МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт
та самостійної роботи студентів факультетів
радіоприладобудівного та інформатики і обчислювальної техніки
заочної форми навчання
за темою

“ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ”

2005

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт та самостійної роботи студентів факультетів радіоприладобудівного та інформатики і обчислювальної техніки заочної форми навчання за темами “Теорія ймовірностей та елементи математичної статистики”/ Укл.: І. С. Пожуєва, Т. І. Левицька, Г.А. Шишканова. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2005. - 67 с.

Укладачі: І. С. Пожуєва, доцент, к.т.н.
Т. І. Левицька, доцент, к.т.н.
Г.А. Шишканова, ст. викл.

Експерт спеціальності: В.С. Кабак, доцент, к.т.н.

Рецензент: Ю. В. Мастиновський, доцент, к.т.н.

Відповідальний за випуск: І. С. Пожуєва, доцент, к.т.н.

Затверджено радою РП факультета ЗНТУ
Протокол № 5 від 03.02.05

Затверджено на засіданні кафедри прикладної математики ЗНТУ
Протокол № 4 від 07.12.04

ЗМІСТ

Вступ

Методичні вказівки складені у відповідності до програми з курсу теорії ймовірностей та математичної статистики багатоступеневої підготовки фахівців і призначені для студентів заочної форми навчання, що навчаються на факультетах радіоприладобудівному та інформатики і обчислювальної техніки.

У вказівках приведені основні теоретичні відомості, які необхідні для виконання завдань. По кожній темі подані приклади розв’язку задач.

Вказівки містять одну контрольну роботу з курсу теорії ймовірностей та математичної статистики. Індивідуальні завдання містять 30 варіантів. Номер варіанту визначається за останніми двома цифрами номера залікової книжки студента. Для визначення студентом номеру варіанту, який він повинен виконати, слід знайти лишок від ділення числа, яке складається з двох останніх цифр його залікової книжки, на 30. Якщо немає лишку, виконується варіант №30.

Наприклад.

Номер залікової книжки - 926708

Після ділення 8 на 30 отримаємо лишок 8, тобто слід виконувати варіант №8.

Номер залікової книжки - 926741

Після ділення 41 на 30 отримаємо лишок 11, тобто слід виконувати варіант №11.

1 ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1 Алгебра подій

Теорія ймовірностей вивчає моделі експериментів з випадковими результатами. При математичній формалізації випадкового експерименту відправним пунктом є поняття ***простору елементарних подій*** (позначається Ω), який пов'язаний з даним експериментом. Під цим розуміють множину взаємовиключних подій таку, що результатом експерименту є один і тільки один результат. Будь-яка підмножина *A* даної множини Ω інтерпретується як ***подія***. Сукупність усіх подій, що спостерігаються, складає ***поле подій*** для даного експерименту.

Говорять, що подія *A відбулася*, якщо результатом експерименту є елементарна подія ω, що належить *A* ($\omega \in$ A). Подія, що збігається з порожньою множиною ∅, називається *неможливою* подією (V), а подія, що збігається з усією безліччю Ω – *достовірною* подією (U).

Дві події A і B називаються ***сумісними*** (***несумісними***), якщо в результаті експерименту можливо (неможливо) їхнє спільне здійснення. Іншими словами, події A і B є ***сумісними***, якщо відповідні множини A і B мають загальні елементи, і ***несумісними*** в протилежному випадку.

Приклад 1.1.1

Експеримент складається в підкиданні два рази гральної кістки. Кубик має 6 граней з номерами 1,2,3,4,5,6, при цьому він падає на ту або іншу грань. Описати для цього випробування простір елементарних подій і вказати склад підмножин, що відповідають наступним подіям: A – два рази випало те саме число, B – сума номерів на гранях, що випали, не перевищує 4.

Розв'язок

Позначимо ω_{ij} – подія, яка складається в тому, що на кубику випала перший раз грань з числом рівним *i*, а другий раз - рівним *j*.

Тоді $\Omega=\{\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{14}, \omega_{15}, \omega_{16}, \omega_{21}, \omega_{22}, \omega_{23}, \dots, \omega_{63}, \omega_{64},$

$\omega_{65}, \omega_{66}\}$;

A=$\{\omega_{11},\omega_{22},\omega_{33},\omega_{44},\omega_{55},\omega_{66}\}$;

B=$\{\omega_{11},\omega_{12},\omega_{13},\omega_{21},\omega_{22},\omega_{31}\}$.

Оскільки події ототожнюються з множинами, то над подіями можна робити всі операції, що здійснюються над множинами. Зокрема, **A⊂B** – подія B відбувається всякий раз, як відбувається подія A, **C=A+B** – подія, що складається в тому, що відбулося хоча б одна з двох подій A або B, **C=A·B** – подія, що складається в спільному здійсненні подій A і B. Події A і B несумісні, якщо **A·B=V**. **A - B** – подія, що складається в тім, що A відбувається, а B не відбувається. **B=Ω -A** - протилежна подія, що відбувається в тому випадку, коли A не відбувається.

Приклад 1.1.2

Гральна кістка підкидається один раз. Результат, що спостерігається - число, що випало на верхній грані. Подія A = {число на верхній грані кратне трьом}, B = {число очок непарне}, C = {випало число більше трьох}. З'ясувати зміст наступних подій: $E1=\overline{B}, E2=\overline{C}, E3=A\cdot B, E4=A+B$.

Розв'язок

Подія *E1* полягає в тому, що число очок парне; *E2* полягає в тому, що число очок, яке випало не більше трьох; *E3* полягає в тому, що число очок, що випали, кратне трьом і непарне, тобто випало три очка; *E4* полягає в тому, що число очок кратне трьом або непарне, тобто випала одна з цифр: 1, 3, 5 або 6.

1.2 Класичне означення ймовірності події

Для кількісного опису міри невизначеності настання тої або іншої події, що спостерігається, вводиться числова функція **P(A)**, яка має назву ***ймовірність події*** **A**. Ця функція задовольняє трьом аксіомам (*аксіоматичне визначення ймовірності*):

1) 0 ≤ P(A) ≤ 1,

2) P(Ω) = 1,

3) для будь-якої скінченої або нескінченої послідовності подій, що спостерігаються, A_1, A_2, ... ,A_n таких, що $A_i \cdot A_j=\varnothing$ при $i \neq j$, $P(\sum A_k)=\sum P(A_k)$.

Якщо множина Ω складається з *n* рівноможливих елементарних подій, то **ймовірність P(A) події A** дорівнює числу елементарних подій **m**, що входять у А, віднесеному до числа всіх елементарних подій **n**, тобто **$P(A)=m/n$** (*класичне означення ймовірності*).

Елементарні події (результати експерименту), що входять у подію А, називаються ***сприятливими***.

Якщо дана множина $A=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$, то **розміщенням** (**сполученням**) з n елементів по k називається будь-яка *упорядкована* (*неупорядкована*) множина k елементів множини А. При k=n розміщення називається **перестановкою** з n елементів.

Число сполучень з n елементів по k обчислюється по формулі

$$C_n^k = n! / k!(n-k)!$$

Число розміщень з n елементів по k обчислюється по формулі

$$A_n^k = n! /(n-k)! = n(n-1) \dots (n-k+1)$$

Число перестановок з k елементів:

$$P_k = k!$$

Приклад 1.2.1

В урні п'ять чорних і чотири білих кулі. З урни навмання вибирається одна куля. Побудувати для цього експерименту простір елементарних подій і знайти ймовірність події A={вийнято білу кулю}.

Розв'язок

Перенумеруємо кулі в урні від 1 до 9: перші чотири кулі - білі, останні п'ять - чорні: Ω={1,2,3,4,5,6,7,8,9}; A={1,2,3,4}. Елементарні події рівноможливі. Оскільки вони несумісні й утворюють повну групу подій, то ймовірність події А знаходиться по формулі: P(A)=m/n=4/9.

Приклад 1.2.2

У партії з дев'яти виробів три бракованих. З партії навмання вибирається чотири вироби. Скільки різних наборів з чотирьох виробів можна скласти? Яка ймовірність, що серед навмання обраних чотирьох виробів два виявляться бракованими?

Розв'язок

Число різних наборів з чотирьох виробів: $n= C_9^4=126$. Подія A={серед обраних виробів два бракованих}. Число елементів множини A дорівнює числу можливих способів відібрати два бракованих вироби з трьох бракованих і два доброякісних вироби із шести доброякісних: $m= C_3^2 \cdot C_6^2=3 \cdot 15=45$; $P(A)=m/n=45/126=5/14$.

Приклад 1.2.3

Множина складається з дев'яти перших літер російського алфавіту. Експеримент складається у виборі без повернення чотирьох літер і запису слова в порядку надходження літер. Скільки слів з чотирьох літер може бути отримано в даному експерименті? Яка ймовірність того, що навмання складене слово буде закінчуватися літерою *а*?

Розв'язок

Число всіх слів, складених з чотирьох літер, дорівнює числу елементарних упорядкованих підмножин з дев'яти елементів, тобто $n= A_9^4=3024$. Нехай подія A={навмання складене слово з чотирьох літер закінчується літерою *а*}. Число елементів підмножини A дорівнює числу способів розмістити на три залишившихся вільних місця по одному символу з восьми (символ *а* виключений з розгляду, оскільки його місце уже визначене). Таким чином, $m=A_8^3=336$, а $P(A)=m/n=336/3024=1/9$.

1.3 Теореми множення і додавання ймовірностей

Теорема додавання ймовірностей. Якщо події A і B несумісні, тобто $A \cdot B=\varnothing$, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$. Якщо події A і B сумісні то $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

З правила додавання ймовірностей випливає: якщо $A_1, A_2,\ldots,A_n$ несумісні й *утворюють повну групу*, то сума їхніх ймовірностей ***дорівнює одиниці***. Зокрема, дві протилежні події несумісні й утворюють повну групу, якщо P(A) + P(B) = 1. Звідсіля маємо $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Теорема множення ймовірностей. P(AB)=P(A)·P(B/A), де P(B/A) - ймовірність події B за умови, що A - відбулося; якщо події A і B незалежні, то P(AB)=P(A)·P(B)

Приклад 1.3.1

Винищувач і бомбардувальник починають повітряний бій. Першим стріляє винищувач і попадає в бомбардувальник з ймовірністю 0,2. Якщо бомбардувальник не збитий, то, стріляючи по винищувачу, збиває його з ймовірністю 0,3. Якщо винищувач не збитий, то він продовжує атаку і попадає в бомбардувальник з ймовірністю 0,4. Знайти ймовірність того, що в повітряному бою буде збитий бомбардувальник.

Розв'язок

Позначимо події:

A - збитий бомбардувальник;

A_1 - збитий бомбардувальник першою чергою винищувача;

A_2 - збитий бомбардувальник другою чергою винищувача;

A_3 - бомбардувальник збив винищувача.

Використовуючи алгебру подій і теореми додавання і множення ймовірностей, отримуємо:

$A = \overline{A_1} \cdot \overline{A_3} \cdot A_2$; $P(A_1) = 0{,}2$, $P(A_2) = 0{,}4$, $P(A_3) = 0{,}3$,

$P\left(\overline{A_1} \cdot \overline{A_3} \cdot A_2\right) = P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_3}\right)P\left(A_2\right) = (1-0{,}2)\cdot(1-0{,}3)\cdot 0{,}4 = 0{,}224$;

$P\left(A\right) = P\left(A_1\right) + P\left(\overline{A_1} \cdot \overline{A_3} \cdot A_2\right) = 0{,}424$.

Приклад 1.3.2

В урні 20 куль, з них чотири червоних, вісім - синіх, сім - зелених і одна біла. Яка ймовірність того, що в перший раз буде вийнята червона куля (подія A), у другий раз - синя (подія B) і в третій - зелена (подія C), якщо витягнуті з урни кулі назад не повертаються.

Розв'язок

Треба знайти ймовірність події ABC. Формула для її знаходження має вигляд

P(ABC) = P(A) · P(B/A) · P(C/AB)

Ймовірність того, що спочатку буде вийнята червона куля, дорівнює $P(A)=4/20=1/5$. Ймовірність витягнути синю кулю за умови, що спочатку з урни була вийнята червона, $P(B/A)=8/19$, тому що в урні залишилося 19 куль. Ймовірність витягнути з урни зелену кулю, після того як були витягнуті червона і синя кулі, $P(C/AB)=7/18$. Звідси $P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB)= 1/5 \cdot 8/19 \cdot 7/18 \approx 0{,}033$.

1.4 Формула повної ймовірності і формула Байеса

Формула повної ймовірності. Нехай $A_1,A_2,\dots,A_n$ утворюють повну групу подій, і нехай подія B відбувається обов'язково з одним із A_i. Тоді ймовірність події B обчислюється за формулою:

$$\mathbf{P(B)= P(A_1)P(B/A_1) +\dots+ P(A_n)P(B/A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i).}$$

Приклад 1.4.1

Є три шухляди. У першій шухляді 3 білих і 3 чорних кулі, у другій - 5 білих і 1 чорна, у третій - 1 біла і 5 чорних. Навмання вибираємо шухляду і виймаємо з нього кулю. Визначити ймовірність того, що вийнята куля біла.

Розв'язок

Позначимо події наступним чином: A_i – обрана і-а шухляда, B – обрана біла куля. Тоді маємо: $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$, $P(B/A_1) = 3/6$, $P(B/A_2) = 5/6$, $P(B/A_3) = 1/6$.

Використовуючи формулу повної ймовірності, одержуємо:

$$P(B)=\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

Формула Байеса. Нехай $A_1,A_2,\dots,A_n$ утворюють повну групу подій, і нехай подія B відбувається обов'язково з одним з A_i. Нехай подія B відбулася. Тоді ймовірність того, що вона відбулася саме з A_k дорівнює:

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k)P(B / A_k)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B / A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B / A_i)} .$$

Приклад 1.4.2

Умова з попереднього приклада. Якщо вийняли білу кулю, то яка ймовірність того, що вона вийнята із третьої шухляди?

Розв'язок

Використовуючи формулу Байеса, знаходимо:

$$P(A_3 / B) = \frac{P(B / A_3)P(A_3)}{P(B)} = \frac{1/6 \cdot 1/3}{1/2} = \frac{1}{9}$$

1.5 Формула Бернуллі. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа.

<u>**Формула Бернуллі**</u>. Нехай проводиться n незалежних іспитів, результатом кожного з яких можуть бути успіх або невдача. Нехай ймовірність успіху в кожному іспиті однакова і дорівнює p, ймовірність невдачі $q = 1\text{-}p$. Необхідно обчислити ймовірність того, що подія А (успіх) відбудеться рівно m раз. Така ймовірність позначається P_n^m або $P_n(m)$ і обчислюється по формулі:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Приклад 1.5.1

Монета підкидається п'ять разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде не більш двох разів.

Розв'язок

У даній задачі кількість іспитів n = 5, а кількість успіхів (випаде герб) – $m \le 2$. Нам необхідно знайти суму наступних ймовірностей: герб не випаде жодного разу – P5(0), герб випаде один раз – P5(1), герб випаде два рази – P5(2), тобто:

$$P_5(m \le 2) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) =$$
$$= C_5^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}.$$

Якщо число іспитів n велике, а ймовірність успіху p мала ($p < 0{,}1$), то ймовірність m успіхів у n іспитах розраховують по **<u>формулі Пуассона</u>**:

$$P_n(m) \approx \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}, \quad \lambda = np.$$

Приклад 1.5.2

Ймовірність влучення в ціль при кожному пострілі дорівнює $0{,}001$. Знайти ймовірність двох і більше влучень, якщо було зроблено 5000 пострілів.

Розв'язок

За умовою $n = 5000$, $\quad p = 0{,}001$, отже, $\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}001 = 5$.

$$P(m \ge 2) = 1 - P(0 \le m \le 1) = 1 - e^{-5} - 5e^{-5} =$$
$$= 1 - 0{,}00674 - 0{,}03369 = 0{,}95957.$$

<u>Локальна теорема Муавра-Лапласа</u>.

Справедлива наближена рівність

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad \text{де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Функція $\varphi(x)$ парна: $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Для неї є таблиці.

При $x > 4$ $\varphi(x) \approx 0$. Наведена формула дає добре наближення, якщо n достатньо велике, p та q не дуже близькі до нуля, $npq > 9$.

Приклад 1.5.3

Ймовірність успіху у кожному випробуванні дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що при 300 випробуваннях успішними будуть рівно 85 випробувань?

Розв'язок

За умовою $n = 300, \quad m = 85, \quad p = 0{,}25$, тоді $q = 1 - p = 0{,}75$,

$$\frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{85 - 300 \cdot 0{,}25}{\sqrt{300 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} = \frac{10}{7{,}5} = 1{,}33,$$

$$P_{300}(85) \approx \frac{1}{7{,}5}\varphi(1{,}33) = \frac{0{,}1647}{7{,}5} = 0{,}0219.$$

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа.

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких подія A може відбутись з ймовірністю p ($0 < p < 1$), подія A відбудеться не менше m_1 і не більше m_2 раз, наближено дорівнює

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Функція $\Phi(x)$ називається **функцією Лапласа**. Вона непарна:

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0{,}5$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(-x) = -0{,}5$. Для цієї функції існують таблиці.

Наведена формула дає добре наближення, якщо n достатньо велике, p та q не дуже близькі до нуля, $npq > 9$. Для всіх значень $x \ge 5$ можна вважати $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Приклад 1.5.4

Ймовірність виходу з ладу за час t одного приладу дорівнює 0,1. Визначити ймовірність того, що за час t зі 100 приладів вийде з ладу не менше 20.

Розв'язок

За умовою $n = 100, \quad m_1 = 20, \quad m_2 = 100 \quad p = 0{,}1$, $q = 1 - p = 0{,}9$.

$$\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = \frac{90}{3} = 30,$$

$$\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 100 \cdot 0{,}1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = \frac{10}{3} = 3{,}3,$$

$$P_{100}(20 \le m \le 100) \approx \Phi(30) - \Phi(3{,}3) = 0{,}5 - 0{,}4995 = 0{,}0005.$$

1.6 Функція розподілу. Числові характеристики

Випадковою величиною X=$X(\omega)$ є функція елементарної події ω, яка належить множині Ω. (Наприклад, кількість очок, яка випала на грані гральної кості; кількість викликів на автоматичній телефонній станції; дальність польоту снаряда і т.д.) Множина можливих значень випадковою величини X складається з усіх значень, які приймає функція $X(\omega)$. Деякі з випадкових величин можуть набувати дискретних значень, решта - довільних значень з певного інтервалу. Перші величини є ***дискретними***, другі – ***неперервними*** випадковими.

Будемо говорити, що про випадкову величину відомо усе, якщо можна перелічити всі значення випадкової величини в експерименті або вказати інтервал її значень, а також перелічити ймовірності, з якими приймаються кожне значення або вказати ймовірність того, що випадкова величина прийме значення з будь-якого інтервалу. Інакше кажучи, необхідно задати ***закон розподілу випадкової величини***. Його можна задати за допомогою *таблиці*:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

$$(p_1 + p_2 + ... + p_n = 1)$$

а також *аналітично* (у виді формул) і *графічно*. Дискретну випадкову величину звичайно задають таблицею, причому:

$$\bigcup_{i=1}^{n}\{X = x_i\} = U, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Приклад 1.6.1

Задати закон розподілу числа випадання герба в п'ятьох киданнях монети.

Розв'язок

X - число випадань герба. Ймовірності обчислюються за формулою Бернуллі:

$$p_5(0) = C_5^0\left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}, \qquad p_5(1) = C_5^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32},$$

$$p_5(2) = C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32}, \qquad p_5(3) = C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32},$$

$$p_5(4) = C_5^4\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}, \qquad p_5(5) = C_5^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}.$$

Закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	0	1	2	3	4	5
P	$1/32$	$5/32$	$10/32$	$10/32$	$5/32$	$1/32$

Функція $F(x)$ дійсної змінної x, $-\infty < x < \infty$, що визначається по формулі: ***F(x)=P{ X<x }***, називається ***функцією розподілу*** випадкової величини X. Вона має наступні **властивості**:

1. $0 \le F(x) \le 1$;

2. ***P(a ≤ x < b) = F(b) - F(a)*** (*ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал* $[a;b)$ **)**;
3. ***P(X≥ x) =*** **1-*F(x);***
4. **якщо *x₁ < x₂*, то *F(x₁) ≤ F(x₂)* (** *тобто функція F(x) є неспадною* **)**;
5. **F(-∞) = 0, F(+∞) = 1.**

Для дискретної випадкової величини X, що може приймати значення $x_1, \cdots, x_n$ $F(x) = \sum\limits_{x_i<x} P\{X = x_i\} = \sum\limits_{x_i<x} p_i$,

де підсумування поширюється на ті індекси i, для яких $x_i < x$.

Приклад 1.6.2

Нехай випадкова величина задана таблицею:

X	1	4	8
p	0.3	0.1	0.6

Знайти функцію розподілу ймовірностей і побудувати її графік.

Розв'язок

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1 \\ 0.3 & \text{при } 1 < x \le 4 \\ 0.4 & \text{при } 4 < x \le 8 \\ 1 & \text{при } x > 8 \end{cases}$$

На рис.1.1 відображено функцію розподілу.

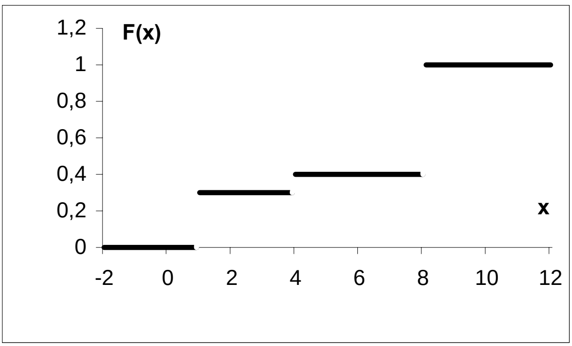


Рисунок 1.1

Якщо розглядається неперервна випадкова величина *X*, то її функцію розподілу можна подати у вигляді

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{-\infty < X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,,$$

де $f(x)$ – деяка функція, яку називають ***щільністю розподілу*** ймовірностей.

Якщо *F(x)* диференційовна і похідна її обмежена, то випадкова величина неперервна і має щільність розподілу ймовірностей

$$f(x)=F'(x).$$

Основні **властивості** щільністю розподілу ймовірностей:

- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in R$
- $P\{a \leq x \leq b\} = \int_{a}^{b} f(x)dx\,, \quad P(X = a) = 0\,,$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1\,.$

Випадкові величини, крім законів розподілу, можуть також описуватися числовими характеристиками, серед яких розрізняють **характеристики положення** (*математичне сподівання, мода, медіана* та ін.) і **характеристики розсіювання** (*дисперсія, середньо квадратичне відхилення, різні моменти розподілу вище першого* та ін.).

Математичним сподіванням називається дійсне число, обумовлене в залежності від типу випадкової величини *X* формулою

а) для дискретних: $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\,,$ де x_i, p_i – значення з таблиці розподілу ймовірностей, причому $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

б) для неперервних: $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$, де $f(x)$ – щільність ймовірності величини *X*.

Модою $M_0(X)$ називається значення випадкової величини X, для якого щільність розподілу ймовірностей максимальна, тобто $\max\limits_x f(x) = f(M_0(X))$ (для неперервних випадкових величин) або в якому випадкова величина має найбільшу ймовірність $\max\limits_i p_i$ (для дискретних випадкових величин).

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання. Позначається: $D(X)$, σ^2(X).

$$D(X) = M\,[X - M(X)]^2.$$

Для дискретних випадкових величин дисперсія обчислюється по формулі:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^2 p_i\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

де x_i, p_i – значення з таблиці розподілу ймовірностей.

Для неперервних випадкових величин:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x)dx\,.$$

Для обчислень зручна формула: $D(X)=M[X^2]-(M[X])^2$

Число $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ називається середнє квадратичним відхиленням випадкової величини X. Воно має розмірність випадкової величини X і визначає деякий стандартний інтервал розсіювання.

Приклад 1.6.3

Маємо 7 радіоламп, серед яких 3 несправні. На зовнішній вигляд несправні не відрізняються від нових. Навмання беруться 4 радіолампи і вставляються в 4 патрона. Знайти закон розподілу, функцію розподілу, математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення числа радіоламп X, що будуть працювати.

Розв'язок

Випадкова величина X – число працюючих радіоламп, може приймати значення 1,2,3,4 з ймовірностями:

$P_1 = C_4^1 \cdot C_3^3 / C_7^4 = 4/35$; $P_2 = C_4^2 \cdot C_3^2 / C_7^4 = 18/35$;

$P_3 = C_4^3 \cdot C_3^1 / C_7^4 = 12/35$; $P_4 = C_4^4 / C_7^4 = 1/35$;

Закон розподілу випадкової величини x має вигляд

X	1	2	3	4
P	4/35	18/35	12/35	1/35

Функція розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 1 \\ 4/35, & \text{якщо} \quad 1 < x \le 2 \\ 22/35, & \text{якщо} \quad 2 < x \le 3 \\ 34/35, & \text{якщо} \quad 3 < x \le 4 \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 4 \end{cases}$$

Математичне сподівання

$M[X] = 1 \cdot 4/35 + 2 \cdot 18/35 + 3 \cdot 12/35 + 4 \cdot 1/35 = 80/35 \approx 2{,}28$

Дисперсія

$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = 1^2 \cdot 4/35 + 2^2 \cdot 18/35 + 3^2 \cdot 12/35 + 4^2 \cdot 1/35 - (2{,}28)^2 \approx 0{,}49$

Середнє квадратичне відхилення

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7.$

Приклад 1.6.4

Дано функцію $f(x) = Ax^2e^{-2x}$ $(0 \le x < +\infty)$. Визначити при якому значенні A функція *f(x)* буде функцією щільності розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини. Знайти функцію розподілу *F(x),* ймовірність прийняття випадковою величиною значення з інтервалу (0;1/2), математичне сподівання випадкової величини.

Розв'язок

Скористаємося властивістю функції щільності розподілу ймовірностей

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \qquad \int_{0}^{\infty} Ax^2 e^{-2x} dx = 1$$

Для нашої задачі $A = 1/(\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-2x} dx) = 4$;

$$F(x) = \int_{0}^{x} 4x^2 e^{-2x} dx = 1 - e^{-2x}(2x^2+2x+1);$$

$$P(0 < x < 1/2) = F(1/2) - F(0) = 1 - e^{-1}(1/2 + 1 + 1) = 1 - 5/(2e);$$

$$M[X] = \int_{0}^{\infty} 4x^3 e^{-2x} dx = 3/2.$$

1.7. Основні закони розподілу (біномний, Пуассона, рівномірний, показниковий, нормальний)

Якщо проводиться n незалежних експериментів, у кожнім з яких подія А з'являється з ймовірністю p, то ймовірність того, що в даній серії експериментів подія А з'явиться рівно m раз, виражається формулою Бернуллі

$$P_n(m) = C_n^m p^m \cdot (1-p)^{n-m},$$

або, позначивши $1 - p = q$, $P_n(m) = C_n^m p^m \cdot (1-p)^{n-m}$.

Випадкова величина X дискретного типу називається ***розподіленою за біномним законом***, якщо її можливі значення 0, 1, …, m, …, n, а відповідні ймовірності

$P_m = P\{x=m\} = C_n^m p^m \cdot (1-p)^{n-m}$, де $0 < p < 1$; $q=1-p$; $m = 0, 1, \dots, n$.

Для випадкової величини x, що має біномний розподіл

$M[X] = np$, $D[X] = npq$ де $q = 1-p$.

Випадкова величина X називається ***розподіленою за законом Пуассона*** з параметром $\lambda > 0$, якщо її можливі значення рівні 0, 1, 2, …, а відповідні ймовірності визначаються формулою

$$P_m\{x = m\} = \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \qquad \text{де } \lambda > 0$$

Розподіл Пуассона залежить від одного параметра. Для випадкової величини X, розподіленої за законом Пуассона,

$$M[X] = D[X] = \lambda .$$

Розподіл Пуассона може бути отриманий з біномного розподілу шляхом граничного переходу при $n \to \infty$, $p \to 0$ за умови $np = \lambda$ і в цьому випадку інтерпретується як закон "рідкісних" явищ.

Випадкова величина X неперервного типу називається ***розподіленою рівномірно*** на відрізку [a,b], якщо її щільність розподілу ймовірностей постійна на даному відрізку:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \notin (a,b); \\ 1/(b - a), & \text{якщо} \quad x \in (a,b). \end{cases}$$

Рівномірний розподіл реалізується в експериментах, у яких навмання ставиться крапка на відрізку [a,b] (X - абсциса поставленої крапки), а також в експериментах по виміру тих або інших фізичних величин з округленням (X - помилка округлення).

Випадкова величина x називається розподіленою по ***показниковому (експоненціальному) закону*** з параметром $\lambda > 0$, якщо вона неперервного типу і її щільність розподілу ймовірностей задається формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Показниковий розподіл часто зустрічається в теорії масового обслуговування (наприклад, X - час чекання при технічному обслуговуванні або X - тривалість телефонних розмов, які щодня реєструються на телефонній станції) і в теорії надійності (наприклад, X - термін служби радіоелектронної апаратури). Математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення величини X, що має показниковий розподіл, дорівнюють відповідно:

$$M[X] = 1/\lambda; \quad D[X] = 1/\lambda^2; \quad \sigma[X] = 1/\lambda .$$

Випадкова величина *X* називається розподіленою по ***нормальному (гаусовському) закону*** з параметрами m∈R і σ >0, якщо щільність розподілу ймовірностей має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

Параметри m і σ збігаються з основними характеристиками розподілу:

$$m = M[X]; \quad \sigma = \sigma[X] = \sqrt{D[X]}$$

Якщо *X* розподілена по нормальному закону з m=0 і σ =1, то вона називається *стандартизованою, нормальною* величиною. Її функція розподілу

$$F(x) = 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = 0{,}5 + \Phi(x)$$ (*Φ(x)*– функція Лапласа).

Для нормального розподілу ймовірність того, що *випадкова величина X потрапить на інтервал (α,β):*

$$P(X\in(\alpha,\beta)) = \Phi((\alpha-m)/\sigma) - \Phi((\beta-m)/\sigma)$$

Для ймовірності влучення на симетричний щодо математичного сподівання інтервал, справедливою є формула

$$P\{|x-m|<\varepsilon\} = 2\Phi(\varepsilon/\sigma).$$

Нормальний розподіл виникає тоді, коли величина *X* утворюється в результаті підсумовування великого числа незалежних випадкових доданків.

Приклад 1.7.1.

Ймовірність відмовлення кожного приладу при іспиті не залежить від відмовлень інших приладів і дорівнює 0,2. Випробувано 5 приладів. Випадкова величина *X* – число приладів, що відмовили за час іспиту. Побудувати закон розподілу цієї випадкової величини. Знайти математичне сподівання, моду, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Розв'язок

Випадкова величина *X* – число приладів, що відмовили, розподілена за біноміним розподілом. Тоді за формулою Бернуллі

$P\{x = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$, де $q=1-p$

Обчислимо ймовірності появи випадкової величини:

$P(X = 0) = 0{,}85 = 0{,}3277$

$P(X = 1) = 5 * 0{,}2 * 0{,}84 = 0{,}4096$

$P(X = 2) = C_5^2 * 0{,}22 * 0{,}83 = 0{,}2048$

$P(X = 3) = C_5^3 * 0{,}23 * 0{,}82 = 0{,}0512$

$P(X = 4) = C_5^4 * 0{,}24 * 0{,}8 = 0{,}0064$

$P(X = 5) = 0{,}25 = 0{,}0003$

Заповнимо таблицю:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,3277	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,0003

Для біномного розподілу $M[X] = np$; $D[X] = npq$.

У нашій задачі $M[x] = 0{,}2 * 5 = 1$;

$D[x] = 5 * 0{,}2 * 0{,}8 = 0{,}8$;

$\sigma[x] = \sqrt{D[x]} = \sqrt{0.8} \approx 0{,}9$.

Мода $M_0 = 1$

Приклад 1.7.2

При іспиті легованої сталі на зміст вуглецю ймовірність того, що у випадково взятій пробі відсоток вуглецю перевищить припустимий рівень, дорівнює p = 0,01. Вважаючи, що випадкова величина розподілена за законом рідких явищ, обчислити, скільки в середньому необхідно випробувати зразків, щоб з ймовірністю p =0,95 зазначений ефект спостерігався принаймні k раз (розглянути випадок k=1,2,3).

Розв'язок

У цій задачі застосуємо закон Пуассона

$P\{x = m\} = (\lambda^m/m!) \cdot e^{-\lambda}$, де $\lambda = np$.

Ймовірність того, що випадкова величина з'явиться принаймні k раз, знаходиться по формулі

$$P\{x \ge k\} = \sum_{i=k}^{n} (\lambda^i / i!) \cdot e^{-\lambda}$$

У випадку k=1

$$P\{x \ge 1\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda^i / i!) \cdot e^{-\lambda}$$

Простіше розглянути ймовірність протилежної події:

$P\{x < 1\} = P\{x = 0\} = e^{-\lambda} = e^{-np} = e^{-0,01n}$,

Тоді

$P\{x \ge 1] = 1 - P\{x = 0\} = 1 - e^{-0,01n}$,

$1 - e^{-0,01n} \ge 0,95$; $\quad e^{-0,01n} \le 0,05$;

$n \ge -100 \ln 0,05 = 299,6$.

Отже, потрібно випробувати число зразків ≥300, щоб зазначений ефект міг спостерігатися не менш одного разу.

Аналогічно,

$P\{x \ge 2\} = 1 - (P\{x = 0\} + P\{x = 1\}) = 1 - e^{-0,01n} - 0,01\, e^{-0,01n} \ge 0,95$

або $\quad e^{-0,01n(1 + 0,01n)} \le 0,05$.

Розв'яжемо рівняння $e^{-0,01n(1 + 0,01n)} = 0,05$ методом ітерацій. Скористаємося формулою

$n_{i+1} = -100 \ln(0,05/(1+0,01n_i)) = 100 \ln((1+0,01n_i)/0,05) = 100 \ln(20+0,2n_i)$

Візьмемо $\quad n_0=100$

$n_1 = 100 \ln(20+0,2*100) = 100 \ln 40 = 368,8$;

$n_2 = 100 \ln(20+0,2*368,8) = 454,07$;

$n_3 = 100 \ln(20+0,2*454,07) = 470,8$

$n_4 = 100 \ln(20+0,2*470,8) = 473,76$;

$n_5 = 100 \ln(20+0,2*473,76) = 474,27$;

$n_6 = 100 \ln(20+0,2*474,27) = 474,366$.

Отже, число проб ≥475.

При k=3 одержимо $\quad 1 - e^{-0,01n} - 0,01ne^{-0,01n} - ((0,01n)2/2)e^{-0,01n} \ge 0,95$,

або $\quad e^{-0,01n}(1 + 0,01n + 0,00005n^2) \le 0,05$.

Вирішивши рівняння $e^{-0,01n}(1+0,01n+ 0,00005n^2) \le 0,05$, знайдемо, що число проб $\quad n \ge 630$.

Приклад 1.7.3

При роботі ЕОМ у випадкові моменти виникають несправності. Час *t* роботи ЕОМ до першої несправності розподілено по показниковому закону з параметром λ: $\varphi(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ (t>0). При виникненні несправності вона миттєво виявляється та ЕОМ надходить у ремонт. Ремонт продовжується час t_0, після чого ЕОМ знову включається в роботу. Знайти щільність *f(t)* і функцію розподілу *F(t)* проміжку часу Z між двома сусідніми несправностями. Знайти його математичне сподівання і дисперсію. Знайти ймовірність того, що Z буде більше $2t_0$

Розв'язок

$z = t + t_0$;

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, & \text{при} \quad t > t_0; \\ 0, & \text{при t} < \text{t}_0; \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, & \text{при} \quad t > t_0; \\ 0, & \text{при t} < \text{t}_0; \end{cases}$$

$M[Z] = 1/\lambda + t_0$; $D[Z] = 1/\lambda^2$; $P\{Z > 2t_0\} = 1 - F(2t_0) = e^{-\lambda t_0}$.

Приклад 1.7.4

Бракування кульок для підшипників проводиться так: якщо кулька не проходить через отвір діаметра d_1, але проходить через отвір діаметра $d_2 > d_1$, то її розмір вважається припустимим. Якщо яка-небудь з цих умов не виконується, то кулька бракується. Відомо, що діаметр кульки X є нормально розподілена випадкова величина з характеристиками $m = (d_1 + d_2)/2$ і $\sigma = (d_2 - d_1)/4$. Визначити ймовірність того, що кулька буде забракована.

Розв'язок

Інтервал (d_1, d_2) симетричний відносно m. За формулою

$P\{|X - m| < \varepsilon\} = 2\Phi(\varepsilon/\sigma)$, вважаючи $\varepsilon = (d_2 - d_1)/2$,

знаходимо ймовірність того, що кулька не буде забракована:

$$P\{|X - m| < (d_2 - d_1)/2\} = 2\Phi((d_2 - d_1)/2\sigma)$$

Звідки отримуємо

$P = 1 - 2\Phi((d_2 - d_1)/2\sigma) = 1 - 2\Phi(2(d_2 - d_1)/(d_2 - d_1)) = 1 - 2\Phi(2) = 1 - 2\cdot 0{,}47725 = 1 - 0{,}9545 = 0{,}0455$.

2 МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

2.1 Попередній аналіз статистичних рядів

При розв’язанні багатьох практичних задач, пов'язаних зі статистичними моделями явищ природи, необхідні ймовірні характеристики відповідних випадкових величин дослідникові невідомі. Їх потрібно визначити за експериментальним даними. Подібний статистичний опис результатів спостережень, побудова й перевірка різних математичних моделей, що використовують ймовірності, становить основний зміст математичної статистики.
Розглянемо фундаментальні поняття статистичної теорії.

Генеральна сукупність – це сукупність всіх мислимих спостережень над випадковою величиною, які можуть бути проведені за даних умов.

Вибірка об'єму n – це кінцевий набір значень випадкової величини, отриманий у результаті спостережень у даних умовах.

Статистичний метод полягає в тім, щоб по вибірці, тобто по частині генеральної сукупності висловити обґрунтовані судження про властивості сукупності в цілому.

Нехай з генеральної сукупності витягнута вибірка, причому x_1 спостерігалося n_1 раз, …, x_k – n_k раз. ($\sum n_i = n$ – об'єм вибірки). Спостережувані значення x_i називаються ***варіантами,*** а послідовність варіант у зростаючому порядку – ***варіаційним рядом***. Числа спостережень n_i називаються ***частотами,*** а відносини $w_i = n_i / n$ - ***відносними частотами (частостями)***.

Статистичним розподілом вибірки називається перелік варіант і відповідних їм частот (або частостей). ***Емпіричною функцією*** розподілу називають функцію $F^*(x)$, що визначає для кожного x відносну частоту події $X<x$, тобто $F^*(x) = n_x / n$, де n_x – число варіант, менших чим x, n – об'єм вибірки.

Полігоном частот (частостей) називають ламану, відрізки якої з'єднують крапки з координатами (x_1, n_1), … , (x_k, n_k)... $((x_1, w_1)$, … , $(x_k, w_k))$...

При великому об'ємі вибірки її елементи поєднують у групи, одержуючи ***групований (інтервальний) статистичний ряд***. Для цього інтервал розбивають на m часткових непересічних інтервалів довжини h і знаходять для кожного інтервалу n_i і ν_i.

Гістограмою частот (частостей) називають східчасту фігуру, підставою кожного прямокутника якої служать часткові інтервали h, а висоти – n_i/h. ($w_i/h=n_i/(nh)$).

Площа гістограми частот дорівнює n, гістограми частостей - 1.

Статистичною оцінкою невідомого параметра теоретичного розподілу називають функцію від спостережуваних випадкових величин. Вибіркові оцінки основних числових характеристик випадкової величини X визначають по наступних формулах:

1) як *оцінку для математичного сподівання* використають середнє арифметичне значень, які спостерігалися:

$$\tilde{m} = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} x_i \;;$$

2) *оцінкою моди μ_0* є елемент вибірки, що зустрічається з максимальною частотою;

3) *оцінкою медіани μ_e* називається число, що ділить варіаційний ряд на дві частини, що містять рівне число елементів. Якщо об'єм вибірки n=2k+1 – непарний, то $\tilde{\mu}_e = x_{k+1}$; якщо n=2k – парне число

$$\tilde{\mu}_e = \frac{1}{2}\left(x_k + x_{k+1}\right);$$

4) *вибірковою дисперсією $Д_в$* називається середнє арифметичне квадратів відхилення спостережуваних величин від їх середнього:

$$Д_в = \frac{1}{n}\sum\left(x_i - \tilde{m}\right)^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - 2\tilde{m}\frac{\sum x_i}{n} + \tilde{m}^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \tilde{m}^2 .$$

Щоб усунути зсув як оцінку для дисперсії використовують величину $S^2 = \tilde{Д}$:

$$\tilde{Д} = \frac{n}{n-1}Д_в = \frac{1}{n-1}\sum\left(x_i - \tilde{m}\right)^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{\sum x_i^2}{n} - \tilde{m}^2\right) ;$$

5) для *оцінки середнього квадратичного відхилення* використовують величину $S = \tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{Д}}$;

6) *коефіцієнт варіації* $V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100\%$;

Побудова інтервального статистичного ряду й основних числових характеристик вибірки дозволяє зробити попередній вибір закону розподілу випадкової величини X, виходячи з наступних міркувань:

1) По вигляду гістограми.

2) Порівнянням вибіркових оцінок математичного сподівання випадкової величини, для нормального закону розподілу $\widetilde{m}=\mu_0=\mu_e$.

Приклад 2.1.1

Провести статистичний аналіз генеральної сукупності по наступній вибірці: 6,10,10,2,6,10,2,10,6,10.
Варіаційний ряд: 2,2,6,6,6,10,10,10,10,10.

Статистичний розподіл:

Варіанти x_i	2	6	10	Σ
Частоти n_i	2	3	5	10
Частості w_i	0.2	0.3	0.5	1

Емпірична функція розподілу: $F^*(x)=\begin{cases} 0 & при\ x\le 2 \\ 0.2 & при\ 2<x\le 6 \\ 0.5 & при\ 6<x\le 10 \\ 1 & при\ x>10 \end{cases}$

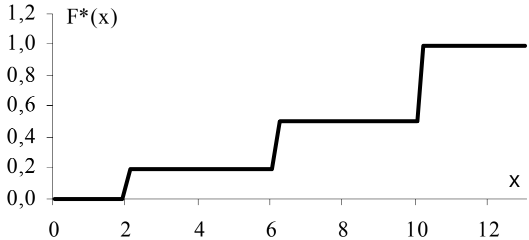


Рисунок 2.1 - Графік функції розподілу $F^*(x)$

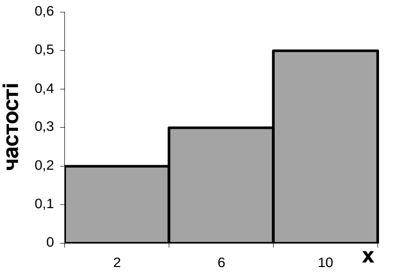


Рисунок 2.2 - Гістограма частостей

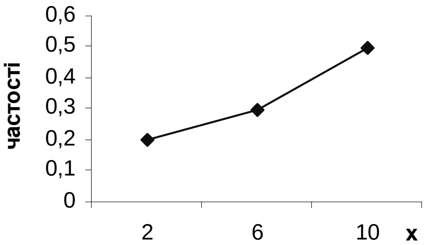


Рисунок 2.3 - Полігон частостей

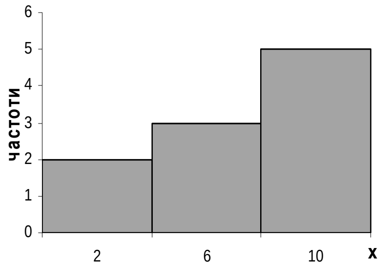


Рисунок 2.4 - Гістограма частостей

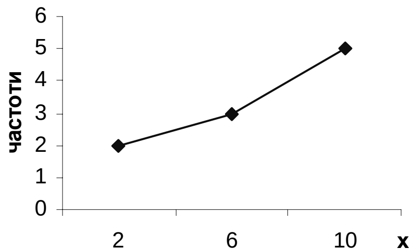


Рисунок.2.5 - Полігон частот

Знайдемо точечні оцінки:

$$\widetilde{m} = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n} x_i = \frac{1}{10}\left(2\cdot 2 + 6\cdot 3 + 10\cdot 5\right) = 7.2;$$

μ_0=10; μ_e=(6+10)/2=8;

$$\widetilde{Д} = \frac{n}{n-1}\left(\frac{\sum x_i^2}{n} - \widetilde{m}^2\right) = \frac{10}{9}\left(\frac{2\cdot 2^2 + 3\cdot 6^2 + 5\cdot 10^2}{10} - 7.2^2\right) = 10.84;$$

$$S = \widetilde{\sigma} = \sqrt{\widetilde{Д}} = \sqrt{10.84} = 3{,}3; \qquad V = \frac{S}{\overline{x}}\cdot 100\% = \frac{3.3}{7.2}\cdot 100\% = 45.83\%\ ;$$

З'ясуємо, чи є дана випадкова величина розподіленою за нормальним законом розподілу:

1) по виду гістограми випадкова величина X не є розподіленою за нормальним законом;

2) для нормального закону розподілу $\widetilde{m} = \mu_0 = \mu_e$, 7.2≠8≠10, отже, закон не є нормальним**;**

2.2 Побудова довірчих інтервалів для оцінок параметрів нормального розподілу

Інтервальною називають *оцінку*, що визначається двома числами – кінцями інтервалу. Інтервальні оцінки характеризуються точністю та надійністю.

Надійністю (довірчою ймовірністю) оцінки θ по $\widetilde{\theta}$ називають ймовірність γ, з якою виконується нерівність $|\theta-\widetilde{\theta}|<\delta$, тобто:

$$P(|\theta-\widetilde{\theta}|<\delta)=\gamma=1-\alpha$$

α - рівень значимості.

Довірчим називають *інтервал* ($\widetilde{\theta}-\delta$; $\widetilde{\theta}+\delta$), що покриває заданий параметр із заданою надійністю γ.

Числом ступенів вільності f називається різниця між об'ємом вибірки n і числом накладених на неї зв'язків, де під зв'язком розуміють якийсь оцінюваний параметр.

Розглянемо нормовану випадкову величину N=(0;1). *U_p-квантиль* – це значення випадкової величини U, для якого виконується співвідношення: $F(U_\gamma)=\gamma$, де F – функція нормального нормованого розподілу. Тоді довірчий інтервал буде мати вигляд:

$$P(-U_{1-\alpha/2}<U\le U_{1-\alpha/2}) =1-\alpha.$$

Розглянемо ряд задач про побудову довірчого інтервалу.

Приклад 2.2.1

Нехай X - нормально розподілена випадкова величина з відомим σ. Сформуємо випадкову величину виду:

$$U=\frac{\overline{x}-m}{\sigma}\sqrt{n},$$

математичне сподівання та дисперсія якої відповідно рівні 0 і 1. Таким чином отримаємо наступний довірчий інтервал для математичного сподівання:

$$P(-U_{1-\alpha/2}< U \le U_{1-\alpha/2}) = P\left(-U_{1-\alpha/2}< \frac{\overline{x}-m}{\sigma}\sqrt{n} \le U_{1-\alpha/2}\right) =$$

$$= P(\overline{x} -U_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} < m \le \overline{x} +U_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}) = 1-\alpha$$

Значення функції $U_{1-\alpha/2}$ відомі й знаходяться із таблиці подвоєної нормальної функції Лапласа.

Приклад 2.2.2

Нехай виконані умови задачі 1 з невідомим σ. Сформуємо статистику:

$$T = \frac{\bar{x} - m}{S/\sqrt{n}},$$

яка має *розподіл Стьюдента* з $f = n - 1$ ступенями вільності.

$$1-\alpha = P(-t_{1-\alpha/2} < T \le t_{1-\alpha/2}) = P(-t_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{x} - m}{S/\sqrt{n}} \le t_{1-\alpha/2}) =$$

$$= P(\bar{x} - t_{1-\alpha/2}S/\sqrt{n} \le m < \bar{x} + t_{1-\alpha/2}S/\sqrt{n})$$

Значення $t_{1-\alpha/2}$ розташовані в таблиці по (f; α).

Приклад 2.2.3

Випадкова величина X має нормальний розподіл. Об'єм вибірки n=9, $\bar{x}$ =4, критерій значимості α =0.01. Знайти довірчий інтервал для m у випадках: а) σ=3; б) S=3.

У першому випадку по таблиці знаходимо квантиль $U_{0,995}$=2,58. Тоді довірчий інтервал $m \in (4 \pm 2.58 \cdot 3/\sqrt{9})$ або $m \in (1.42;\ 6.58)$. У другому випадку необхідно використати квантиль розподілу Стьюдента $t_{0.995}(8)$ =3.36. Довірчий інтервал у цьому випадку істотно відрізняється: $m \in (4 \pm 3.36 \cdot 3/\sqrt{9})$ або $m \in (0.64;\ 7.36)$.

2.3 Перевірка параметричних гіпотез. Критерій Пірсона (χ^2)

У попередніх задачах закон розподілу генеральної сукупності передбачається відомим. Якщо закон розподілу невідомий, але є підстави припускати, що він має певний вигляд, то перевіряють нульову гіпотезу H_0: генеральна сукупність розподілена за законом А.

Критерієм згоди називають критерій перевірки гіпотези про передбачуваний закон невідомого розподілу.

Розглянемо ***критерій Пірсона*** (χ^2).

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – вибірка спостережень випадкової величини X. Перевіряється гіпотеза H_0, стверджуюча, що випадкова величина X має закон розподілу F(X). Процедура застосування критерію χ^2 для перевірки гіпотези H_0 складається з наступних етапів:

1) По вибірці спостережень випадкової величини X створюють згрупований (інтервальний) статистичний ряд. Довжина інтервалу знаходиться по формулі:

$h = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}32\lg n}$, кількість отриманих інтервалів - r.

2) Знаходять оцінки невідомих параметрів передбачуваного закону розподілу. Наприклад, для нормального закону:

$$\widetilde{M}(X) = \overline{x}^* = \sum_{j=1}^{r} x'_j \varpi_j ,$$

$$\widetilde{Д}(X) = S^{*2} = \frac{n}{n-1} \cdot \sigma^{*2} = \frac{n}{n-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{r} x_j'^2 \varpi_j - \overline{x}^{*2} \right),$$

де x'_j - середина j-го інтервалу, ω_j – частость j-го інтервалу.

3) Використовуючи передбачуваний закон розподілу, обчислюють ймовірності p_k, з якими випадкова величина X попадає в кожний інтервал. Наприклад, для нормального закону:

$$p_j = P\{x_{j-1} < x \le x_j\} = \Phi(U_j) - \Phi(U_{j-1}),$$

де $U_j = (x_j - \overline{x}^*)/S^*$.

4) Визначають теоретичні частоти n^*p_j для кожного часткового інтервалу.

5) Обчислюють вибіркову статистику (критерій) по формулі:

$$\chi_B^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(m_j - np_j\right)^2}{np_j}.$$

6) Приймають статистичне рішення: гіпотеза H_0 не суперечить вибірці спостережень на заданому рівні значимості α, якщо:

$$\chi_B^2 < \chi_{1-\alpha}^2 (r - \ell - 1),$$

де r – число інтервалів, ℓ - число параметрів розподілу, які оцінюються по вибірці. У тому випадку, якщо $\chi_B^2 \ge \chi_{1-\alpha}^2 (r - \ell - 1)$, нульова гіпотеза відхиляється.

Зауваження. Необхідно, щоб для всіх інтервалів виконувалася умова $np_j \geq 5$. Якщо в деяких інтервалах ця умова не виконується, то їх варто об'єднати із сусідніми.

Приклад 2.3.1

Перевірити гіпотезу про нормальний розподіл групованих даних, рівень значимості прийняти рівним 0.1. Об'єм вибірки n=55. Статистичний ряд має вигляд:

Варіанти x_i	10	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Σ
Частоти n_i	2	1	3	4	4	5	7	10	6	6	4	2	1	55

$h = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}32 \lg n} = \dfrac{24 - 10}{1 + 3.32 \lg 55} \approx 2.07$, візьмемо довжину інтервалу h=2, значить r=(24-10)/2=7.

Обчислимо середнє значення $\bar{x}^* = \sum_{j=1}^{7} x'_j \varpi_j$ =17.84 і оцінку для дисперсії: $S^{*2} = \dfrac{n}{n-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{r} x'^2_j \varpi_j - \bar{x}^{*2} \right) \approx 8.526$, тоді середнє квадратичне відхилення дорівнює S=2.92. Складемо таблицю:

x_j-x_{j+1}	x'_j	m_j	ω_j	$U_j;U_{j+1}$	p_j	np_j		m_j-np_j	$\frac{(m_j - np_j)^2}{np_j}$
10-12	11	2	.0364	-2.68; -2	.0191	1. 0505	14.333	-.333	0.0077
12-14	13	4	.0727	-2; -1.32	.0714	3. 927			
14-16	15	8	.1455	-1.32;-.63	.1701	9. 3555			
16-18	17	12	.2182	-.63; .05	.2556	14. 058		-2. 058	0.3013
18-20	19	16	.2909	.05; .74	.2504	13. 772		2. 228	0.3604
20-22	21	10	.1818	.74; 1.43	.1526	8.393	11,671	1. 329	0.1513
22-24	23	3	.0545	1.43; 2.11	.0596	3.278			
χ_B^2									0.8207

Для нормального закону число оцінюваних по вибірці параметрів дорівнює двом (тобто ℓ=2), число ступенів волі f=4-2-1=1. По таблиці χ^2 знаходимо: $\chi_{0.92}$ (1) =2.71. Тому що χ_B^2=0.8207<$\chi_{0.92}$ (1), то гіпотеза про нормальний закон розподілу не суперечить результатам досліджень.

2.4 Парна лінійна регресія

Парною регресією двох випадкових величин Y на X називається умовне математичне сподівання $M(Y/X=x)=Y_p(x)$. Функція регресії може бути використана для прогнозування значень Y при фіксованому значенні X. Якщо між фактором X і показником Y існує лінійна стохастична залежність: $Y_p = a\cdot X + b$, то регресією називають лінійною.

Оцінки параметрів a і b парної регресії визначаються за допомогою метода найменших квадратів (МНК) за формулами

$$a=(n\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i)/(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2), \quad b=\bar{y}-a\bar{x}\ ,$$

де $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$; $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ – середні значення фактора і показника

Коефіцієнт кореляції характеризує щільність лінійної залежності між фактором X і показником Y. Він розраховується за формулою:

$$r=\frac{K(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}},$$

де $K(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ - кореляційний момент, $D(Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$; $D(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$.

Коефіцієнт кореляції змінюються у межах $-1\le r\le 1$. Коли коефіцієнт кореляції за абсолютним значенням близький до 1, це означає наявність сильного лінійного зв'язку між фактором X і показником Y. Коли коефіцієнт кореляції близький до нуля – лінійного зв'язку немає.

Приклад 2.4.1

За даними вибірки X та Y знайти оцінки параметрів регресії, коефіцієнт кореляції та значення прогнозу Y для наступного значення X .

	Вибірка				*Регресія*
	Y	*X*	*Y*X*	*X*X*	*Yp*
1	4,33	2,00	8,66	4,00	5,88
2	9,497	2,50	23,74	6,25	7,83
3	9,123	3,00	27,37	9,00	9,78
4	13,012	3,50	45,54	12,25	11,72
5	13,124	4,00	52,50	16,00	13,67
6	16,051	4,50	72,23	20,25	15,62
7	18,431	5,00	92,16	25,00	17,57
8	18,521	5,50	101,87	30,25	19,51
9	20,177	6,00	121,06	36,00	21,46
10	24,145	6,50	156,94	42,25	23,41
11	25,252	7,00	176,76	49,00	25,36
12	26,741	7,50	200,56	56,25	27,30
13	29,949	8,00	239,59	64,00	29,25
	прогноз	***8,50***			***31,20***
сума	228,353	65,00	1318,98	370,50	228,35
	n=	13	***Xср=***	5,00	
	a=	3,89	***Yср=***	17,57	
	b=	-1,91	***r=***	0,99	

Коефіцієнт кореляції $r = 0{,}99$, що говорить тісний лінійний зв'язок фактора і показника. При зміні фактора на одиницю показник зміниться на 3,89. Рівняння регресії $Y_p = 3{,}89 * X - 1{,}91$, Для $x_p(прогноз) = 8{,}5$ середнє значення прогнозу показника має значення $y_p(прогноз) = 31{,}20$.

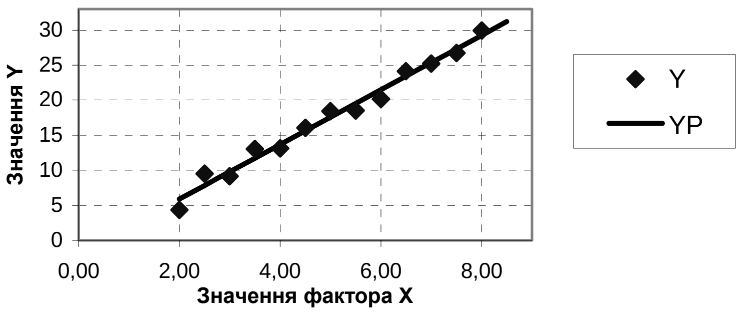


Рис. 2.5 - Графік лінії регресії

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

3.1. Завдання 1

1. У лотереї 80 квитків, з яких 20 – виграшні. Визначити ймовірність того, що обидва куплених квитка будуть виграшні.

2. Слово «КРІПАК» розрізали на букви, узяли навмання чотири букви і виклали їх у ряд. Яка ймовірність того, що вийшло слово «КІПА»?

3. Підкидаються дві гральні кістки. Знайти ймовірності наступних подій: **А**={очки на обох кістках збігаються}; **В**={сума очок на кістках непарна}; **С**={сума цифр на верхніх гранях більше 6}.

4. На складі мається 12 телевізорів, з яких 8 імпортного виробництва. Знайти ймовірність того, що серед п'яти узятих навмання телевізорів: 1) виявиться більш 2 імпортних; 2) усі будуть вітчизняного виробництва.

5. З десяти лотерейних квитків виграшними є три. Визначити ймовірність того, що серед узятих навмання трьох квитків хоча б один виграшний.

6. Яка ймовірність того, що навмання узятий телефонний номер закінчується на 37, якщо відомо, що в ньому немає цифри 5 і всі цифри різні?

7. На олімпіаду прибули 10 першокурсників, 12 другокурсників і 8 третьокурсників. У перший тур навмання вибирають 6 чоловік. Знайти ймовірності наступних подій:

А={будуть обрані одні другокурсники};

В={будуть обрані два першокурсники, два другокурсника і два третьокурсника}.

8. В урні 2 білих і 3 чорних кулі. З урни виймають одночасно дві кулі. Яка подія більш ймовірна: **А=**{кулі одного кольору} чи **В**={кулі різних кольорів}?

9. Яка ймовірність вірно вгадати рівно 4 номера в лотереї «5 з 36»?

10. На картках написані букви: **А, Ч, Ч, А, Р, К.** Картки виймаються по одній навмання і розкладаються в ряд. Яка ймовірність того, що вийде слово «ЧАРКА»?

11. Навмання вибирається п'ятизначне число. Яка ймовірність наступних подій: **A**={число однаково читається як зліва направо, так і навпаки}; B={число кратне п'яти}.

12. Замок відкривається тільки при наборі конкретного шифру – чотиризначного номера, який можна скласти із семи цифр: 1,2,3,4,5,6,7. Яка ймовірність того, що замок відкривається при випадковому наборі шифру?

13. З колоди в 52 карти навмання виймаються чотири. Яка ймовірність наступних подій: 1) усі вийняті карти – валети; 2) вийнята хоча б одна бубна.

14. У ліфт дев'ятиповерхового будинку входять п'ять чоловік. Яка ймовірність того, що усі вони вийдуть на різних поверхах, якщо кожен пасажир може вийти на будь-якому поверсі незалежно від інших?

15. З коробки, у якій знаходяться 10 ламп, виймають випадковим образом чотири. Яка ймовірність, що буде вийнята рівно одна згоріла лампа, якщо в коробці знаходиться три згорілі і сім придатних ламп?

16. У телевізорі знаходиться 12 радіоламп, які зовні не відрізняються одна від одної. Телевізор зіпсувався і відомо, що дві радіолампи в ньому згоріли. Навмання з телевізора виймають дві радіолампи. Яка ймовірність, що вони обидві будуть згорілими?

17. Двоє друзів були зараховані у ВУЗ. На конкурсній основі було створено 4 групи по 25 чоловік. Яка ймовірність того, що друзі потрапили в одну групу?

18. Для утворення електричного ланцюга необхідно послідовно з'єднати три однакові деталі, усього є 8 деталей, з яких дві згорілі, на зовнішній вигляд деталі не відрізняються. З наявних деталей вибирають довільно три і з'єднують у ланцюг. Знайти ймовірність того, що ланцюг виявиться працюючим.

19. У партії з 10 деталей, що прибула на завод, знаходяться 2 бракованих деталі. З партії вибирається для контролю 6 деталей. Знайти ймовірність того, що з них рівно дві деталі будуть бракованими.

20. З повного набору кісточок доміно (всього 28 кісточок) навмання виймається одна. Знайти ймовірності наступних подій:

A={на вийнятій кісточці є число 1};

B={сума цифр на вийнятій кісточці не більше двох}.

21. На аркушах написані цифри від 0 до 6. Навмання беруть три листи й один по одному викладають їх у ряд. Яка ймовірність того, що вийде число, кратне трьом?

22. Учена рада складається з 20 чоловік: 12 професорів і 8 доцентів. На наукову конференцію прийшли п'ять членів ученої ради. Яка ймовірність, що усі вони професори?

23. На складі є сім однакових відрізів тканини, з кожного з яких можна викроїти або по 3 деталі №1, або по 2 деталі №2. Для готового виробу необхідно 3 деталі №1 і 3 деталі №2. Кожний з відрізів був покроєний деталями одного виду. Довільно обрані три відрізи. Визначити ймовірність того, що з них можна зшити готовий виріб.

24. Яка ймовірність вірно вгадати рівно 5 номера в лотереї «6 з 42»?

25. На окремих картках написані цифри від 5 до 9 включно. Навмання виймають три з них і розкладають у ряд друг за другом. Яка ймовірність одержати при цьому: а) непарне число; б) число 567?

26. У номерному знаку автомобіля 5 цифр. Яка ймовірність, що вам дадуть номер автомобіля з трьома цифрами 7: а) розташованими поряд, б) розташованими в довільному порядку?

27. П'ять варіантів контрольної роботи, написаних на окремих картках, були розмножені по три рази кожний. Усі вони ретельно перемішуються і видаються п'ятьом студентам. Яка ймовірність, що: а) усі студенти будуть писати різні варіанти, б) три студенти одержать однаковий варіант?

28. 8 підручників з хімії і 5 підручників по математиці на полиці стоять в довільному порядку. Визначити ймовірність того, що при цьому всі підручники з хімії і всі підручники по математиці будуть стояти поруч один з одним.

29. У змаганнях з легкої атлетики беруть участь 10 команд. У кожній по 5 стрибунів у висоту, по 4 стрибуна в довжину і по 3 бігуна на короткі дистанції. Знайти ймовірність, що перші місця у всіх видах змагань займуть спортсмени: а) з однієї команди, б) усі з різних команд.

30. Серед кандидатів у студентську раду факультету три першокурсники, чотири другокурсника і шість третьокурсників. З цього складу навмання вибирають п'ять чоловік. Знайти ймовірності наступних подій:

A={будуть обрані одні третьокурсники};

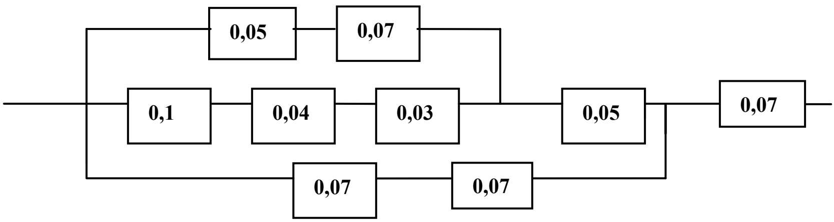
B={буде обраний наступний склад: два першокурсники, один другокурсник і два третьокурсники}.

3.2 Завдання 2

1. Електричний ланцюг складається з чотирьох послідовних з'єднань. Розрив ланцюга може відбутися в результаті виходу з ладу одного з них. Ймовірності виходу з ладу кожного з з'єднання відповідно дорівнюють: 0,05, 0,1, 0,15. Визначити ймовірність того, що розриву не відбудеться.

2. У дитячій групі вихователь відлучився до телефону. Ймовірності того, що протягом цього часу 5 граючих дітей не потребують уваги вихователя, дорівнюють p_1=0,7; p_2=0,8; p_3=0,9; p_4=0,85; p_5=0,75. Знайти ймовірність того, що за час відсутності вихователя жодна дитина не зажадає його уваги.

3. На малюнку показаний електричний ланцюг, усередині кожного вузла показана ймовірність виходу його з ладу. Паралельні ділянки працюють незалежно друг від друга. Визначити надійність ланцюга.



4. Прилад, що працює протягом 24 годин, складається з 2 однакових блоків, у кожному з яких по 3 вузла. Кожен вузол незалежно від інших може протягом цих 24 годин зіпсуватися. Поломка хоча б одного вузла приводить до відмови блоку, при цьому відбувається автоматичний перехід до іншого блоку. Ймовірність безвідмовної роботи першого вузла дорівнює 0,6, другого - 0,75, третього - 0,85. Знайти ймовірність безвідмовної роботи приладу в цілому.

5. На зупинці пасажир чекає трамвай, йому підходять три номери: 3, 7, 15. На цій зупинці зупиняються трамваї семи різних номерів, у тому числі і всі підходящі. Будемо припускати, що трамваї всіх номерів підходять до зупинці однаково часто. Знайти ймовірність того, що перший трамвай, що прийшов, буде потрібного пасажирові номера.

6. З умови задачі 5 знайти ймовірність, що другий трамвай, що прийшов до зупинки, буде потрібного пасажирові номера.

7. На змаганнях із плавання здійснюють заплив на 100 м п’ять спортсменів. Кожен з них може пропливти цю дистанцію менше ніж за 1 хвилину відповідно з ймовірностями: 0,5, 0,75, 0,8 і 0,9. Обчислити ймовірність того, що в результаті цього запливу до фінішу прийде менше ніж за 1 хвилину хоча б один спортсмен.

8. З умови задачі 7 знайти ймовірність, що в результаті цього запливу до фінішу прийдуть менше ніж за 1 хвилину перший і третій спортсмени.

9. На завод прийшла партія деталей з 500 одиниць. Контролером здійснюється вибірковий контроль. Непридатною партія вважається, якщо існує дві і більше бракованих деталі з 20 перевірених. Яка ймовірність того, що дана партія бути не прийнятою, якщо вона містить 25 несправних деталей.

10. Ймовірність виходу з ладу електричного приладу через те, що зіпсується вузол R, що входить у нього, дорівнює 0,6. Для підвищення надійності роботи в прилад паралельно підключили ще 3 вузли R, не взаємодіючих один з одним і першим вузлом. У даний момент працює один з вузлів, і як тільки він псується, включається інший. В скільки разів підвищилася надійність приладу після включення дублюючих ланцюгів?

11. Багатожильний провід скручений з 5 проводів, надійність яких на обрив дорівнює 90%. Яка надійність проводу?

12. Телефон має три виходи на різні АТС. Ймовірності відмовлення роботи кожної з АТС відповідно дорівнюють: 0,05; 0,02; 0,01. Крім того, рівноможливі випадки, що ви будете чи ні на своєму робочому місці. Визначити ймовірність, що у визначений час до вас можна додзвонитися по навмання обраній телефонній лінії.

13. Ви посадили квітку. Наскільки успішно вона зійде залежить від трьох факторів, а саме: 1) чи гарне насіння ви купили (ймовірність купити насіння негідне для посадки – 0,3); 2) наскільки удобрену землю ви підібрали для посадки (рівноможливо, як удобрену, так і не удобрену); 3) чи не забули ви його полити (забули з ймовірністю 0,1). Отже, посаджена квітка зійде якщо насіння буде придатними, ви підберете удобрену землю і поллєте. Знайти ймовірність, що квітка зійде.

14. Електричний ланцюг складається з п'яти елементів X_i (i=1,...5), що виходять з ладу незалежно друг від друга відповідно з ймовірностями 0,1; 0,3; 0,2; 0,2; 0,15. Розрив ланцюга може відбутися унаслідок виходу з ладу одночасно трьох елементів X_1, X_2, X_3 або двох елементів X_4 і X_5. Визначити ймовірність розриву електричного ланцюга.

15. З колоди карт (всього в колоді – 36 карт) виймається навмання 2 карти. Знайти ймовірність того, що серед них буде хоча б один валет.

16. Ймовірність застудитися в дощ людині, що не займається спортом складає 0,3, а людині, що займається спортом – 0,1. Яка ймовірність застудитися випадковій людині, якщо спортом займається 35% населення?

17. З партії виробів вибирають навмання один. Чи є він вищого сорту, якщо відомо, що 5% усієї продукції - брак, а 65% не бракованих виробів задовольняє вимогам вищого сорту.

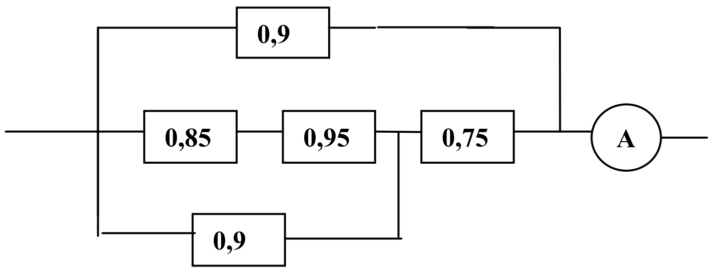
18. У телевізорі знаходиться 20 радіоламп трьох типів: 10 ламп першого типу, 6 ламп другого типу і 4 лампи третього типу. Ймовірність виходу з ладу протягом часу Т для кожної лампи першого типу дорівнює 0,003, для лампи другого типу - 0,002, для лампи третього типу – 0,001. Знайти ймовірність виходу з ладу телевізора в результаті виходу з ладу двох і більше ламп.

19. З умови задачі 18 знайти ймовірність виходу з ладу телевізора в результаті виходу з ладу хоча б однієї лампи.

20. У пологовому будинку №1 народилося за добу 10 малят, у будинку №2 – 8, а в будинку №3 – 12. Визначити ймовірність того, що хоча б в одному пологовому будинку в цю добу народилися всі хлопчики (по статистиці хлопчиків народжується 52%, а дівчинок 48%).

21. На заводі працюють 2 цехи, причому перший цех випускає 70% усієї продукції, а другий – 30%. У кожному з них працюють по 2 нових верстати, кожен з яких випускає 1% бракованих виробів і по 3 старих верстати, на яких браку – 5%. З партії всього заводу навмання узята одиниця продукції. Яка ймовірність, що вона бракована?

22. На малюнку показано електричний ланцюг, усередині кожного вузла його надійність. Надійність лампи А – 0,95. Яка ймовірність того, що лампа А буде горіти?



23. Три стрілки, для яких ймовірності влучення в мішень дорівнюють 0,75, 0,7 і 0,8, роблять по одному пострілу. Визначити ймовірність хоча б одного влучення в мішень.

24. З колоди карт (всього в колоді – 36 карт) виймається навмання 4 карти. Знайти ймовірність, що серед них хоча б дві дами.

25. Апаратура піддається контрольним іспитам з ймовірністю браку, що пропускається, 0,03. Партія, що залишилася, знову піддається контрольним іспитам з ймовірністю браку 0,05. Яка надійність перевірки апаратури після дворазових іспитів (ймовірність вибору придатного приладу)?

26. В електричний ланцюг послідовно включені три прилади, ймовірність виходу з ладу яких відповідно дорівнюють: 0,2, 0,25, 0,15; а до них паралельно підключений ще один прилад, ймовірність виходу з ладу якого дорівнює 0,3. Визначити надійність роботи ланцюга.

27. Ймовірність того, що лампа не перегорить протягом 100 годин, дорівнює 0,8; а ймовірність того, що вона не перегорить протягом 300 годин - 0,6. Лампа не перегоріла протягом 100 годин, яка ймовірність, що вона не перегорить наступні 200 годин?

28. Два стрільці ведуть стрілянину по мішені. Ймовірність влучення в мішень при одиночному пострілі для кожного з них відповідно дорівнює 0,9 та 0,8. Кожний з них зробив по два постріли. Знайти ймовірність рівно двох влучень у мішень.

29. За прогнозом метеостанції №1 завтра буде дощ, а за прогнозом метеостанції №2 завтра дощу не буде. По статистиці метеостанція №1 помиляється з ймовірністю 0,3, а метеостанція №2 – 0,1. Знайти ймовірність, що завтра буде дощ.

30. У бібліотеці підручників по вищій математиці 70% від кількості студентів, а підручників по фізиці – 85%. У бібліотеку прийшов студент, яка ймовірність, що йому дістануться обидва підручники?

3.3 Завдання 3

1. Передаються два сигнали А і В відповідно з ймовірностями 0,48 і 0,52. Через перешкоди 1/6 сигналів А змінюються і приймається як сигнал В, а 1/8 частина переданих сигналів В приймається як А сигнал. Знайти ймовірність того, що на приймальному пункті з'явиться сигнал А.

2. З умови задачі 1 знайти ймовірність того, що був переданий сигнал А, якщо відомо, що прийнято сигнал В.

3. На підприємствах: «Зоря», «Схід», «Струмок» випускається однакова продукція, причому 42% продукції, що випускається на всіх підприємствах, виробляється на «Зорі», 33% - на «Сході», 25% - на «Струмку». На цих підприємствах браковані вироби зустрічаються з ймовірностями відповідно: 0,02, 0,04, 0,03. Із продукції цих підприємств узятий навмання виріб. Яка ймовірність, що він не бракований?

4. З умови задачі 3 узятий навмання виріб виявився бракованим, знайти ймовірність того, що цей брак випущений підприємством «Зоря»?

5. На іспиті усього 30 квитків, кожний з яких містить по два питання без повторів. Студент підготувався і може відповісти тільки на 45 питань. Визначити ймовірність того, що іспит буде зданий, якщо для цього досить відповісти на два питання з одного квитка або на одне питання з одного квитка і на зазначене питання з іншого.

6. З умови задачі 5 у кожному квитку знаходиться по три питання. Визначити ймовірність того, що іспит буде зданий, якщо для цього досить відповісти на два питання з квитка.

7. На заводі 95% апаратури витримує комплексні іспити, що дає 97% відповідності стандартові (тобто, якщо апаратура витримала іспит, то вона відповідає стандарту з ймовірністю 97%). Яка ймовірність того, що виріб задовольнить стандартові, якщо іспити проводяться двічі?

8. З повного набору кісток доміно навмання беруться дві кістки. Визначити ймовірність того, що другу кісту можна приставити до першої, а також ймовірність того, що третю кістку можна прикласти до перших двох?

9. Прилад складається з двох дублюючих один одного вузлів і може працювати в одному з двох режимів: нормальному і несприятливому. Нормальний режим спостерігається в 60% випадків експлуатації приладу, несприятливий - у 40% випадків. Надійність кожного з вузлів у нормальному режимі дорівнює 0,8, у несприятливому - 0,5. При виході з ладу вузла відбувається автоматичне і безвідмовне переключення на дублера. Знайти ймовірність безвідмовної роботи приладу.

10. З умови задачі 9 знайти ймовірність того, що прилад працював у нормальному режимі, якщо відомо, що він вийшов з ладу.

11. На фабриці відбулася зупинка роботи цеху, існує чотири гіпотези цієї зупинки: H_1, H_2, H_3, H_4. За статистикою, ймовірності цих гіпотез відповідно дорівнюють: 0,3; 0,4; 0,2; 0,1. При ретельному огляді цеху з'ясовано, що відбулася подія А={згорів рубильник}. Умовні ймовірності події А при гіпотезах H_1, H_2, H_3, H_4 відповідно до тієї ж статистики дорівнюють: $P(A/H_1)=0,9$; $P(A/H_2)=0$; $P(A/H_3)=0,2$; $P(A/H_4)=0,3$. Знайти апостеріорні ймовірності гіпотез.

12. На радіостанції можуть передаватися повідомлення по одному з каналів зв'язку, що знаходяться в різних станах: 5 каналів у відмінному стані, 4 - у гарному, 3 - у поганому. Ймовірність передачі повідомлення для різного виду каналів дорівнює відповідно 0,5; 0,3; 0,2. Знайти ймовірність того, що отримане повідомлення правильне.

13. З умови задачі 12 знайти ймовірність того, що повідомлення було передано по поганому каналу зв'язку, якщо відомо, що воно прийнято правильно.

14. На машинобудівний завод поставлена партія з 5000 підшипників чотирьох категорій. Перша категорія складає 60%, друга 25%, третя 10%, четверта 5% від загальної кількості. Ймовірність того, що підшипники різних категорій будуть мати заданий термін служби, складає відповідно: 0,85; 0,65; 0,45; 0,35. Знайти ймовірність того, що обраний навмання підшипник буде мати заданий термін служби.

15. Випробується прилад, що складається з двох вузлів 1 і 2. Надійності вузлів 1 і 2 рівні 0,8 і 0,9 відповідно. Вузли відмовляють незалежно друг від друга. Після закінчення часу t з'ясувалося, що прилад несправний. Знайти з урахуванням цього ймовірність того, що несправний тільки перший вузол, якщо для відмови приладу достатньо щоб відмовив хоча б один вузол..

16. З умови задачі 15 знайти ймовірність того, що несправні обидва вузли.

17. На змаганнях три стрілки незалежно друг від друга стріляють по однієї і тій же мішені, роблячи кожний по одному пострілу. Ймовірність влучення в мішень для кожного з них відповідно рівні: 0,6; 0,4; 0,45. Після стрілянини в мішені виявлена одна пробоїна. Знайти ймовірність, що вона належить першому стрільцеві.

18. У дитячому магазині продається 5 колясок вітчизняного виробництва, 3 німецьких і 10 турецьких. На всі коляски магазин дає 1 місяць гарантії. По статистиці вітчизняні коляски мають браку 5%, німецькі – 1%, турецькі – 10%. Покупець протягом місяця знайшов брак і здав назад коляску в магазин. Яка ймовірність того, що ця коляска була виготовлена в Німеччині?

19. Телеграфне повідомлення складається із сигналів крапка і тире. Статистичні властивості перешкод такі, що спотворюються в середньому 2/5 повідомлень крапка і 1/3 повідомлень тире. Відомо, що серед переданих сигналів крапки і тире зустрічаються у відношенні 5:3. Визначити ймовірність того, що прийнято сигнал, якщо: а) прийнятий сигнал крапка, б) прийнятий сигнал тире.

20. Продукція одного виду виробляється на чотирьох верстатах. На зборку надходять 35% з першого верстата, 15% - із другого, 30% - із третього, 20% - з четвертого. Перший верстат допускає 0,1% нестандартних деталей, другий - 0,2% , третій - 0,3%, четвертий - 0,15%. Знайти ймовірність того, що на зборку надійде нестандартна деталь і ймовірність того, що нестандартна деталь виготовлена першим автоматом.

21. Серед двох п'ятих класів: «А» і «Б», проводиться контроль знань. У них відповідно відмінників: 2 і 4, учнів, що навчаються добре: 16 і 18; трієчників: 12 і 14 чоловік. Відмінники можуть одержати тільки відмінні оцінки. Хорошисти можуть одержати з рівною ймовірністю гарні і відмінні оцінки. Трієчники можуть одержати з рівною ймовірністю гарні, задовільні і незадовільні оцінки. Навмання вибрано по одній роботі з кожного класу. Знайти ймовірність того, що вони обидві написані на гарну або відмінну оцінку.

22. За умови задачі 21 навмання перевірені роботи обидві написана на добре, знайти ймовірність, того що вони написані учнями, які навчаються добре.

23. Для безвідмовної роботи приладу необхідно, щоб усі його три вузли були справні. Надійність цих вузлів залежить від напруги, що подається. Якщо напруга подається без стрибків, то надійність вузлів відповідно дорівнює: 0,9; 0,95 та 0,8; якщо зі стрибками, то: 0,7; 0,8; 0,6. Напруга може подаватися зі стрибками з ймовірністю 0,2. Знайти повну надійність приладу.

24. Відомо, що 96% продукції, що випускається, задовольняє стандартові. Спрощена схема контролю визнає придатною стандартну продукцію з ймовірністю 0,98, а нестандартну з ймовірністю 0,05. Визначити ймовірність того, що виріб, що пройшов спрощений контроль, задовольняє стандартові.

25. З партії в 7000 деталей узято навмання 200 штук. Яка ймовірність того, що всі деталі справні, якщо відомо, що в партії рівноможливо від 0 до 2 бракованих деталей.

26. Стрічка, поставлена в касету, може належати до однієї з трьох партій з ймовірностями $p_1 = 0,25$; $p_2 = 0,5$; $p_3 = 0,25$. Ймовірність того, що стрічка не порветься визначене число годин, для цих партій дорівнює відповідно 0,1; 0,2; 0,4. Знайти ймовірність того, що касета проробить задане число годин.

27. Відправлено деяке повідомлення: або 11 або 10, або 01 або 00 (рівноможливо). Ймовірність прийняти 1, якщо відправлено 1, дорівнює 0,7, а для нуля відповідно - 0,8. Отримано 01. Яка ймовірність, що було відправлено 11?

28. Завод виготовляє вироби, кожен з яких з ймовірністю 0,05 може мати дефект. У цеху працюють три контролери, виріб оглядається тільки одним з них з однаковою ймовірністю. Ймовірність виявлення дефекту, якщо він присутній, для 1-го контролера дорівнює 0,9; для другого – 0,8; для третього – 0,7. Якщо виріб не був забракований у цеху, то він попадає на ОТК заводу, де дефект, якщо він присутній, виявляється з ймовірністю 0,95. Визначити ймовірності того, що виріб буде забраковано.

29. За умови задачі 28 виріб забракували, знайти ймовірність того, що виріб був забракований на ОТК.

30. Маємо три однакових шухляди з кулями. У першому 4 білих і 3 чорних кулі, у другому – 3 білих і 5 чорних, у третьому – 6 білих і 2 чорних. З одної, навмання обраної, шухляди витягли кулю, яка виявилася білою. Знайти ймовірність того, що це була третя шухляда.

3.4 Завдання 4

Ймовірність виготовлення на автоматичному верстаті стандартної деталі дорівнює 0,9. Знайти ймовірність, що з n навмання узятих деталей виявиться m стандартних:

1. а) n=3, m=1; б) n=120, m=41; в) n=125, 98<=m<=117.

2. а) n=4, m=1; б) n=118, m=25; в) n=97, 45<=m<=60.

3. а) n=5, m=1; б) n=96, m=31; в) n=87, 25<=m<=50.

4. а) n=6, m=1; б) n=110, m=21; в) n=136, 100<=m<=110.

5. а) n=7, m=1; б) n=92, m=29; в) n=119, 92<=m<=105.

6. а) n=3, m=2; б) n=83, m=67; в) n=79, 36<=m<=52.

7. а) n=4, m=2; б) n=99, m=57; в) n=125, 75<=m<=100.

8. а) n=5, m=2; б) n=132, m=48; в) n=150, 112<=m<=120.

9. а) n=6, m=2; б) n=115, m=36; в) n=137, 25<=m<=65.

10. а) n=7, m=2; б) n=145, m=54; в) n=56, 27<=m<=38.

11. а) n=4, m=3; б) n=75, m=23; в) n=78, 42<=m<=51.

12. а) n=5, m=3; б) n=84, m=65; в) n=98, 28<=m<=40.

13. а) n=6, m=3; б) n=73, m=59; в) n=73, 30<=m<=45.

14. а) n=7, m=3; б) n=145, m=67; в) n=84, 53<=m<=71.

15. а) n=5, m=4; б) n=73, m=36; в) n=69, 31<=m<=44.

16. а) n=6, m=4; б) n=86, m=29; в) n=77, 33<=m<=55.

17. а) n=7, m=4; б) n=131, m=63; в) n=68, 27<=m<=38.

18. а) n=6, m=5;   б) n=122, m=29;   в) n=100, 74<=m<=93.

19. а) n=7, m=5;   б) n=94, m=28;   в) n=120, 95<=m<=99.

20. а) n=4, m=2   б) n=97, m=46;   в) n=45, 27<=m<=33.

21. а) n=5, m=3;   б) n=127, m=47;   в) n=82, 61<=m<=70.

22. а) n=6, m=4;   б) n=69, m=21;   в) n=135, 75<=m<=116.

23. а) n=7, m=1;   б) n=75, m=45;   в) n=128, 45<=m<=71.

24. а) n=3, m=2;   б) n=78, m=59;   в) n=66, 27<=m<=45.

25. а) n=4, m=3;   б) n=116, m=32;   в) n=136, 67<=m<=75.

26. а) n=5, m=1;   б) n=92, m=43;   в) n=96, 48<=m<=63.

27. а) n=6, m=3;   б) n=69, m=22;   в) n=134, 84<=m<=112.

28. а) n=5, m=2;   б) n=77, m=25;   в) n=125, 78<=m<=120.

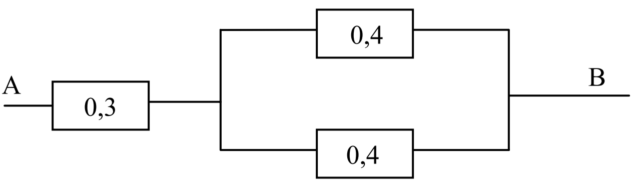
29. а) n=4, m=1;   б) n=89, m=75;   в) n=108, 87<=m<=95.

30. а) n=6, m=2;   б) n=117, m=65;   в) n=87, 68<=m<=72.

3.5 Завдання 5

1. Автомобіль повинний проїхати по вулиці, на якій установлені чотири світлофори, що дають незалежно друг від друга зелений сигнал протягом 1 хв, жовтий - 0,5 хв, червоний - 1 хв. Написати закон розподілу числа зупинок автомобіля на цій вулиці. Знайти математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.

2. На малюнку показана схема електричного ланцюга АВ із трьома вузлами. Ймовірності відмовлення кожного вузла, при однократному включенні даного ланцюга, записані усередині вузлів. Визначити середнє число включень ланцюга АВ до першого відмовлення. Скласти закон розподілу цієї випадкової величини.



3. Закони розподілу двох дискретних випадкових величин X і Y задані відповідно таблицями:

X	0	1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,3	0,25	0,15

Y	2	4	6
P	0,2	0,3	0,5

Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини Z=2X-3Y, M(Z), D(Z).

4. У партії з 100 радіоламп знаходиться 15 бракованих. Випадковим образом з цієї партії узято 5 радіоламп. Знайти закон розподілу випадкової величини X - число бракованих радіоламп із цих обраних. Знайти математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.

5. Один раз кинуті 2 однакові гральні кістки. Випадкова величина S - сума цифр на верхніх гранях гральних кісток. Обчислити математичне сподівання значення суми очок, що випали, і моду.

6. В дворі грають двоє дітей, одному 1 рік, другому – 2. Ймовірність, що в плині 15 хвилин не упаде дитина, якій 1 рік, - 0,3, якому 2 роки – 0,8. Позначимо за випадкову величину X - число дітей, що впали за останні 15 хвилин. Знайти M[X], D[X].

7. Один раз кинуті дві однакові гральні кістки. Випадкова величина X приймає значення 1, якщо хоча б на одній гральній кістці випаде цифра 1; приймає значення 2, якщо на обох випала 6, приймає значення 3, якщо не випали ні 1, ні 6, але хоча б на одній гральній кістці випала цифра 5 і приймає значення 4 в інших випадках. Знайти закон розподілу X, її функцію розподілу і M[X].

8. У партії з 100 однакових приладів 10 у неробочому стані. Проводяться послідовні незалежні іспити п'яти приладів. Кожен наступний прилад випробується тільки в тому випадку, якщо попередній виявився в робочому стані. Побудувати ряд розподілу числа випробовуваних приладів, визначити M[X] і Д[X].

9. Закон розподілу випадкової величини X заданий таблицею:

X	15	15,5	16	16,5
P	0,1	0,25	0,45	0,2

Знайти M[X], D[X], F[X], побудувати графік F[X].

10. Команда з двох стрільців веде стрілянину по мішені. Ймовірність влучення в мішень першого стрільця дорівнює 0,6, другого – 0,8, при цьому команда одержує 5 очок, якщо в мішень потрапили обоє стрілка і 2 очка, якщо потрапив хоча б один стрілець. Визначити закон розподілу числа очок, отриманих командою за 3 залпи, знайти математичне сподівання і дисперсію числа набраних очок.

11. Ймовірність того, що деталь, виготовлена на першому верстаті, виявиться без дефектів, дорівнює 0,9, а на другому – 0,8. Робітник перевіряє спочатку деталь з першого верстата і переходить на другий верстат, потім знову на перший і т.д. до виявлення деталі з дефектом. Скласти закон розподілу кількості перевірених деталей до виявлення деталі з дефектом (включно). Знайти математичне сподівання цієї кількості.

12. Побудувати функцію розподілу випадкової величини X – часу виходу з ладу приладу при перевантаженні, по наступним даним (перевантаження почалися в 10.00):

X	10.00	10.01	10.02	10.03	10.04	10.05	10.06	10.07	10.08	10.09	10.10
P	0,01	0,45	0,28	0,1	0,07	0,04	0,02	0,015	0,009	0,005	0,001

Знайти M[X], D[X], і σ [X].

13. Вважаючи, що маса тіла з однаковою ймовірністю може дорівнювати будь-якому цілому числу грамів від 1 до 10, визначити, при якій із трьох систем важків: а) 1, 2, 2, 5, 10; б) 1, 2, 3, 4, 10; в) 1, 2, 5, 10 середнє число необхідних для зважування гир буде найменшим, якщо при зважуванні дозволяється гирі ставити тільки на одну чашку, а підбор гир при зважуванні здійснюється так, щоб використовувати якнайменше число гир.

14. Закон розподілу випадкової величини X – числа студентів у групі заданий таблицею:

X	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P	0,05	0,07	0,09	0,1	0,12	0,15	0,14	0,11	0,07	0,06	0,04

Знайти математичне сподівання і дисперсію цієї величини.

15. На елеваторі проводиться помел зерна, для контролю періодично проводиться перевірка якості помелу, тобто відповідність вищому сортові. Для цього беруть підряд мішки з борошном (не більш 4) і при виявленні мішка з борошном, що не відповідає вищому сортові, припиняють роботу елеватора для регулювання. Вважаючи, що ймовірність помелу вищого сорту дорівнює 0,8, скласти теоретичний розподіл кількості перевірок, зроблених при одній серії іспитів. Знайти математичне сподівання цієї випадкової величини.

16. Визначити закон розподілу числа очок, вибитих стрільцем при 5 пострілах, якщо ймовірність улучення при одному пострілі дорівнює 0,4, за кожне влучення стрілок одержує 2 очки, а за кожен промах у нього віднімається по 1 очку. Знайти математичне сподівання числа вибитих очок.

17. Випадкова величина х має розподіл:

X	1	5	12	15	20
P	0,2	0,1	0,15	0,25	0,3

Знайти F(x), M[X] і D[X]; побудувати графік F(x).

18. Два приятелі склали наступні правила гри в кістки: проводиться кожним гравцем не більш 4 кидків по дві гральні кістки, якщо випадає дві шістки або дві п'ятірки, то гра закінчується і той, що кидав одержує 10 гривень, інакше він за кожен кидок платить по 1 гривні супротивнику. Скласти закон розподілу і знайти математичне сподівання сумарного виграшу.

19. Ймовірність того, що за день у пологовому будинку №5 народиться більш 20 дітей, дорівнює – 0,2. Нехай X - кількість днів з тижня, протягом кожного з яких у пологовому будинку №5 народилося більш 20 дітей. Маючи на увазі, що випадкова величина X підкоряється біномному законові розподілу ймовірностей, визначити її математичне сподівання і дисперсію.

20. У хімчистці затверджують, що 90% плям на вовняних речах відмиваються. Ви здали в хімчистку 4 вовняні речі з плямами.

Виразити у виді таблиці закон розподілу кількості ваших вовняних речей, що після хімчистки виявилися без плям. Знайти математичне сподівання і дисперсію. Перевірити справедливість теорії про математичне сподівання і дисперсію для біномного закону.

21. На швейній фабриці виготовляється 80% виробів першого сорту і 20% виробів другого сорту. Обрані випадковим чином 6 виробів для перевірки якості. Побудувати ряд і полігон розподілу випадкового числа х другосортних виробів, що виявилися у вибірці, знайти математичне сподівання і дисперсію.

22. Для кульок у підшипниках, що випускаються на автоматичному верстаті, був установлений наступний теоретичний розподіл їх по діаметру:

Діаметр, мм	5,48	5,49	5,5	5,51	5,52
Ймовірність	0,04	0,1	0,35	0,3	0,21

Знайти математичне сподівання і дисперсію діаметра кульок.

23. Серед 10 годинників, що потрапили у ремонт, 6 штук мають потребу в загальному чищенні механізму. Годинники не розсортовані по виду ремонту. Майстер, бажаючи знайти годинник, що потребує загальне чищення механізму, розглядає їх по черзі і, знайшовши такий годинник, припиняє подальший огляд, Скласти закон розподілу випадкової величини X - кількості переглянутих годинників і знайти математичне сподівання цієї випадкової величини.

24. 21 числа кожного місяця вам нараховують зарплату в розмірі 500 гривень, причому, ви можете взяти її з 21 по 25 число, але за кожний прострочений день з вас знімається 1%. Позначимо за випадкову величину X – кількість грошей, отриманих вами. Скласти закон розподілу цієї випадкової величини, знайти математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення.

25. У лотереї на кожні 200 квитків приходиться 15 виграшів. Кількість і розмір виграшів приведені в таблиці:

Розмір виграшу, грн.	20	5	1
Кількість виграшів	1	4	10

Скласти закон розподілу випадкової величини X - розміру виграшу в лотереї, що приходиться на 1 квиток. Визначити математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.

26. Верстат випускає виріб, що не відповідне ДСТУ з ймовірністю 0,9. Ремонт верстата здійснюється після появи першого ж виробу, що не відповідає ДСТУ. Знайти середнє число виробів, виготовлених між двома ремонтами верстату.

27. Ймовірність прийому позивного сигналу однієї радіостанції іншою радіостанцією дорівнює 0,3 при кожній посилці. Позивні подаються кожні 3 секунди, доки не буде отриманий відповідний сигнал, прийнятий вірогідно. Загальний час проходження позивного і відповідного сигналів дорівнює 10 с. Знайти середнє число поданих сигналів до встановлення двостороннього зв'язку.

28. Закони розподілу двох дискретних випадкових величин X и Y задано відповідно таблицями:

X	0	1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,3	0,25	0,15

Y	2	4	6
P	0,2	0,3	0,5

Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини $Z = XY$. Використовуючи закони розподілу X, Y та Z, перевірити теореми про математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин.

29. Берегова гармата обстрілює корабель, що віддаляється. Ймовірність вцілити при першому пострілі дорівнює 0,8, при кожному наступному ймовірність зменшується удвічі. Записати закон розподілу та знайти математичне сподівання для кожного з двох випадків: а) зроблено 4 пострілу; б) проводиться нескінчена кількість пострілів.

30. Чотири рази підкинуто монету. Записати закон розподілу випадкової величини X – модуль різниці між кількістю появ герба і кількістю появ цифри. Знайти математичне сподівання та середньо квадратичне відхилення.

3.6 Завдання 6

У задачах 1 - 15 випадкова величина задана інтегральною функцією розподілу. Обчислити невідомий параметр а. Знайти: а) щільність розподілу; б) M[X]; D[X]; P($\alpha < X < \beta$); в) побудувати графіки функцій *F(x)* та *f(x)*.

1. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ x^3/a, & 0<x<3; \\ 1, & x>2; \end{cases}$ $\alpha = 1, \quad \beta = 2,5;$

2. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a\sqrt{x}, & 0<x<16; \\ 1, & x>16; \end{cases}$ $\alpha = 1, \quad \beta = 10;$

3. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<1; \\ a\ell n(x^2), & 1<x<e^3; \\ 1, & x>e^3; \end{cases}$ $\alpha = e, \quad \beta = e^2;$

4. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-15; \\ 0,2x+a, & -15<x<-10; \\ 1, & x>-10; \end{cases}$ $\alpha = -14, \quad \beta = -12;$

5. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ ax^2/5, & 0<x<5; \\ 1, & x>5; \end{cases}$ $\alpha = 1, \quad \beta = 4;$

6. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \sqrt{x^3}/a, & 0<x<4; \\ 1, & x>4; \end{cases}$ $\alpha = 1, \quad \beta = 4;$

7. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<\pi/2; \\ a\cos(x), & \pi/2<x<\pi; \\ 1, & x>\pi; \end{cases}$ $\quad \alpha=2\pi/3, \quad \beta=5\pi/6;$

8. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ tg(ax), & 0<x<\pi; \\ 1, & x>\pi; \end{cases}$ $\quad \alpha=2\pi/3, \quad \beta=\pi;$

9. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0{,}5; \\ ax-1, & 0{,}5<x<1; \\ 1, & x>1; \end{cases}$ $\quad \alpha=0{,}7, \quad \beta=0{,}8;$

10. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-\pi/2; \\ a\cos(x), & -\pi/2<x<0; \\ 1, & x>0; \end{cases}$ $\quad \alpha=-\pi/3, \quad \beta=-\pi/6;$

11. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<1; \\ -(ax^2+5)/25, & 1<x<2; \\ 1, & x>2; \end{cases}$ $\quad \alpha=1{,}5, \quad \beta=2;$

12. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a\sin(x), & 0<x<\pi/2; \\ 1, & x>\pi/2; \end{cases}$ $\quad \alpha=\pi/4, \quad \beta=\pi/3;$

13. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<2; \\ (x^2-a)/5, & 2<x<3; \\ 1, & x>3; \end{cases}$ $\quad \alpha=2{,}5, \quad \beta=2{,}75;$

14. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ a\sqrt[3]{x}, & 0<x<27; \\ 1, & x>2; \end{cases}$ $\quad \alpha=1, \quad \beta=8;$

15. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<1; \\ a\ell g(x), & 1<x<1000; \\ 1, & x>1000; \end{cases}$ $\alpha=10,$ $\beta=100$.

У задачах 16 - 30 задана щільність розподілу *f(x)* випадкової величини *X*. Обчислити математичне сподівання, дисперсію, функцію розподілу *F(x)*, значення невідомого параметра *a* там, де це необхідно, побудувати графіки функцій *f(x)* і *F(x)*.

16. $f(x)=\begin{cases} ax+2, & x\in[0;2] \\ 0, & x\notin[0;2] \end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases} ax^2, & x\in[0;3] \\ 0, & x\notin[0;3] \end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases} a/x, & x\in[1;e^2] \\ 0, & x\notin[1;e^2] \end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases} a\cos x-\pi/2, & x\in[0;\pi/2] \\ 0, & x\notin[0;\pi/2] \end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases} e^x+ax, & x\in[-3;0] \\ 0, & x\notin[-3;0] \end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases} a\ell n(x)/x, & x\in[1;e^3] \\ 0, & x\notin[1;e^3] \end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases} -e^{\cos x-1}\sin x+a, & x\in[-\pi/2;0] \\ 0, & x\notin[-\pi/2;0] \end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2\cdot 3^x}{3\cdot \ell n3}-a, & x\in[1;2] \\ 0, & x\notin[1;2] \end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases} ax-5, & x\in[0;1] \\ 0, & x\notin[0;1] \end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a\cdot\sin x}{\cos^3 x}, & x\in[0;\pi/4] \\ 0, & x\notin[0;\pi/4] \end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases} ax\sin x, & x\in[0;\pi/2] \\ 0, & x\notin[0;\pi/2] \end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{x^2+1}, & x\in[0;2] \\ 0, & x\notin[0;2] \end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases} a\cdot x\cdot arctgx, & x\in[0;\pi/4] \\ 0, & x\notin[0;\pi/4] \end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases} a\sqrt[3]{x}-1, & x\in[0;8] \\ 0, & x\notin[0;8] \end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a\sqrt{\ell n(x-1)}}{x-1}, & x\in\left[2;1+\sqrt{e^3}\right] \\ 0, & x\notin\left[2;1+\sqrt{e^3}\right] \end{cases}$

3.7 Завдання 7

1. Вимірювальний прилад має систематичну помилку 5 м і серединну помилку 50 м. Яка ймовірність того, що помилка виміру не перевершить по абсолютній величині 5 м?

2. При зважуванні виходить помилка, що підкоряється нормальному законові з σ = 20г. Знайти ймовірність того, що зважування буде зроблено з помилкою, що не перевершує 10 г.

3. Систематична помилка утримання висоти літаком +20 м, а випадкова помилка характеризується серединним відхиленням, рівним 50 м. Для польоту літака відведений коридор висотою 100 м. Яка ймовірність того, що літак буде летіти нижче, вище, усередині коридору, якщо літакові задана висота, що відповідає середині коридору?

4. Автомат штампує деталі. Контролюється довжина деталі X, яка розподілена нормально з математичним сподіванням 30 мм. Фактична довжина виготовлених деталей не менша 16 мм і не більша 44 мм. Знайти ймовірність того, що довжина навмання узятої деталі не більш 36 мм.

5. Автомат виготовляє підшипники, що вважаються придатними, якщо відхилення X від проектного розміру по модулю не перевершує 0,77 мм. Яке найбільш ймовірне число придатних підшипників з 100, якщо X розподілено нормально з $\sigma = 0{,}4$ мм?

6. Стрілянина ведеться з точки 0 уздовж прямої OX. Середня дальність польоту снаряда дорівнює m. Припускаючи, що дальність польоту X розподілена за нормальним законом із середньо квадратичним відхиленням $\sigma = 100$, знайти який відсоток снарядів, що випускаються, дає переліт від 20 до 50 м?

7. У радіоапаратурі за рік роботи відбувається заміна 10 ламп. Потрібно підрахувати ймовірність виходу з ладу апаратури через вихід з ладу лампи за 10, 100, 1000 годин безперервної роботи, якщо виконані умови розподілу Пуассона.

8. Спостерігається випадкова величина X, яка розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням m і середньо квадратичним відхиленням σ. Потрібно приблизно замінити нормальний закон рівномірним на інтервалі (α, β); границі α і β підібрати так, щоб зберегти незмінними основні характеристики випадкової величини X: математичне сподівання і дисперсію.

9. Коректура в 500 сторінок містить 500 помилок. Знайти ймовірність того, що на одній сторінці не менш трьох помилок.

10. Знайти ймовірність того, що серед 200 виробів виявиться більш трьох бракованих, якщо в середньому браковані вироби складають 1%.

11. Ймовірність появи деякої події в кожному з вісімнадцяти незалежних експериментів дорівнює 0,2. Визначити ймовірність появи цієї події принаймні три рази.

12. За розглянутий період часу середнє число помилкових з'єднань на одного телефонного абонента дорівнює восьми. Яка ймовірність того, що для даного абонента число помилкових з'єднань не більше чотирьох?

13. Ймовірність помилки у роботі телефонної станції при кожному виклику дорівнює 0,03. Надійшло 100 викликів. Визначити ймовірність більш двох збоїв.

14. При середній масі деякого виробу 8,4 кг знайдено, що відхилення, за абсолютним значенням не переважаюче 50 г, зустрічається в середньому три рази на кожні 100 виробів. Допускається, що маса виробів розподілена по нормальному закону. Визначити її середньо квадратичне відхилення.

15. Випадкова величина розподілена на інтервалі (a, b). Знайти ймовірність того, що в результаті експерименту вона відхилиться від математичного сподівання більше, ніж на $2\sigma(x)$.

16. Випадкова величина T - час роботи радіолампи - має показниковий розподіл. Визначити ймовірність того, що час роботи лампи буде не менш 600 годин, якщо середній час роботи лампи 400 годин.

17. Шкала підоймових ваг, встановлених у лабораторії, має ціну розподілу 1 г. При вимірі маси хімічних компонентів суміші відлік робиться з точністю до цілого розподілу з округленням у найближчу сторону. Яка ймовірність, що абсолютна помилка визначення маси не перевищить середньо квадратичне відхилення можливих помилок визначення маси?

18. За умови задачі 17 знайти ймовірність того, що помилка визначення маси укладена між значеннями $\sigma(x)$ і $2\sigma(x)$.

19. Час чекання біля бензоколонки автозаправної станції є випадковою величиною X, розподіленої по показниковому закону із середнім часом чекання, рівним t_0. Знайти ймовірність події

$$A=\{t_0/2 \le X \le 3t_0/2\}.$$

20. За умови задачі 19 знайти ймовірність події $B=\{X \ge 2t_0\}$.

21. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням 2,2 і середньо квадратичним відхиленням 0,5. Яка ймовірність, що при першому іспиті випадкова величина виявиться у відрізку [3,4] а при другому - у відрізку [1,2]?

22. Обчислити ймовірність того, що випадкова величина X, яка розподілена за нормальним законом розподілу, при трьох іспитах хоча б один раз виявиться в інтервалі (1,2), якщо математичне сподівання і середньо квадратичне відхилення її відповідно дорівнюють 1,5 і 1,2.

23. Десять освітлювальних лампочок для ялинки включені в ланцюг послідовно. Ймовірність для будь-якої лампочки перегоріти при підвищенні напруги в мережі дорівнює 0,1. Визначити ймовірність розриву ланцюга при підвищенні напруги в мережі.

24. Коректура в 500 сторінок містить 1000 помилок. Вважаючи застосовним закон Пуассона, знайти найбільш ймовірне число помилок на одній сторінці тексту й ймовірність цього числа.

25. Вимірювальний прилад має середньо квадратичну помилку 40 м, систематичні помилки відсутні. Скільки необхідно зробити вимірів, щоб з ймовірністю більш 0,9 помилка хоча б одного з них не перевершували по абсолютній величині 7,5 м?

26. Виріб вважається вищої якості, якщо відхилення його розміру від номіналу не перевершує по абсолютній величині 3,45 мм. Випадкове відхилення розміру виробу від номіналу підкоряється нормальному законові із середньо квадратичним відхиленням, рівним 3 мм, а систематичні відхилення відсутні. Визначити середнє число виробів вищої якості, якщо виготовлено чотири вироби.

27. Якої ширини повинне бути поле допуску, щоб з ймовірністю не більш 0,0027 вийшла деталь з розміром поза полем допуску, якщо випадкові відхилення розміру від середини поля допуску підлеглі законові нормального розподілу з параметрами $m = 0; \quad \sigma = 5мк$?

28. Який відсоток конденсаторів з числа відібраних ВТК із розкидом 20%, що підкоряються нормальному законові розподілу величин, буде мати відхилення від номіналу в межах від 0 до 1 %?

29. Допуски на деталі для визначення ґатунку, що знаходяться у одній партії, складають 2; 5; 10; 20%. Вважаємо, що розподіл параметрів деталей підкоряється законові Пуассона. Визначити відсоток змісту в партії деталей з різними допусками.

30. Передбачається, що діаметр валиків, виготовлених на автоматичному верстаті, є випадкова величина з нормальним розподілом. Параметри розподілу - математичне сподівання і дисперсія відповідно рівні 3,4 см і 0,0001. У яких границях відповідно до правила 3σ можна практично гарантувати діаметр валика?

3.8 Завдання 8

З генеральної сукупності зроблена вибірка з 15 об'єктів.

1) Скласти варіаційний ряд по даній вибірці.
2) Скласти статистичний розподіл.
3) Знайти емпіричну функцію розподілу й побудувати її графік.
4) Побудувати полігон і гістограму відносних частот.
5) Обчислити числові характеристики вибірки: вибіркову середню, оцінки для медіани й моди, вибіркову дисперсію, виправлене середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації.
6) На підставі гістограми відносних частот і по обчислених точечних оцінках характеристик варіаційного ряду зробити висновок про закон розподілу генеральної сукупності.

1. x: 2, 4, 3, 7, 5, 2, 5, 5, 4, 8, 3, 4.5, 7, 7.
2. x: 21, 34, 35, 24, 26, 26, 34, 29, 33, 29, 23, 34, 26, 26, 22.
3. x: 112, 125, 135,110,124,125,130,123,134, 125, 124, 131, 140, 111, 132.
4. x: 3, 3, 6, 9, 5, 7, 5, 7, 8, 3, 5, 7, 8, 6, 7.
5. x: 44, 54, 34, 43, 45, 56, 67, 23, 43, 56, 43, 54, 56, 56, 56.
6. x: 245, 246, 245, 241,244,250,246,231,246, 241, 242, 246, 244, 246, 252
7. x: 1, 3, 2, 4, 8, 2, 7, 7, 4, 6, 4, 4, 6, 4, 3.
8. x: 33, 34, 32, 33, 33, 32, 35, 34, 36, 31, 33, 32, 34, 32, 36.
9. x: 546, 536, 556,536,576,566,576,546,556, 546, 536, 536, 576, 516, 566.
10. x: 15, 11, 23, 45, 44, 23, 15, 22, 45, 33, 15, 22, 23, 30, 11.
11. x: 4, 4, 7, 7, 5, 8, 5, 5, 9, 8, 3, 4.9, 8, 8.
12. x: 11, 24, 25, 34, 16, 16, 24, 39, 23, 19, 13, 24, 16, 16, 12.
13. x: 412, 425, 435, 410, 424,425,430,423,434,425,424,431, 440, 411, 432
14. x: 2, 4, 5, 9, 5, 6, 5, 4, 8, 3, 5, 7, 5, 6, 7.
15. x: 66, 54, 64, 73, 54, 66, 66, 73, 77, 66, 43, 54, 57, 66, 64.
16. x: 145, 146, 145,141,144,150,146,131,146,141,142, 146, 144, 146, 152
17. x: 2, 6, 6, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 6, 5, 5, 6, 4, 9.
18. x: 13, 14, 12, 13, 13, 12, 15, 14, 16, 11, 13, 12, 14, 12, 16.
19. x: 246, 236, 256, 236, 276, 266,276,246,256,246,236,236,276, 216, 266
20. x: 25, 10, 20, 25, 30, 35, 15, 25, 30, 25, 15, 25, 30, 30, 40.
21. x: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 8, 7, 7.9, 8, 8.
22. x: 51, 54, 55, 54, 56, 56, 54, 59, 53, 59, 53, 54, 56, 56, 52.
23. x: 212, 225, 235, 210, 224, 225,230,223,234,225,224,231,240, 211, 232
24. x: 3, 3, 3, 1, 2, 3, 6, 4, 2, 3, 5, 3, 4, 2, 3.
25. x: 96, 74, 84, 84, 74, 96, 74, 84, 74, 84, 96, 74, 74, 84, 84.

26. x: 245, 246, 245, 243,244,245,246,245,246,241,242, 246, 244, 246, 243
27. x: 2, 4, 6, 8, 8, 8, 2, 4, 8, 6, б, 8, 6, 4, 8.
28. x: 15, 17, 17, 19, 21, 23, 19, 19, 19, 19, 15, 17, 21, 21, 19.
29. x: 740, 750, 730,720,760,760,740,730,740,750, 740, 750, 760, 730, 740
30. x: 1, 2, 8, 6.2, 6, 8, 8, 1, 2, 2, 6, 8, 8, 6.

3.9 Завдання 9

Кількісна ознака X генеральної сукупності розподілена нормально. З генеральної сукупності зроблена вибірка з n елементів. Знайдено вибіркове середнє $\overline{x}$ й вибіркове середньо квадратичне відхилення S. З надійністю γ знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного очікування a якщо: а) відомо середньо квадратичне відхилення σ, б) середньо квадратичне відхилення не відомо;

1. n=10, $\overline{x}$=5.5, S=2, σ=2,2, γ=0.95.
2. n=7, $\overline{x}$=14.2, S=3, σ=3,5, γ=0.9.
3. n=5, $\overline{x}$=23, S=5, σ=4, γ=0.95.
4. n=11, $\overline{x}$=15.5, S=1, σ=1,5, γ=0.9
5. n=9, $\overline{x}$=24.7, S=6, σ=5, γ=0.95
6. n=8, $\overline{x}$=34.5, S=0.5, σ=1, γ=0.9
7. n=6, $\overline{x}$=134, S=7, σ=5, γ=0.95
8. n=12, $\overline{x}$=3, S=0.5, σ=0.7, γ=0.9
9. n=13, $\overline{x}$=35, S=4, σ=4,5, γ=0.95
10. n=7, $\overline{x}$=44, S=12, σ=10, γ=0.9
11. n=8, $\overline{x}$=12.3, S=5, σ=5, γ=0.95
12. n=9, $\overline{x}$=17.4, S=3, σ=2,8, γ=0.9
13. n=10, $\overline{x}$=24, S=8, σ=8, γ=0.95
14. n=11, $\overline{x}$=90, S=7, σ=7.5, γ=0.9
15. n=12, $\overline{x}$=12, S=1, σ=1, γ=0.95
16. n=6, $\overline{x}$=134, S=11, σ=10, γ=0.9
17. n=7, $\overline{x}$=43.6, S=9, σ=8, γ=0.95
18. n=8, $\overline{x}$=75, S=12, σ=12, γ=0.9
19. n=10, $\overline{x}$=55, S=6, σ=6.5, γ=0.95
20. n=11, $\overline{x}$=42, S=5, σ=7, γ=0.95
21. n=9, $\overline{x}$=255, S=20, σ=18, γ=0.9
22. n=8, $\overline{x}$=4.8, S=0.8, σ=1, γ=0.9
23. n=10, $\overline{x}$=7, S=1, σ=2, γ=0.95
24. n=12, $\overline{x}$=67, S=8, σ=7, γ=0.9
25. n=11, $\overline{x}$=89, S=14, σ=12, γ=0.95
26. n=9, $\overline{x}$=37, S=5.4, σ=5, γ=0.9
27. n=7, $\overline{x}$=23, S=7, σ=7,2, γ=0.95
28. n=6, $\overline{x}$=80, S=13, σ=12, γ=0.9
29. n=8, $\overline{x}$=4.1, S=0.4, σ=0,5, γ=0.95
30. n=15, $\overline{x}$=120, S=21, σ=18, γ=0.9

3.10 Завдання 10

Використовуючи критерій Пірсона при рівні значимості α=0.05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, якщо з неї вилучена наступна вибірка:

1. 23, 45, 32, 24, 45, 25, 47, 41, 35, 33, 24, 46, 44, 34, 33, 36, 37, 24, 28, 30, 43, 33, 29, 37, 38, 35, 36, 27, 24, 29, 38, 36, 41, 40, 37, 38, 41, 38, 36, 32, 25, 29, 36, 47, 36, 33, 35, 27, 26, 38, 41, 45, 47, 35, 27, 46, 41, 40, 37, 38, 33, 35, 39, 22, 23.

2. 112, 145, 160, 134, 156, 115, 119, 128, 121, 135, 160, 144, 145, 123, 125, 145, 160, 155, 156, 157, 146, 134, 117, 128, 130, 128, 112, 147, 156, 147, 124, 135, 137, 139, 151, 137, 123, 146, 160, 143, 154, 137, 139, 129, 146, 157, 150, 151, 128, 139.

3. 1, 3, 4, 5, 4, 6, 7, 2, 4, 7, 8, 2, 6, 3, 4, 8, 9, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 1, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 3, 8, 4, 8, 2, 1, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 3, 4, 4, 8, 5, 5, 6, 7, 4, 3, 4, 6, 5, 3, 3, 2.

4. 47, 47, 49, 40, 50, 51, 52, 53, 57, 49, 45, 46, 45, 48, 50, 51, 52, 55, 58, 48, 49, 42, 46, 48, 50, 52, 51, 57, 58, 51, 52, 57, 46, 49, 43, 48, 49, 50, 58, 51, 49, 43, 48, 45, 47, 50, 56, 55, 50, 48, 43, 46, 54, 53, 52, 56, 49, 46, 48, 54, 52, 51, 58, 59, 54, 57, 58, 52, 58, 56.

5. 345, 302, 356, 342, 341, 300, 325, 324, 350, 324, 311, 346, 301, 325, 350, 345, 311, 315, 324, 328, 345, 346, 341, 321, 322, 321, 318, 319, 311, 315, 321, 347, 350, 325, 318, 301, 305, 315, 306, 347, 303, 308, 316, 329, 308, 315, 350, 327, 301, 302.

6. 73, 95, 82, 74, 95, 75, 97, 91, 85, 83, 74, 96, 94, 84, 83, 86, 87, 74, 78, 80, 93, 83, 79, 87, 88, 85, 86, 77, 74, 79, 88, 86, 91, 90, 87, 88, 91, 88, 86, 82, 75, 79, 86, 97, 86, 83, 85, 77, 76, 88, 91, 95, 97, 85, 77, 86, 91, 90, 87, 88, 83, 85, 89, 72, 73.

7. 612, 645, 660, 634, 656, 615, 619, 628, 621, 635, 660, 644, 645, 623, 625, 645, 660, 655, 656, 657, 646, 634, 617, 628, 630, 628, 612, 647, 656, 647, 624, 635, 637, 639, 651, 637, 623, 646, 660, 643, 654, 637, 639, 629, 646, 657, 650, 651, 628, 639.

8. 10, 13, 14, 15, 14, 16, 17, 12, 4, 7, 8, 2, 6, 3, 4, 8, 9, 12, 5, 6, 17, 8, 9, 12, 4, 16, 7, 18, 9, 11, 4, 5, 5, 5, 15, 5, 15, 5, 5, 6, 13, 8, 4, 8, 2, 11, 4, 5, 6, 16, 16, 7, 17, 13, 4, 4, 8, 5, 5, 6, 17, 4, 3, 14, 6, 15, 3, 13, 12.

9. 27, 27, 29, 30, 30, 31, 32, 33, 37, 29, 25, 26, 25, 28, 30, 31, 32, 35, 38, 28, 29, 22, 26, 28, 30, 32, 31, 37, 38, 31, 32, 37, 26, 29, 23, 28, 29, 30, 38, 31, 29, 23, 28, 25, 27, 30, 36, 35, 30, 28, 23, 46, 44, 43, 42, 46, 44, 46, 48, 34, 32, 31, 38, 39, 34, 37, 38, 32, 38, 36.

10. 375, 332, 356, 342, 371, 330, 325, 324, 350, 324, 361, 346, 351, 355, 350, 345, 371, 345, 354, 328, 345, 346, 341, 321, 322, 321, 348, 369, 351, 345, 351, 347, 350, 325, 368, 341, 345, 345, 362, 347, 353, 358, 356, 329, 348, 345, 350, 337, 331, 362.

11. 423, 445, 432, 424, 445, 425, 447, 441, 435, 433, 424, 446, 444, 434, 433, 436, 437, 424, 428, 430, 443, 433, 429, 437, 438, 435, 436, 427, 424, 429, 438, 436, 441, 440, 437, 438, 441, 438, 436, 432, 425, 429, 436, 447, 436, 433, 435, 427, 426, 438, 441, 445, 447, 435, 427, 446, 441, 440, 437, 438, 433, 435, 439, 422, 423.

12. 12, 45, 10, 34, 56, 15, 19, 28, 21, 35, 60, 44, 45, 23, 25, 45, 60, 55, 56, 57, 46, 34, 17, 28, 30, 28, 12, 47, 56, 47, 24, 35, 37, 39, 51, 37, 23, 46, 60, 43, 54, 37, 39, 29, 46, 57, 50, 51, 28, 39.

13. 21, 23, 24, 25, 24, 26, 27, 22, 24, 27, 28, 22, 26, 23, 24, 28, 29, 22, 25, 26, 27, 28, 29, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 21, 24, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 25, 26, 23, 28, 24, 28, 22, 21, 24, 25, 26, 26, 26, 27, 27, 23, 24, 24, 28, 25, 25, 26, 27, 24, 23, 24, 26, 25, 23, 23, 22.

14. 41, 40, 49, 40, 50, 51, 58, 53, 67, 69, 45, 46, 48, 68, 60, 51, 52, 65, 68, 48, 49, 62, 46, 48, 60, 52, 51, 57, 58, 61, 52, 67, 46, 49, 63, 48, 49, 50, 58, 51, 49, 63, 48, 45, 67, 50, 66, 55, 50, 48, 63, 46, 54, 53, 52, 66, 49, 46, 48, 64, 52, 51, 68, 59, 54, 67, 58, 52, 60, 56.

15. 45, 12, 56, 42, 41, 30, 25, 24, 50, 24, 11, 46, 11, 25, 50, 45, 11, 15, 24, 28, 45, 46, 41, 21, 22, 21, 18, 19, 11, 15, 21, 47, 50, 25, 18, 31, 35, 15, 36, 34, 33, 38, 16, 29, 38, 15, 50, 27, 31, 32.

16. 61, 71, 72, 74, 75, 75, 67, 71, 75, 83, 74, 76, 74, 74, 83, 76, 67, 64, 68, 70, 83, 83, 69, 67, 78, 75, 76, 77, 74, 69, 68, 66, 81, 80, 67, 78, 81, 68, 76, 72, 75, 69, 66, 67, 76, 73, 75, 77, 76, 68, 81, 75, 77, 75, 67, 76, 81, 80, 77, 68, 73, 75, 69, 82, 73.

17. 212, 245, 260, 234, 256, 215, 219, 228, 221, 235, 260, 244, 245, 223, 225, 245, 260, 255, 256, 257, 246, 234, 217, 228, 230, 228, 212, 247, 256, 247, 224, 235, 237, 239, 251, 237, 223, 246, 260, 243, 244, 237, 239, 229, 246, 257, 250, 251, 228, 239.

18. 5, 3, 4, 5, 4, 6, 7, 2, 4, 7, 8, 7, 6, 3, 4, 8, 9, 8, 8, 6, 7, 8, 9, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 7, 4, 5, 5, 3, 9, 8, 5, 9, 7, 6, 3, 8, 4, 8, 6, 7, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 3, 4, 9, 8, 5, 5, 6, 7, 4, 9, 4, 6, 9, 3, 9, 2.

19. 547, 547, 549, 540, 560, 551, 552, 553, 557, 549, 545, 546, 545, 548, 550, 551, 552, 555, 558, 548, 569, 542, 560, 548, 550, 552, 551, 557, 558, 551, 552, 557, 546, 549, 553, 548, 549, 550, 558, 551, 549, 543, 548, 535, 537, 550, 556, 555, 550, 548, 543, 546, 554, 533, 552, 556, 549, 546, 568, 554, 552, 551, 558, 559, 554, 557, 558, 552, 558, 526.

20. 45, 72, 56, 42, 41, 30, 32, 32, 35, 32, 31, 46, 31, 32, 50, 34, 31, 35, 34, 38, 45, 46, 41, 21, 32, 31, 31, 39, 31, 35, 21, 47, 50, 35, 38, 31, 35, 35, 36, 47, 33, 38, 36, 29, 38, 31, 35, 27, 31, 32.

21. 891, 845, 823, 874, 868, 893, 874, 863, 854, 874, 892, 874, 873, 848, 832, 845, 890, 873, 823, 845, 895, 849, 874, 836, 826, 840, 850, 874, 836, 891, 856, 854, 835, 832, 865, 878, 848, 867, 845, 867, 856, 857, 859, 849, 868, 871, 873, 846, 868, 847, 857, 860, 863, 856, 845, 874, 857, 859, 854, 838, 874, 891, 895, 894, 873, 881, 889, 883, 885, 856, 874, 878, 882, 873, 865.

22. 15, 17, 19, 18, 34, 27, 37, 38, 33, 32, 11, 26, 25, 28, 29, 24, 23, 26, 27, 37, 33, 34, 25, 28, 33, 21, 16, 19, 35, 32, 27, 28, 22, 25, 24, 22, 28, 31, 32, 38, 40, 32, 27, 29, 19, 25, 17, 11, 19, 17, 29, 28, 36, 32, 34, 36, 37, 47, 28, 45, 32, 35, 23.

23. 1, 19, 28, 19, 16, 17, 30, 27, 25, 18, 16, 1, 4, 13, 8, 9,4, 3, 5, 6, 5, 8, 2, 9, 1, 10, 11, 27, 13, 17, 22, 25, 28, 21, 12, 16, 13, 10, 8, 6, 9, 27, 21, 22, 21, 19, 17, 15, 17, 20.

24. 125, 125, 134, 140, 123, 120, 138, 135, 130, 131, 132, 129, 122, 124, 140, 137, 138, 136, 135, 134, 130, 132, 129, 128, 128, 139, 129, 126, 120, 125, 123, 128, 129, 128, 125, 130, 131, 132, 134, 132, 131, 129, 128, 127, 130, 131, 135, 138, 136, 134, 133, 131, 132, 129, 129, 130, 130, 131, 129, 130, 131, 134, 134, 135, 139, 128, 126, 123, 129, 128.

25. 55, 54, 59, 56, 52, 51, 50, 54, 58, 57, 59, 50, 59, 54, 55, 53, 56, 57, 58, 52, 51, 52, 53, 53, 61, 62, 63, 61, 62, 59, 63, 69, 67, 63, 69, 62, 53, 58, 59, 54, 55, 67, 63, 64, 66, 65, 62, 60, 61, 65, 64, 53, 58, 59, 57, 65, 63, 62, 56, 54.

26. 99, 91, 87, 101, 104, 112, 121, 123, 105, 115, 93, 91 89, 87, 104, 102, 99, 95, 85, 87, 90, 92, 94, 100, 106, 109, 104, 117, 102, 120, 118, 115, 94, 93, 103, 118, 113, 116, 112, 110, 87, 88, 95, 93, 96, 93, 90, 87, 99, 100, 101, 104, 105, 99, 94, 93.

27. 346, 345, 329, 348, 356, 367, 359, 328, 337, 339, 345, 360, 320, 329, 339, 348, 333, 344, 345, 356, 355, 346, 349, 350, 327, 328, 347, 333, 333, 334, 354, 345, 365, 345, 356, 358, 348, 342, 341, 326, 329, 330, 350, 351, 331.

28. 234, 235, 233, 231, 239, 240, 228, 228, 238, 234, 240, 218, 225, 228, 222, 236, 240, 233, 241, 217, 234, 231, 222, 226, 238, 239, 228, 225, 227, 223, 224, 237, 230, 231, 228, 229, 223, 218, 216, 220, 230, 237, 240, 236, 230, 229, 227, 226, 230, 227.

29. 2, 5, 7, 9, 9, 10, 17, 15, 12, 10, 11, 12, 12, 11, 15, 19, 20, 11, 13, 7, 8, 9, 4, 7, 8, 9, 2, 9, 9, 10, 11, 10, 7, 8, 10, 10, 10, 11, 12, 9, 8, 8, 7, 9, 11, 10, 12, 13, 14, 12, 12, 13, 9, 7, 8, 5, 3, 2, 11, 15, 17, 18, 12, 13, 19, 17, 15, 11, 12, 9.

30. 44, 45, 34, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 49, 30, 40, 40, 41, 41, 42, 45, 46, 48, 44, 43, 42, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 50, 49, 48, 48, 45, 33, 32, 38, 35, 45, 38, 39, 33, 30, 33, 34, 32, 36, 37, 45, 44, 40, 43, 47, 50, 46, 34.

3.11 Завдання 11

За даними вибірки X та Y знайти оцінки параметрів регресії, коефіцієнт кореляції та значення прогнозу Y для наступного значення X. Побудувати діаграму розсіювання даних та графік лінійної регресії. Зробити висновок, згідно з одержаним коефіцієнтом кореляції про щільність лінійного зв'язку в даній моделі.

Статистичні дані для кожного варіанту корегуються згідно формул, наведених в таблиці, де N - номер відповідного варіанту.

X	Y
3,0	24,15+ N /10
4,5	20,18+ N /10
6,3	18,53+ N /10
7,8	18,44+ N /10
9,2	16,05+ N /10
10,6	13,14+ N /10
12,0	13,02+ N /10
13,4	9,15+ N /10
14,7	9,50+ N /10
15,6	5,73+ N /10
16,0	*прогноз*

ЛІТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М., Высшая школа, 2000.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. -М., Наука, 1969.
3. Сборник задач по математике для ВТУЗов. / Под редакцией А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. – М.: Наука, т.3, 1986.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике – М.: Высшая школа, 1975.
5. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. – Кн.. 1,2. К.:Либідь, 1994.
6. Кулініч Г.І. Вища математика, книга 1,2. К.,1994.
7. Дюженкова Л.І, Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика. – К.: Академія, 2002