta_1)+\left(f^3-2f^2+10f-18+\right.$ $\left.+9/f\right)\zeta_1^2-6\left(f^3+f^2-2f-3/f+3/f^2\right)\zeta_1\zeta_2+9\left(2f^3-2f^2+f-2+1/f^3\right)\zeta_2^2$,

$\zeta_1 = b_1\chi_1$, $\zeta_2 = b_1\chi_2$, $\beta_1 = 4\left(f\zeta_1^2 - 6f\zeta_1\zeta_2 + 3\left(1+f+f^2\right)\zeta_2^2\right)(f-1)$,
$\beta_2 = -12\left((1-f)\left(\zeta_2\left(1+f+f^2\right)/f - \zeta_1\right)\right)^2 / f$.

Для коефіцієнта Пуассона ν_{23} маємо

$$\nu_{23} = \frac{\left(\alpha\delta_2 - E_2^\circ(\delta_1 + \eta_1\eta_2)\right)}{\left(\alpha\delta_2 + E_2^\circ(\delta_1 + \eta_1\eta_2)\right)}. \quad (9)$$

Визначено ефективні пружні сталі для гумовокордного матеріалу (рис. 3) та волокнистого композиційного матеріалу на основі епоксидної смоли – поздовжній модуль E_1, поперечний модуль E_2, коефіцієнти Пуассона ν_{12}, ν_{23} та модуль зсуву G_{12}.



а

1 – формула (1), 2 – (3), 3 – (8)

б

1 – формула (2), 2 – (4), 3 – (9)

Рисунок 3 – Залежність поперечного модулю E_2 (а) та коефіцієнта Пуассона ν_{23} (б) гумовокордного композита від *f*.

Порівняння з експериментальними даними показує, що співвідношення для поперечного модуля E_2 та коефіцієнта Пуассона ν_{23} на основі енергетичної умови узгодження дають кращий результат, ніж співвідношення на основі кінематичної умови узгодження.

Запропоновано підхід, який дозволяє на основі аналітичних розв’язків визначати пружні сталі композиційного матеріалу з односпрямованими транстропними волокнами двох сортів та транстропною матрицею.

Поперечний перетин композиційного матеріалу розбивається на гексагональні комірки, так, щоби центр перетину діагоналей шестикутника збігався з центром волокна, як показано на рисунку 4.

При такому розбитті матеріал матриці в будь-якій гексагональній комірці матиме однаковий об’єм, якщо діаметр обох сортів волокон однаковий або об’єм матеріалу матриці буде різним, якщо діаметр волокна у кожного сорту свій. Таким чином отримується два типи гексагональних комірок – для волокна I сорту

(позначено точками) і для волокна II сорту (позначено похилою штриховкою). Далі згідно з процедурою, викладеною в розділі 2, гексагональну комірку апроксимовано кругом, рівним площі цієї комірки. Після цього за формулами, отриманими в розділі 2 і в попередніх підрозділах розділу 3, визначаються пружні сталі для двох областей композита, що містять волокна I та II сорту. Зважаючи на те, що обидва сорти волокна односпрямовані, ці комірки матимуть транстропні властивості з однаковими площинами ізотропії навіть якщо обидва сорти волокна та матриця будуть ізотропними. Далі гексагональна комірка, що включає один із сортів волокна, наприклад, I, апроксимується кругом. Результатом є отримання «умовного», уже двокомпонентного волокнистого матеріалу з розрахованими пружними сталими транстропних «умовної» матриці та «умовного» волокна (рис. 4).

До моделі «умовного» композиційного матеріалу повторно застосовується процедура визначення пружних сталих. Тоді перетин цього «умовного» матеріалу розбивається гексагональними комірками, і до елементарної гексагональної комірки застосовується процедура визначення пружних сталих за формулами, отриманими в розділі 2 та початкових підрозділах розділу 3, за визначеними раніше пружними сталими «умовної» матриці та «умовного» волокна. Об'ємна частка «умовного» волокна визначається як відношення площі круга, що займає «умовне» волокно, до площі гексагональної комірки. Отримані пружні сталі «умовного» композиційного матеріалу й визначатимуть пружні сталі трикомпонентного композиційного матеріалу з двома сортами волокон.

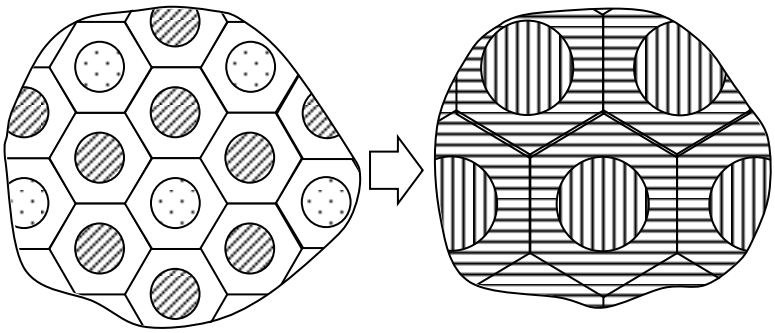
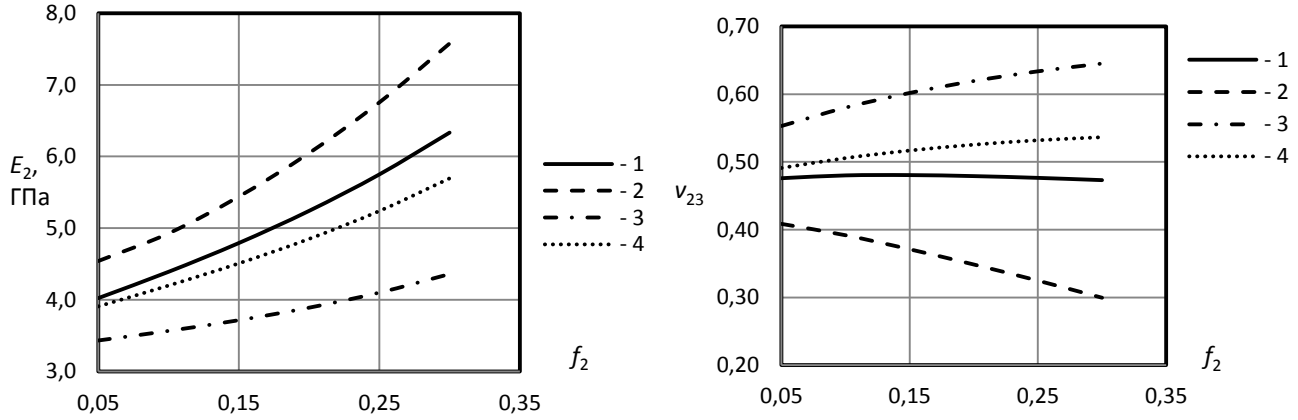


Рисунок 4 – Представлення трикомпонентного композита.

Якщо у вихідному трикомпонентному композиційному матеріалі об'ємна частка волокна I сорту дорівнює f_1, а волокна II сорту – f_2, то об'ємна частка матеріалу матриці складатиме $1-f_1-f_2$. Тоді, згідно з вищевикладеним підходом до представлення «умовної» матриці й «умовного» волокна, об'ємна частка «умовної» матриці складатиме величину $(1-f_1-f_2)f_2/(f_1+f_2)+f_2$, де перший доданок описує частку вихідної матриці в представленні «умовної» матриці, а другий доданок – об'ємну частку волокна II сорту в представленні «умовної» матриці. Таким чином, об'ємна частка «умовної» матриці в «умовному» композиційному матеріалі складатиме величину, що дорівнює $f_2/(f_1+f_2)$.

Аналогічно визначається об'ємна частка «умовного» волокна в «умовному» композиційному матеріалі. Вона складатиме величину, що дорівнює $(1-f_1-f_2)f_1/(f_1+f_2)+f_1$, де перший доданок описує частку вихідної матриці в представленні «умовного» волокна, а другий – об'ємну частку волокна I сорту в представленні «умовного» волокна. Таким чином, об'ємна частка «умовного» волокна в «умовному» композиційному матеріалі складатиме величину $f_1/(f_1+f_2)$.

Ефективні пружні сталі трикомпонентного волокнистого композита обчислено й порівняно з результатами, отриманими за співвідношеннями інших авторів (рис. 5). Найкраще співпадіння дають формули отримані на основі енергетичної умови узгодження.



а

1 – Францевич І.М., Карпинос Д.М.,

2 – формула (1), 3 – (3), 4 – (8)

б

1 – Францевич І.М., Карпинос Д.М.,

2 – формула (2), 3 – (4), 4 – (9)

Рисунок 5 – Залежність поперечного модулю E_2 (а) та коефіцієнта Пуассона ν_{23} (б) трикомпонентного композита від f_2.

У **четвертому розділі** отримано основні співвідношення матриці жорсткості для композиційного матеріалу з довільно орієнтованими волокнами на основі моментної схеми скінченного елемента. Це дозволяє поліпшити збіжність чисельних результатів та використовувати генератори побудови сіток без прив'язки до напряму армування.

Одним із найпоширеніших скінченних елементів, котрі застосовуються в процесі дискретизації просторових областей, є паралелепіпедний скінченний елемент (рис. 6).

Враховуючи особливості розрахунку конструкцій із волокнистих композиційних матеріалів, зручніше всього ввести в розгляд три системи координат – базисну та дві місцевих.

Базисна система координат є незмінною, в ній доцільно описувати всі геометричні та механічні характеристики конструкції, задавати граничні та початкові умови. Одна з місцевих систем координат, як правило, є неортогональною криволінійною системою координат, пов'язаною зі скінченним елементом. При цьому за початок координат вибирається центр скінченного елемента, а напрям осей пов'язаний з напрямом ребер скінченного елемента. Ця система координат може змінюватися в процесі деформування конструкції. У цій системі координат зручно отримувати коефіцієнти матриці жорсткості скінченного елемента. Друга місцева система координат, як правило, також криволінійна, пов'язана з напрямом армування волокнами. В цій системі координат зручно знаходити пружні сталі матеріалу, обчислювати компоненти тензора деформацій та напружень.

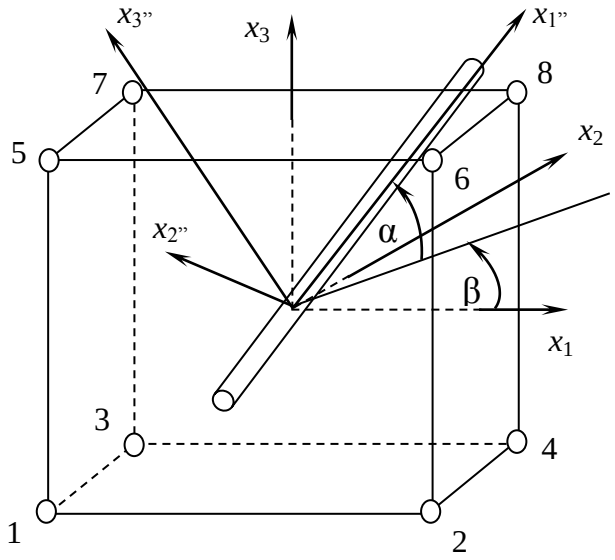


Рисунок 6 – Паралелепіпедний скінченний елемент.

Система координат скінченного елемента та система координат армування перетворюються одна до другої шляхом просторового повороту (рис. 6). Зв'язок між ними визначається співвідношеннями:

$$x_1 = x_{1''}\cos\alpha\cos\beta + x_{2''}\cos\alpha\sin\beta + x_{3''}\sin\alpha,$$

$$x_2 = -x_{1''}\sin\beta + x_{2''}\cos\beta,$$

$$x_3 = -x_{1''}\sin\alpha\cos\beta - x_{2''}\sin\alpha\sin\beta + x_{3''}\cos\alpha. \qquad (10)$$

Зв'язок для компонентів тензора пружних сталих у системі координат армування та системі координат скінченного елемента має вигляд: $C^{ijkl} = C^{i''j''k''l''} a^i_{i''} a^j_{j''} a^k_{k''} a^l_{l''}$, де $a^i_{i''} = \dfrac{\partial x_i}{\partial x_{i''}}$.

Для усунення недоліків традиційного методу скінченних елементів застосовано моментну схему скінченного елемента. Основна ідея цієї схеми полягає в тому, що компоненти поля переміщень розкладаються в ряд, і утримується деяка кількість початкових доданків. Аналогічно розкладаються в ряд компоненти тензора деформацій. Після цього перевіряється відповідність останнього розкладання розкладанню переміщень, і якщо в розкладання деформацій входять доданки, відсутні в розкладанні переміщень, то відповідні доданки видаляються з розкладання деформацій. Перетворені таким чином розкладання використовуються при отриманні матриці жорсткості скінченного елемента.

Апроксимація переміщень по об’єму всередині скінченного елемента представляється у вигляді лінійного закону за всіма трьома напрямами:

$$u_{k'} = \sum_{p=0}^{M}\sum_{q=0}^{N}\sum_{r=0}^{L}\omega_{k'}^{(pqr)}\psi^{(pqr)} = \omega_{k'}^{(000)} + \omega_{k'}^{(100)}\psi^{(100)} + \omega_{k'}^{(010)}\psi^{(010)} +$$

$$+\omega_{k'}^{(001)}\psi^{(001)} + \omega_{k'}^{(110)}\psi^{(110)} + \omega_{k'}^{(101)}\psi^{(101)} + \omega_{k'}^{(011)}\psi^{(011)} + \omega_{k'}^{(111)}\psi^{(111)}, \quad (11)$$

де $\omega_{k'}^{(pqr)}$ – коефіцієнти розкладання переміщень; $\psi^{(pqr)} = (x_1)^p (x_2)^q (x_3)^r \big/ p!q!r!$ – набір степеневих координатних функцій.

Після застосування принципів моментної схеми компоненти тензора деформацій набудуть вигляду:

$$\varepsilon_{11} = e_{11}^{(000)} + e_{11}^{(010)}\psi^{(010)} + e_{11}^{(001)}\psi^{(001)} + e_{11}^{(011)}\psi^{(011)},$$

$$\varepsilon_{22} = e_{22}^{(000)} + e_{22}^{(100)}\psi^{(100)} + e_{22}^{(001)}\psi^{(001)} + e_{22}^{(101)}\psi^{(101)},$$

$$\varepsilon_{33} = e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(100)}\psi^{(100)} + e_{33}^{(010)}\psi^{(010)} + e_{33}^{(110)}\psi^{(110)},$$

$$\varepsilon_{12} = e_{12}^{(000)} + e_{12}^{(001)}\psi^{(001)},\ \varepsilon_{13} = e_{13}^{(000)} + e_{13}^{(010)}\psi^{(010)},\ \varepsilon_{23} = e_{23}^{(000)} + e_{23}^{(100)}\psi^{(100)}, \quad (12)$$

де $e_{ij}^{(pqr)} = \left.\dfrac{\partial^{p+q+r}\varepsilon_{ij}}{(\partial x_1)^p(\partial x_2)^q(\partial x_3)^r}\right|_{x_1=x_2=x_3=0}$ – коефіцієнти розкладання деформацій.

У матричному вигляді співвідношення (12) можна записати так:

$$\{\varepsilon_{ij}\} = \{\psi_{ij}\}\{e_{ij}\},\ \{e_{ij}\} = \left[F_{ij}^{k'}\right]\{\omega_{k'}\},$$

де матриця $\left[F_{ij}^{k'}\right]$ сформована відповідним чином з елементів

$$f_{(\mu\nu\eta)}^{k'} = \left.\partial^{\mu+\nu+\eta} z_{k'} \big/ (\partial x_1)^{\mu}(\partial x_2)^{\nu}(\partial x_3)^{\eta}\right|_{x_1=x_2=x_3=0}.$$

Тоді в матричній формі варіація енергії пружної деформації набуде вигляду:

$$\delta W = \{\delta\omega_{k'}\}^T\left[F_{ij}^{k'}\right]^T \iiint_V \{\psi_{ij}\}^T\left[C^{ijkl}\right]\{\psi_{kl}\}dV\left[F_{kl}^{m'}\right]\{\omega_{m'}\},$$

або

$$\delta W = \{\delta\omega_{k'}\}^T\left[F_{ij}^{k'}\right]^T\left[H^{ijkl}\right]\left[F_{kl}^{m'}\right]\{\omega_{m'}\}, \quad (13)$$

де $\left[H^{ijkl}\right] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\{\psi_{ij}\}^T\left[C^{ijkl}\right]\{\psi_{kl}\}\sqrt{g}\,dx_1dx_2dx_3$ – матриця пружних сталих, яка характеризує фізичні властивості композитного матеріалу з урахуванням метрики простору.

Компоненти вектора переміщень $u_{k'}$ у глобальній системі координат для просторового ізопараметричного скінченного елемента з лінійною

апроксимацією переміщень визначаються через вузлові значення вектора переміщень $u_{k'}^{L}$.

Матриця $[A]$, що визначає зв'язок між коефіцієнтами розкладання (11) $\omega_{k'}^{(pqr)}$ та вузловими значеннями переміщень $u_{k'}^{L}$, визначається співвідношенням:

$$\{\omega_{k'}\} = [A]^T \{u_{k'}^{L}\}. \tag{14}$$

Тоді, варіація енергії пружної деформації запишеться у вигляді:

$$\delta W = \{\delta u_{k'}^{L}\}^T [A][F_{ij}^{k'}]^T [H^{ijkl}][F_{kl}^{m'}][A]^T \{u_{m'}^{L}\}, \text{ або } \delta W = \{\delta u_{k'}^{L}\}^T [K^{k'm'}]\{u_{m'}^{L}\}, \tag{15}$$

де матриця жорсткості скінченного елемента на основі моментної схеми для просторово-армованого волокнистого композита має вигляд:

$$[K^{k'm'}] = [A][F_{ij}^{k'}]^T [H^{ijkl}][F_{kl}^{m'}][A]^T . \tag{16}$$

За допомогою запропонованої матриці здійснено розрахунок вісесиметричної задачі для гумовокордного матеріалу. Проведене порівняння з аналітичним розв'язком показує добру збіжність результатів розрахунку.

П'ятий розділ присвячено розробці підходу до врахування геометричної нелінійності на основі варіаційного принципу Лагранжа та нелінійного тензора деформацій. Описана ітераційна методика його застосування на основі моментної схеми скінченного елемента.

Для однорідних та неоднорідних складових конструкції запишемо тензор скінченних деформацій у вигляді:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(л)} + \varepsilon_{ij}^{(н)}, \tag{17}$$

де $\varepsilon_{ij}^{(л)} = \frac{1}{2}(C_j^{m'} u_{m',i} + C_i^{m'} u_{m',j})$ – лінійна частина тензора деформацій, $\varepsilon_{ij}^{(н)} = \frac{1}{2} u_{m',i} u_{,j}^{m'}$ – нелінійна частина тензора деформацій.

Тоді на основі визначальних співвідношень закону Гука з урахуванням тензора скінченних деформацій (17) можна представити тензор напружень у вигляді:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl}\left(\varepsilon_{kl}^{(л)} + \varepsilon_{kl}^{(н)}\right), \text{ або } \sigma^{ij} = \sigma_{(л)}^{ij} + \sigma_{(н)}^{ij}. \tag{18}$$

Компоненти тензора напружень (18) та тензора деформацій (17) підставляються у вираз для варіації потенційної енергії деформацій:

$$\delta\Pi = \iiint_V \left(\sigma_{(л)}^{ij} + \sigma_{(н)}^{ij}\right)\delta\left(\varepsilon_{ij}^{(л)} + \varepsilon_{ij}^{(н)}\right) dV - \delta A . \tag{19}$$

У виразі (17) виокремимо лінійні складові варіації енергії пружної деформації, які є основою формування матриці жорсткості скінченного елемента як для однорідних, так і для неоднорідних складових конструкції:

$$\iiint\limits_V \sigma_{(л)}^{ij} \delta\varepsilon_{ij}^{(л)} dV = K^{k'm'} u_{k'} \delta u_{m'}. \qquad (20)$$

Нелінійна частина у виразі (19) записується у вигляді:

$$\iiint\limits_V \left(\sigma_{(л)}^{ij} + \sigma_{(н)}^{ij}\right) \delta\varepsilon_{ij}^{(н)} dV + \iiint\limits_V \sigma_{(н)}^{ij} \delta\varepsilon_{ij}^{(л)} dV = N^{k'm'} u_{k'} \delta u_{m'}. \qquad (21)$$

Припускаючи, що конструкція піддається дії тільки розподілених поверхневих навантажень, які можна звести до зосереджених вузлових сил, та враховуючи співвідношення (20), (21), зазначимо, що варіація потенційної енергії набуде вигляду:

$$\left[K^{k'm'} u_{k'} + N^{k'm'} u_{k'} - F^{m'}\right] \delta u_{m'} = 0. \qquad (22)$$

У цьому виразі варіація переміщень не дорівнює нулю, тому нулю повинен дорівнювати вираз у дужках. Цей вираз являє собою систему лінеаризованих розв’язувальних рівнянь для геометрично нелінійної теорії пружності:

$$K\bar{u} = \bar{P} - \bar{N}, \qquad (23)$$

де $K = K^{k'm'}$ – матриця жорсткості конструкції на основі композиційного матеріалу; $\bar{u} = u_{k'}$ – вектор невідомих переміщень; $\bar{P} = F^{m'}$ – вектор розподілених поверхневих навантажень; $\bar{N} = N^{k'm'} u_{k'}$ – вектор нелінійних добавок.

Також наведено особливості програмної реалізації розрахунку конструкцій на основі волокнистих композитів при використанні отриманих співвідношень для ефективних пружних сталих і розробленої матриці жорсткості скінченного елемента. Представлено пакет прикладних програм «Композит» та надана його характеристика.

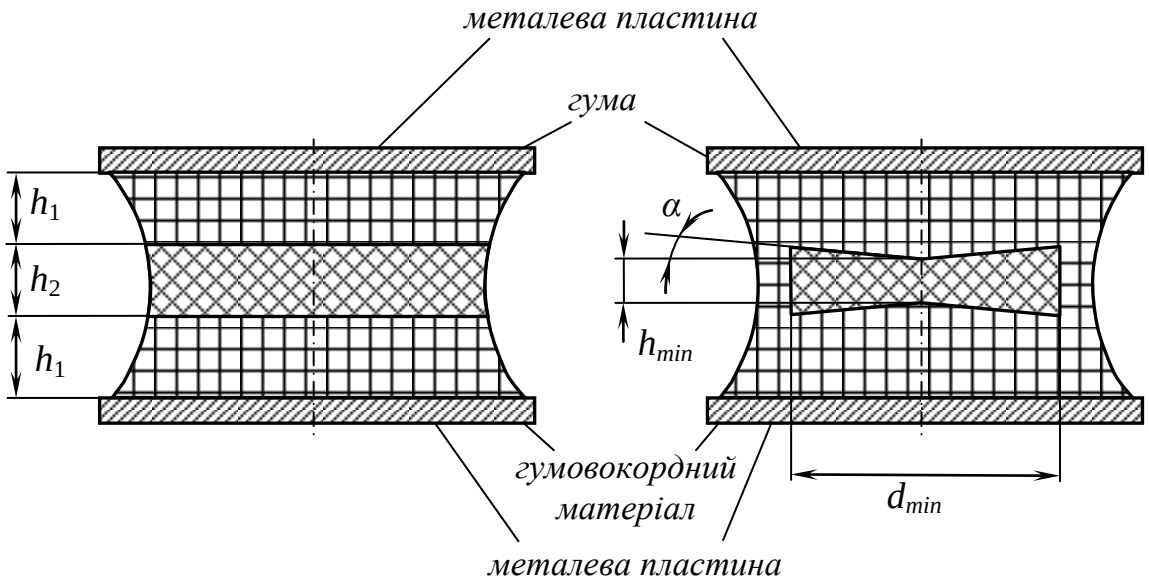
Розрахунок конструкцій у програмному пакеті можна представити у вигляді трьох взаємопов’язаних послідовних процесів:

1) підготовка вихідних даних – опис топології конструкції, кінематичних та силових граничних умов, фізико-механічних характеристик композиційного матеріалу, скінченно-елементна дискретизація об’єкта тощо;
2) чисельний розрахунок скінченно-елементної моделі – обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості скінченних елементів, формування глобальної системи розв’язувальних рівнянь та її розв’язок;
3) обробка результатів розв’язання – обчислення компонентів напружено-деформованого стану конструкції; їх візуальне представлення у вигляді таблиць, графіків, двовимірних або тривимірних зображень.

Ці процеси при програмній реалізації традиційно виконуються трьома підсистемами – препроцесором, процесором та постпроцесором, відповідно.

У **шостому розділі** за допомогою розробленого програмного пакету визначено напружено-деформований стан віброакустичного ізолятора при різних видах навантажень. Конструкція віброізолятора передбачає наявність у гумовому

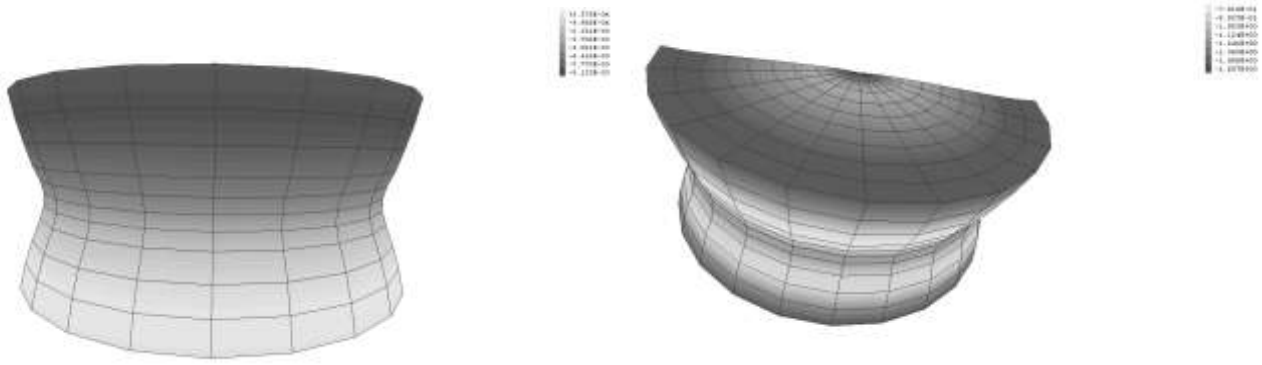
масиві вставки з гумовокордного матеріалу. Розглянуті різні конструктивні рішення (рис. 7) для віброізолятора з композиційним шаром та їхній вплив на величину осадки при дії механічних навантажень та різних схемах армування в умовах лінійного (рис. 8) та нелінійного деформування. Розглянуто три схеми укладки корду в гумовокордному матеріалі, а саме армування в окружному напрямку, радіальному напрямку та при використанні як гумовокордної вкладки пакету перехресно армованих під кутом 90º один до одного шарів.



а б

а – суцільна композитна вставка; б – внутрішня композитна вставка

Рисунок 7 – Віброакустичний ізолятор з композитними вставками.



а б

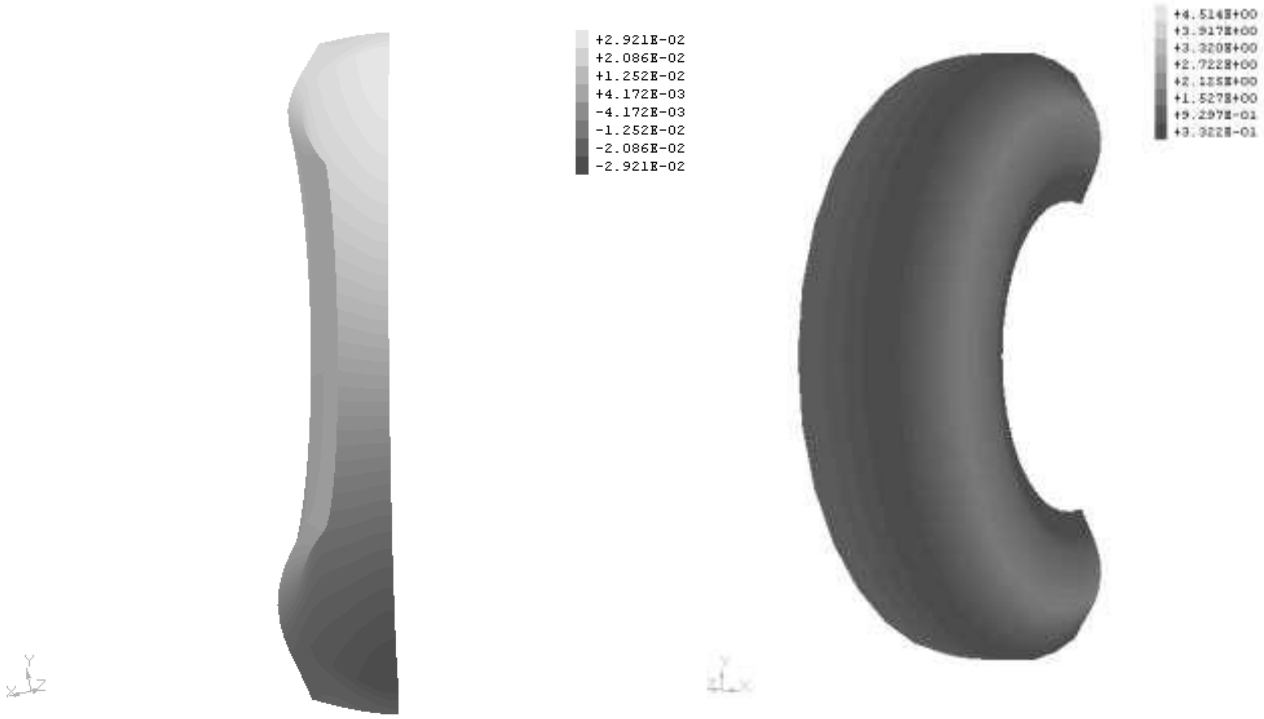
Рисунок 8 – Розподіл осьових переміщень u_3 (а) і напружень σ_{33} (б) віброізолятора із суцільним композиційним шаром при осьовому навантаженні (перехресне армування, f = 0,3).

Аналізуючи напружено-деформований стан віброізолятора, можна зробити такі висновки. Незалежно від того, є композиційний шар суцільним чи внутрішнім, збільшення в ньому частки волокна (від 0 до 0,3) зменшує максимальну осадку при різних схемах навантаження: для перехресних шарів – на 10…15 %, для радіального армування – на 15…20 %, для окружного

армування – до 8 %. Максимальні значення напружень при різних схемах армування набувають більших значень для випадку внутрішнього розташування композиційного шару в порівнянні із суцільним розташуванням (до 30 %).

Із усіх розглянутих конструкційних рішень найбільша осадка спостерігається для віброізолятора із суцільним композиційним шаром та окружним армуванням, а найменша – для віброізолятора із внутрішнім композиційним шаром та радіальним армуванням.

Визначено напружено-деформований стан автомобільної діагональної шини (рис. 9) під дією внутрішнього тиску при використанні транстропних волокон.



а б

Рисунок 9 – Розподіл переміщень u_2 (а) та напружень σ_{22} (б).

Зони максимальних значень напружень розташовані поблизу закріплення каркасу до ободу колеса, це пов’язано з жорстким защемленням краю шини й неможливістю переміщень під дією внутрішнього тиску.

В процесі деформування внутрішня тороїдальна поверхня шини зміщується та втрачає первинну круглу форму, при цьому переміщення змінюються від нуля в місці защемлення до максимальних значень у зоні екватора, не зважаючи на наявність досить жорстких шарів брекера та каркаса.

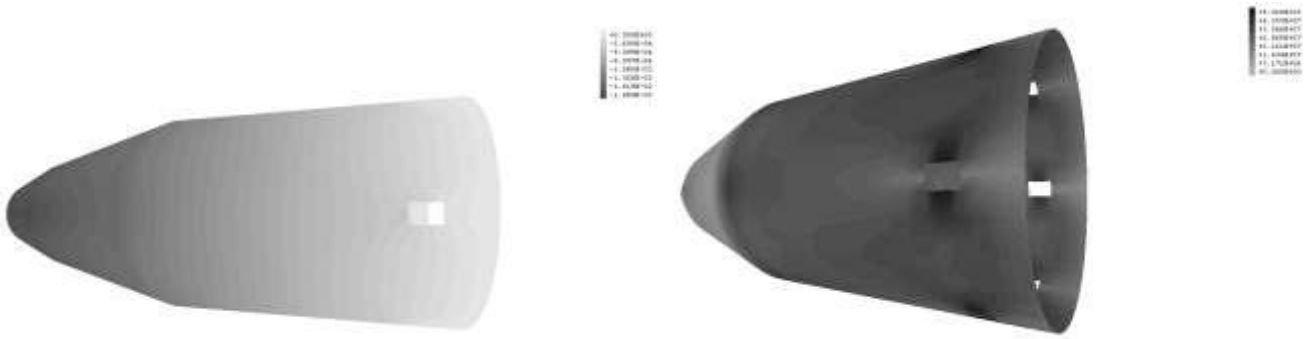
Сьомий розділ присвячено визначенню напружено-деформованого стану головного обтічника ракетоносія (рис. 10), котрий являє собою шарувату конструкцію з різними схемами армування для кожного шару.

Кожен шар виготовлено з волокнистого композита з вуглецевого волокна та епоксидної смоли. При визначенні напружено-деформованого стану розрахунок проводився для двох режимів роботи головного обтічника ракетоносія в

залежності від φ – кута положення корпусу (φ=0º або φ=180º). Експлуатаційне навантаження моделювалося як комбінація зовнішнього поверхневого тиску та еквівалентних осьових сил, що діють у місцях стику сферичної, конічних та циліндричної частин обтічника.

Осьові еквівалентні навантаження при φ=180º перевищують осьові навантаження при φ=0º, а радіальні поверхневі, навпаки, в першому випадку менші, ніж у другому. Однак результати розрахунків показують, що визначальними є осьові навантаження, тому максимальні значення інтенсивності напружень у 2,5 рази вищі в першому випадку (при φ=180º), ніж у другому. Якісна картина розподілу інтенсивності напружень у обох випадках приблизно збігається. Найбільш «небезпечними» з точки зору міцності (максимальні значення інтенсивності напружень) є зони конструкції, що примикають до прямокутних отворів у окружному напрямку, причому на зовнішній поверхні величини інтенсивності напружень дещо більші, ніж на внутрішній.

Також як «небезпечні» зони можна розглядати місця стиковки сферичних, конічних та циліндричних частин обтічника, де величина інтенсивності напружень також набуває великих значень.



а б

Рисунок 10 – Розподіл осьових переміщень u_3 (а) та інтенсивності напружень σ_i (б).

Значення осьових переміщень у перетинах, перпендикулярних осі конструкції, близькі до сталих, хоча й не є такими, що обумовлено наявністю прямокутних отворів й, відповідно, несиметричністю постановки задачі.

Для вдосконалення конструкції слід посилити зони навколо отворів та зони стику сферичної, конічних та циліндричної частин за допомогою шпангоутів та інших конструктивних елементів.

ВИСНОВКИ

Основним результатом роботи є вирішення науково-технічної проблеми вдосконалення моделей та методів розв’язання задач про визначення напружено-

деформованого стану просторових конструкцій із волокнистих композиційних матеріалів, а саме:

1. На основі кінематичної та енергетичної умови узгодження запропоновані аналітичні співвідношення для визначення ефективних пружних характеристик волокнистого композиційного матеріалу, що дають змогу враховувати транстропні властивості матриці і волокна. Порівняння з експериментальними даними показує, що співвідношення, отримані на основі енергетичної умови узгодження, дають більш точний результат.

2. Розроблено підхід до визначення ефективних пружних характеристик односпрямованого волокнистого композиційного матеріалу, армованого двома сортами періодичних волокон, що дає можливість на основі аналітичних співвідношень врахувати транстропні властивості матриці та волокон.

3. Для дослідження напружено-деформованого стану конструкцій із волокнистих композитів запропоновані співвідношення для матриці жорсткості тривимірного скінченного елемента композиційного матеріалу з транстропними компонентами з урахуванням просторового армування волокнами на основі моментної схеми скінченного елемента. Моментна схема дозволяє уникнути недоліків, притаманних традиційній схемі скінченного елемента, а врахування просторового характеру розташування волокон послаблює вимоги при дискретизації конструкцій.

4. Розроблено чисельний підхід для розрахунку напружено-деформованого стану конструкцій із гумовокордних матеріалів з урахуванням геометричної нелінійності на основі моментної схеми скінченного елемента.

5. Для визначення ефективних характеристик волокнистого композиційного матеріалу та скінченно-елементного розв’язання просторових задач визначення напружено-деформованого стану конструкцій із волокнистих композитів розроблено й верифіковано пакет прикладних програм «Композит».

6. Досліджено особливості напружено-деформованого стану конструкцій із гумовокордних матеріалів. Отримано величину осадки для різних модифікацій віброакустичного ізолятора та особливості деформування автомобільної шини під дією внутрішнього тиску.

7. Досліджено особливості напружено-деформованого стану аерокосмічних конструкцій із волокнистих композитів в умовах експлуатаційного навантаження. Аналіз результатів показує, що найбільш вразливими з точки зору міцності є зони біля прямокутних отворів, де величини інтенсивності напружень набувають максимальних значень.

8. Підходи, запропоновані в дисертаційній роботі, та результати розрахунків були використані у відділі механіки еластомерних конструкцій інституту геотехнічної механіки НАН України (м. Дніпро) при розрахунку та створенні віброізоляторів із проміжним шаром із гумовокордного матеріалу та в

КБ «Південне» (м. Дніпро) для визначення напружено-деформованого стану головного обтічника ракетоносія.

9. Підходи до визначення ефективних пружних характеристик та застосування моментної схеми до побудови матриці жорсткості скінченного елемента впроваджені в навчальний процес і використовуються при читанні спецкурсу «Метод скінченних елементів» для студентів спеціальності “Прикладна математика” та при виконанні кваліфікаційних та дипломних робіт у Запорізькому національному університеті.

ОСНОВНІ РОБОТИ, ОПУБЛІКОВАНІ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Дырда В.И. Аналитические и численные методы расчета резиновых деталей / В.И. Дырда, С.Н. Гребенюк, С.И. Гоменюк. – Днепропетровск-Запорожье: Запорожский национальный университет, 2012. – 370 с.

2. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МІРЕЛА+» / В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб, С.И. Гоменюк, Р.В. Киричевский, С.Н. Гребенюк. – К.: Наук. думка, 2005. – 416 с.

3. Метод конечных элементов: теория, алгоритмы, реализация / В.А. Толок, В.В. Киричевский, С.И. Гоменюк, С.Н. Гребенюк, Д.П. Бувайло. – К.: Наук. думка, 2003. – 316 с.

4. Grebenyuk S.N. The shear modulus of a composite material with a transversely isotropic matrix and a fibre / S.N. Grebenyuk // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – Vol. 78, N 2, 2014. – P. 270-276.

5. Grebenyuk S. Moment Scheme of the Finite Element for Spatially Reinforced Composite Materials / S. Grebenyuk, O. Titiva // International Journal of Mechanical Engineering and Information Technology. – Vol. 4, Issue 3, 2016. – P. 1629-1635.

6. Calculation of destruction mechanics parameters and temperature of dissipative heating by singular three-dimensional finite elements in conditions of nonlinear viscoelastic deformation / V.V. Kirichevsky, V.A. Tolok, S.N. Grebenyuk, R.V. Kirichevsky // Fasta Universitatis. Series: Mechanical Engineering. – 2001. – Vol. 1., N 8. – P. 947-954.

7. Киричевский В.В. Исследование процессов разрушения эластомерных конструкций в условиях нелинейного вязкоупругого деформирования / В.В. Киричевский, С.Н. Гребенюк // Проблемы прочности. – 2001. – № 3. – С. 129-140.

8. Гребенюк С.Н. Напряженно-деформированное состояние эластомерных конструкций при абразивном износе / С.Н. Гребенюк, А.А. Бова, В.З. Юречко // Известия Саратовского университета. Серия «Математика. Механика. Информатика». – Саратов: СГУ, 2014. – Т. 14, вып. 4, ч. 1. – С. 455-463.

9. Исследование напряженно-деформированного состояния резинометаллической опоры / С.И. Гоменюк, С.Н. Гребенюк, А.А. Бова, В.З. Юречко // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – Самара: СГТУ, 2014. – № 2(35). – С. 64-81.

10. А.с. № 43043. Комп'ютерна програма «Система автоматизованого проектування FORTU-FEM» («FORTU-FEM») / С.І. Гоменюк, В.З. Грищак, С.М. Гребенюк, С.В. Чопоров, А.О. Лісняк. – Дата реєстрації 02.04.2012.

11. Гребенюк С.Н. Напряженно-деформированное состояние резинового виброизолятора с композитными вставками / С.Н. Гребенюк // Геотехнічна механіка. – Дніпропетровськ: Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України. – Вип. 121. – 2015. – С. 190-195.

12. Гребенюк С.Н. Определение продольного модуля упругости композита на основе энергетического условия согласования / С.Н. Гребенюк // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2012. – Вип. 2(45). – С. 106-110.

13. Гребенюк С.Н. Определение модуля сдвига композиционного материала с транстропными матрицей и волокном / С.Н. Гребенюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вип. 13. – С. 92-98.

14. Гребенюк С.Н. Упругие характеристики композиционного материала с транстропной матрицей и волокном / С.Н. Гребенюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2011. – Вип. 12. – С. 62-68.

15. Гребенюк С.Н. Определение упругих постоянных резинокордного материала при помощи энергетического критерия согласования / С.Н. Гребенюк // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2010. – Вип. 11. – С. 79-86.

16. Гребенюк С.М. Скінченно-елементне моделювання напружено-деформованого стану автомобільної шини / С.М. Гребенюк, М.І. Клименко, А.О. Лісняк // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2015. – Вип.3 (54). – С. 108-112.

17. Грищак В.З. Упругие характеристики резинокордного материала с учетом трансверсально-изотропных свойств корда / В.З. Грищак, С.Н. Гребенюк // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2013. – Вип. 2(47). – С. 110-114.

18. Гребенюк С. Визначення напружено-деформованого стану пористого гумового буфера в умовах нелінійного деформування / С. Гребенюк, В. Юрєчко // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – Тернопіль: ТНТУ ім. Івана Пулюя, 2013. – № 2(70). – С. 52-62.

19. Гребенюк С.М. Визначення ефективного модуля пружності композита при нормальному розподілі модулів пружності волокна та матриці / С.М. Гребенюк, М.І. Клименко // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2014. – Вип. 3(50). – С. 254-258.

20. Гребенюк С.Н. Моделирование напряженно-деформированного состояния резинокордных материалов / С.Н. Гребенюк, С.И. Гоменюк, В.В. Леонтьева // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2010. – Вип. 3(39). – С. 126-131.

21. Гребенюк С.Н. Напряженно-деформированное состояние волокнистых композиционных материалов в условиях вязкоупругого деформирования / С.Н. Гребенюк, Е.Л. Мизерная // Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. – Луганськ: СУНУ, 2010. – № 10(152). – Ч. 2. – С. 41-48.

22. Гребенюк С.Н. Матрица жесткости конечного элемента для тканого композиционного материала / С.Н. Гребенюк, О.П. Мелащенко // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – Харьков: ХАИ, 2010. – Вып. 4(64). – С. 71-82.

23. Гребенюк С.Н. Определение прочности тканевого композита / С.Н. Гребенюк, О.П. Мелащенко // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Харків: Видавництво Харківського університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, 2011. – Вип. 3(29). – С. 163-167.

24. Гребенюк С.Н. Использование различных критериев для расчета прочности волокнистых композитов / С.Н. Гребенюк, О.П. Мелащенко // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Харків: Видавництво Харківського університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, 2012. – Вип. 3(32). – С. 134-136.

25. Расчет напряженно-деформированного состояния виброизоляторов сложной формы / В.И. Дырда, С.Н. Гребенюк, Н.И. Лисица, Е.С. Решевская, В.М. Тархова, А.В. Новикова, Е.Ю. Заболотная // Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць. Ін-т геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України. – Дніпропетровськ, 2012. – Вып. 106. – С. 105-110.

26. Численный анализ температурных деформаций листового линейноармированного металлокомпозита Ti-Nb / С.Б. Беликов, С.И. Гоменюк, С.Н. Гребенюк, А.С. Лавренко, В.Е. Ольшанецкий, А.М. Потапов // Вестник двигателестроения. – Запорожье: ОАО «Мотор Сич». – № 2. – 2007. – С. 167-171.

27. Гребенюк С.Н. Напряженное состояние защемленной по торцам многослойной резинокордной цилиндрической оболочки / С.Н. Гребенюк, Е.Л. Мизерная // Геотехническая механика. – Днепропетровск: Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины. – Вып. 71. – 2007. – С. 166-170.

28. Оценка напряженно-деформированных состояний в жаропрочном композиционном материале матрица (12Х18Н10Т) – волокна (ВР27-3ВП) для разных схем линейного армирования / С.Б. Беликов, А.С. Лавренко, В.Е. Ольшанецкий, С.И. Гоменюк, С.Н. Гребенюк // Вестник двигателестроения. – Запорожье: ОАО «Мотор Сич». – № 2. – 2008. – С. 151-159.

29. Применение различных теорий определения упругих характеристик композиционного материала при расчете конструкций / С.И. Гоменюк, С.Н. Гребенюк, В.Е. Ольшанецкий, А.С. Лавренко // Вісник двигунобудування. – Запоріжжя: ОАО «Мотор Сич». – № 2. – 2009. – С. 139-142.

30. Схема компактного хранения матриц коэффициентов систем линейных алгебраических уравнений в задачах механики сплошной среды / С.И. Гоменюк, В.А. Толок, В.В. Киричевский, С.Н. Гребенюк, Д.П. Бувайло // Вісник Східноукраїнського національного університету. – 2004. – № 5(75). – С. 30-35.

31. Гоменюк С.И. Дискретизация трехмерных объектов в методе конечных элементов / С.И. Гоменюк, С.Н. Гребенюк, В.В. Киричевский // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – Запоріжжя: ЗНТУ. – 2004. – № 2. – С. 95-98.

32. Формирование и свойства двухфазных композитов «фибрового» типа / С.Б. Беликов, В.Е. Ольшанецкий, В.В. Киричевский, С.Н. Гребенюк // Вестник двигателестроения. – Запорожье: ОАО «Мотор Сич». – № 2. – 2006. – С. 169-174.

33. Моделирование и расчет напряженно-деформированного состояния композитной пластины с круговым отверстием / С.Н. Гребенюк, Н.Н. Лисица, Е.Л. Мизерная, Вал.В. Киричевский // Геотехнічна механіка. – Дніпропетровськ: Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України. – Вип. 63. – 2006. – С. 154-160.

34. Гребенюк С.Н. Напряженно-деформированное состояние композитных конструкций с трещинами / С.Н. Гребенюк, Вал.В. Киричевский // Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. – 2006. – № 3(97). – С. 46-50.

35. Термопружне деформування композитної пластини / В.В. Киричевський, В.О. Толок, С.І. Гоменюк, С.М. Гребенюк // Системні технології. – 2003. – № 4(27). – С. 109-113.

36. Гребенюк С.Н. Вязкоупругое деформирование конструкций из композиционного материала / С.Н. Гребенюк, В.В. Киричевский, С.И. Гоменюк // Вісник Східноукраїнського національного університету. – 2003. – № 12(70). – С. 226-231.

37. Киричевський В.В. Розрахунок багатошарової композитної пластини в умовах в’язкопружної деформації / В.В. Киричевський, С.М. Гребенюк // Вісник Східноукраїнського національного університету. – 2002. – № 3(49). – С. 95-100.

38. Киричевский В.В. Расчет тороидальной оболочки в условиях вязкоупругого деформирования / В.В. Киричевский, В.А. Толок, С.Н. Гребенюк //

Вісник Східноукраїнського національного університету. – 2001. – № 2(36). – С. 204-208.

39. Киричевський В.В. Нелінійні деформації тороїдальної оболонки / В.В. Киричевський, В.О. Толок, С.М. Гребенюк // Вісник Східноукраїнського національного університету. – 2001. – № 11(45). – С. 220-225.

40. Киричевский В.В. К решению задачи термоупругости для композиционных материалов / В.В. Киричевский, С.Н. Гребенюк // Вісник Східноукраїнського національного університету. – 2000. – № 9(31). – С. 177-181.

41. Определение напряженно-деформированного состояния композиционных материалов в условиях температурного нагружения / В.В. Киричевский, В.А. Толок, С.Н. Гребенюк, Р.В. Киричевский // Труды Одиннадцатого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов. – М.: Изд-во НИИШП, 2000. – С. 25-30.

42. Гребенюк С.Н. Определение напряженно-деформированного состояния композиционных материалов в условиях вязкоупругого деформирования / С.Н. Гребенюк, В.В. Киричевский, В.А. Толок // Труды двенадцатого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов». – М.: Изд-во НИИШП, 2001. – Т. 1. – С. 147-151.

43. Киричевский В.В. Вязкоупругое деформирование многослойных конструкций из композиционных материалов / В.В. Киричевский, В.А. Толок, С.Н. Гребенюк // Труды тринадцатого симпозиума «Проблемы шин и резинокордных композитов». – М.: Изд-во ФГУП НИИШП, 2002. – Т.1. – С. 199-204.

44. Гребенюк С.М. Напружено-деформований стан порожнистого циліндру із волокнистого композита з транстропними компонентами / С.М. Гребенюк // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела: Труды VII Международной научной конференции. – Т. 1. – Донецк: ДонНУ, 2013. – С. 117-120.

45. An investigation of a spacecraft’s propellant tank’s shell’s bearing strength / V.Z. Gristchak, S.I. Gomeniuk, S.N. Grebeniuk, I.F. Larionov, P.G. Degtiarenko, V.N. Sirenko, D.V. Akimov // Proceedings. The sixth world congress «Aviation in the XXI-st century». – Kyiv: Vol. 1, 2014. – P. 49-51.

46. Effective longitudinal elastic modulus of the composite with viscoelastic matrix and transtropic fiber / S. Grebenyuk, M. Klymenko, O. Titiva, A. Boguslavska // 20th International Scientific Conference Mechanika 2015. – Kaunas: Kaunas University of Tehnology, 2015. – P. 96-100.

47. Гребенюк С.Н. Моделирование и расчет резинокордных конструкций с применением МКЭ / С.Н. Гребенюк, Е.Л. Мизерная // Математичні проблеми технічної механіки-2011. Матеріали конференції. – Дніпропетровськ-Дніпродзержинськ. – 2011. – Т. 2. – С. 89.

48. Гребенюк С.Н. Применение моментной схемы конечного элемента при расчете конструкций из волокнистых композитов / С.Н. Гребенюк // Математичні проблеми технічної механіки-2011. Матеріали конференції. – Дніпропетровськ-Дніпродзержинськ. – 2011. – Т. 2. – С. 102.

49. Мизерная Е.Л. Моделирование вязкоупругого деформирования композитных материалов в программном комплексе «МІРЕЛА+» / Е.Л. Мизерная, С.Н. Гребенюк // Сучасні тенденції розвитку інформаційних технологій у науці, освіті та економіці: Матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції. – Луганськ: Phoenix, 2010. – С. 66-67.

50. Гоменюк С.І. Моделювання напружено-деформівного стану конструкцій у програмному комплексі «МІРЕЛА+» / С.І. Гоменюк, С.М. Гребенюк // Міжнародна науково-технічна конференція «Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні ІКТМ-2008»: Тези доповідей. – Харків: Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», 2008. – С. 106-107.

51. Моделирование напряженно-деформированного состояния композитных конструкций в условиях вязкоупругого деформирования / В.В. Киричевский, С.Н. Гребенюк, Вал.В. Киричевский, Е.Л. Мизерная // Матеріали одинадцятої міжнародної наукової конференції імені М. Кравчука. – К.: Задруга. – 2006. – С. 976.

52. Modeling of features is intense - is deformed statuses of designs from composite materials / S.N. Grebenuk, V.V. Kirichevskiy, Val.V. Kirichevskiy, E.L. Mizernaya // XXXIV Summer School-Conference "Advaced Problems in Mechanics". – St. Petersburg, 2006. – P. 40.

53. Гребенюк С.Н. Моделирование напряженно-деформированного состояния и разрушения композитных конструкций в условиях упругого и вязкоупругого деформирования / С.Н. Гребенюк, Е.Л. Мизерная, В.В. Киричевский // Тезисы докладов международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и механики». – Харьков.: ИПМаш им. А.Н. Подгорного НАН Украины. – 2006. – С. 63.

54. Гребенюк С.М. Визначення параметрів механіки руйнування у композиційних матеріалах / С.М. Гребенюк, Вал.В. Киричевський // Тезисы докладов: Шестой Международный симпозиум «Механика эластомеров – 2005». – Днепропетровск, 2005. – С. 38.

55. Киричевский В.В. Влияние вязкоупругих свойств эластомера на напряженно-деформированное состояние композитных конструкций / В.В. Киричевский, С.Н. Гребенюк, Е.Л. Мизерная // Тезисы докладов: Шестой Международный симпозиум «Механика эластомеров – 2005». – Днепропетровск, 2005. – С. 39.

56. Гребенюк С.Н. Моделирование напряженно-деформированного состояния композитной пластины с трещиной / С.Н. Гребенюк,

Вал.В. Киричевский // Міжнародна науково-технічна конференція «Інтегровані комп'ютерні технології в машинобудуванні ІКТМ-2004»: Тези доповідей. – Харків: ХАІ, 2004. – С. 42.

ДОДАТКОВІ ПУБЛІКАЦІЇ

57. Определение напряженно-деформированного состояния резинометаллических сейсмоопор / В.И. Дырда, Н.И. Лисица, А.В. Новикова, С.Н. Гребенюк, Ю.Г. Козуб, А.А. Бова // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вип. 13. – С. 152-158.

58. Гребенюк С.Н. Определение прочностных характеристик композитной цилиндрической оболочки / С.Н. Гребенюк, О.П. Мелащенко // Геотехническая механика. – Днепропетровск: Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины. – Вып. 71. – 2007. – С. 163-165.

59. Исследование теплопроводности листовых металлокомпозитов системы нержавеющая сталь-вольфрам в широком диапазоне температур / А.С. Лавренко, А.В. Коробко, В.Е. Ольшанецкий, С.И. Гоменюк, С.Н. Гребенюк // Вестник двигателестроения. – Запорожье: ОАО «Мотор Сич». – № 2. – 2008. – С. 136-140.

60. Решение сверхбольших систем линейных алгебраических уравнений в рамках вычислительного комплекса FORTU / В.А. Толок, В.В. Киричевский, С.И. Гоменюк, С.Н. Гребенюк // Вісник Східноукраїнського національного університету. – 2004. – № 5(75). – С. 158-162.

61. Гребенюк С.М. Визначення пружних сталих композита з транстропними матрицею та волокном на основі кінематичної умови узгодження / С.М. Гребенюк // Вісник Запорізького національного університету. – Запоріжжя: ЗНУ, 2012. – № 1. – С. 62-76.

62. Моделирование напряженно-деформированного состояния композитов и конструкций на их основе / С.Н. Гребенюк, С.И. Гоменюк, Е.Л. Мизерная, В.В. Киричевский // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2006. – № 2. – С. 50-54.

63. Гребенюк С.Н. Сингулярный конечный элемент серендипова семейства для композита с трещиной / С.Н. Гребенюк, Вал.В. Киричевский // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2006. – № 1. – С. 48-57.

64. Компактная схема решения сверхбольших систем линейных алгебраических уравнений в задачах механики / С.И. Гоменюк, В.А. Толок, В.В. Киричевский, С.Н. Гребенюк // Складні системи і процеси. – 2003. – № 1. – С. 15-20.

65. Математическое моделирование и исследование прочности силовых элементов конструкций космических летательных аппаратов / Д.В. Акимов, В.З. Грищак, С.И. Гоменюк, С.Н. Гребенюк, А.А. Лисняк, С.В. Чопоров,

И.Ф. Ларионов, Д.В. Клименко, В.Н. Сиренко // Вісник Запорізького національного університету. – Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – № 3. – С. 6-13.

66. Hrebeniuk S. Effective elastic modulus determination of unidirectional composite for stochastic geometric characteristics of fiver / S. Hrebeniuk, M. Klymenko, K. Omelchenko // Вісник Запорізького національного університету. – Запоріжжя: ЗНУ, 2014. – № 1. – С. 14-23.

67. Развитие метода конечных элементов и его применение в САПР / В.В. Киричевский, С.И. Гоменюк, С.М. Гребенюк, Р.В. Киричевский // Вісник Запорізького національного університету. – 2006. – № 1. – С. 38-55.

АНОТАЦІЯ

Гребенюк С. М. *Напружено-деформований стан просторових конструкцій на основі гомогенізації пружних сталих волокнистих композитів.* – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. Запорізький національний технічний університет Міністерства освіти і науки України, Запоріжжя, 2016.

На основі аналітичних розв’язків методом представницького об’ємного елемента отримані співвідношення для ефективних пружних сталих композита з транстропними матрицею і волокном. Побудована матриця жорсткості паралелепіпедного скінченного елемента на основі моментної схеми, яка враховує особливості просторової орієнтації волокон.

Описано підхід до розв’язку геометрично нелінійної задачі за допомогою модифікованого метода Ньютона-Канторовича. Запропоновані підходи використано при створенні пакету прикладних програм.

Визначено напружено-деформований стан гумовокордних віброізоляторів та автомобільної шини, а також головного обтічника ракетоносія.

Ключові слова: напружено-деформований стан, волокнистий композит, гумовокордний матеріал, моментна схема скінченного елемента, ефективні пружні сталі.

АННОТАЦИЯ

Гребенюк С. Н. *Напряженно-деформированное состояние пространственных конструкций на основе гомогенизации упругих постоянных волокнистых композитов.* – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук по

специальности 01.02.04 – механика деформированного твердого тела. Запорожский национальный технический университет Министерства образования и науки Украины, Запорожье, 2016.

Диссертационное исследование посвящено определению параметров напряженно-деформированного состояния элементов инженерных конструкций, полученных с использованием волокнистых композитов.

Приведен обзор исследований, посвященных различным методам определения напряженно-деформированного состояния таких конструкций, в частности, методу конечных элементов. Особое внимание уделено методам гомогенизации упругих постоянных для волокнистых композитов.

На основе аналитических решений методом представительного объемного элемента впервые получены соотношения для эффективных упругих постоянных композиционного материала с транстропными матрицей и волокном. Для этого были решены пять краевых задач для представительного объемного элемента. В качестве условий согласования для задачи совместного деформирования матрицы и волокна и задачи для однородного материала, моделирующего композит, использовались кинематическое и энергетическое условие. Показано, что использование энергетического условия дает более адекватные результаты для эффективных упругих постоянных композиционного материала. На основе полученных эффективных упругих констант двухкомпонентного композита предложен подход к определению эффективных упругих характеристик композита, армированного двумя сортами однонаправленных волокон. Исследованы эффективные упругие постоянные композита на основе резиновой и эпоксидной матрицы.

В качестве основного метода исследования конструкций использовалась модификация метода конечных элементов – моментная схема конечного элемента, которая заключается в двойной аппроксимации полей перемещений и компонент тензора деформаций и которая лишена ряда недостатков традиционного метода конечных элементов. Для расчета компонентов напряженно-деформированного состояния конструкций из волокнистых композитов была построена матрица жесткости линейного параллелепипедного конечного элемента на основе моментной схемы, учитывающая особенности пространственной ориентации транстропных волокон. Это позволяет расширить возможности при дискретизации конструкций сложной геометрической формы из волокнистых композитов, а также уменьшить вычислительные затраты при расчете. Сходимость численных результатов решений с помощью предложенной матрицы жесткости показана на примере решения осесимметричной задачи для резинокордного материала.

Описан подход к решению геометрически нелинейной задачи упругости на основе вариационного принципа Лагранжа и нелинейного тензора деформаций с помощью модифицированного метода Ньютона-Канторовича. Построен

итерационный процесс определения вектора дополнительной нагрузки на каждом шаге по нагрузке с использованием моментной схемы конечного элемента.

На основе предложенных подходов к определению параметров напряженно-деформированного состояния конструкций из волокнистых композитов создан пакет прикладных программ «Композит» в рамках программного комплекса «МІРЕЛА+». Показана организация интерфейса пакета программ, в том числе процедура визуализации функций, представленных большими числовыми массивами.

С использованием указанного пакета проведен расчет ряда промышленных конструкций. Определено напряженно-деформированное состояние конструкций из резинокордных материалов, таких как виброизоляторы различных конструктивных решений и автомобильная шина, а также элементов конструкций аэрокосмической техники, таких как головной обтекатель ракетоносителя. Исследовано влияние как конструктивных особенностей, так и условий эксплуатации на напряженно-деформированное состояние резинокордных виброизоляторов, грузовой автомобильной шины и головного обтекателя ракетоносителя.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, волокнистый композит, резинокордный материал, моментная схема конечного элемента, эффективные упругие постоянные.

ABSTRACT

Grebeniuk S. M. The S*tress-strained State of the Space Constructions on the Basis of Homogenization of the Fiber Composites Elastic Constants.* – Manuscript.

Thesis for the doctoral degree of the technical sciences by the specialty 01.02.04 – Mechanics of the Deformed Solids. – Zaporizhzhia National Technical University, Zaporizhzhia, 2016.

In terms of analytical solutions by use of the presentation box unit the correlations for the effective elastic constants of the composite with the trans-tropic matrix and fiber are first obtained. It is constructed the stiffness matrix of the parallelepiped finite element on the basis of the moment scheme taking into account specific of the spatial orientation of the fibers. The approach to the solution of the geometrically non-linear problem with the help of modified Newton-Kantorovich method is described. On the basis of the approaches proposed it is developed package of the applied programs.

The stress-strained state of the rubber-cord vibration isolators and the car tyre as well as the main carrier rocket fairing is determined.

Key words: stress-strained state, fiber composite, rubber-cord material, moment scheme of the finite element, effective elastic constants.

Підписано до друку 19.09.2016. Формат 60/90/16.
Папір офсетний. Друк цифровий. Гарнітура Times.
Умовн. друк. арк. 1,3. Тираж 100 прим. Зам. № 211.

Запорізький національний університет

69600, м. Запоріжжя, МСП-41
вул. Жуковського, 66
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2952 від 30.08.2007