

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Запорізька політехніка»

Степанов Д.М.
ТЕКСТИ (конспект) лекцій з дисципліни
«Твердотільне моделювання і основи інженерних розрахунків»
для студентів спеціальності 131 «Прикладна механіка»
освітньої програми «**Технології машинобудування**»
усіх форм навчання

2024

Тексти (конспект) лекцій з дисципліни «Твердотільне моделювання і основи інженерних розрахунків» для студентів спеціальності 131 «Прикладна механіка» освітньої програми «Технології машинобудування» усіх форм навчання / Укл. Д.М. Степанов – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2020. – 25 с.

Укладач: Д.М. Степанов, доцент, канд. техн. наук

Рецензент: Н.В. Гончар, доцент, канд.техн.наук

Відповідальний
за випуск С.І. Дядя, доцент, канд.техн.наук

Затверджено
на засіданні кафедри ТМБ
протокол № 1
від 06.08.2024 р.

Рекомендовано до видання НМК
машинобудівного факультету
протокол № 1
від 27 серпня 2024 р.

ЗМІСТ

Вступ. Кінцево-елементний аналіз. Комп'ютерний пакет ANSYS	4
Модулі ANSYS/Multiphysics	6
Побудова моделі та прийняття допущень	10
Основні етапи міцностного розрахунку в ANSYS (статика)	12
Критерії міцностної надійності	16
Моделі форми деталей	17
Моделі навантаження	18
Моделі матеріалів	20
Література	25

Вступ. Кінцево-елементний аналіз. Комп'ютерний пакет ANSYS

Finite Element Analysis (кінцево-елементний аналіз) КЕА – спосіб моделювати навантаження конструкції і аналізувати відклик конструкції на це навантаження.

Конструкція моделюється за допомогою дискретних блоків, які називаються *елементами* (elements).

- Кожний елемент містить в собі точні рівняння, що описують його відклик на певне навантаження.
- Сума відкликів всіх елементів моделі дає сумарний відклик всієї конструкції
- Елементи мають кінцеве число невідомих, тому і називаються *кінцевими елементами* (*finite elements*).

Історична довідка

Метод кінцевих елементів був розроблений вченими та інженерами в період 1950-1960х років.

Більш ранній основоположній теорії вже понад 100 років. Вона використовувалась для «ручного» розрахунку підвісних мостів та парових котлів.

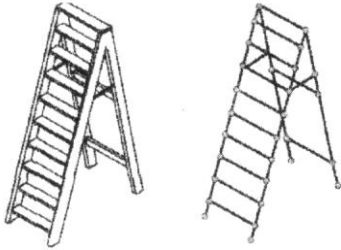
Кінцево-елементна модель (КЕМ), яка має кінцеве число невідомих, може тільки апроксимувати відклик фізичної системи, що має нескінчене число невідомих.

Так що виникає питання: наскільки є точною апроксимація?

- На жаль, немає простої відповіді на це питання. Це залежить від того, що ви моделюєте і яким інструментом. Однак, в даному курсі ви отримаєте деякі рекомендації щодо цього.

Навіщо потрібен КЕА:

- для скорочення кількості тестових прототипів;
- комп'ютерне моделювання дозволяє швидко і ефективно досліджувати різні варіанти конструкції;
- для моделювання конструкцій, які важко досліджувати за допомогою натурних прототипів (рис. 1.1);
- хірургічні імплантати, наприклад штучне коліно.



Фізична система

КЕМ

Рисунок 1.1 – Фізична система і КЕМ

Практичний результат:

- зниження вартості;
- скорочення часу, строків випуску на ринок;
- створення більш надійних і якісних конструкцій.

ANSYS – повноцінний кінцево-елементний пакет, що вже широко використовується інженерами у таких галузях інженерної діяльності:

- міцність (Structural);
- тепло (Thermal);
- гідрогазодинаміка (CFD – Computational Fluid Dynamics);
- електрика / електростатика (Electrical/Electrostatics);
- електромагнетизм (Electromagnetics).

Неповний список галузей промисловості, в яких використовується ANSYS:

- | | |
|----------------|----------------------------------|
| - аерокосмічна | - електроніка |
| - автомобільна | - важке машинобудування |
| - біомедицина | - мікроелектромеханічні пристрої |
| - будівництво | - спортивні товари |

ANSYS/Multiphysics – головний пакет ANSYS, що включає в себе різні інженерні дисципліни (рис. 1.2).

Три головних пакети, які виділяються з ANSYS/Multiphysics:

- ANSYS/Mechanical – міцність та теплофізика;
- ANSYS/Emag – електромагнетизм;
- ANSYS/FLOTRAN – гідрогазодинаміка.

Інші лінії продуктів пакету:

- ANSYS / LS-DYNA – високонелінійні проблеми міцності;
- DesignSpace – спрощений розрахунковий пакет для використання в середовищі CAD-систем;
- ANSYS / ProFEA – аналіз ANSYS та оптимізація в Pro/ENGINEER, тощо.

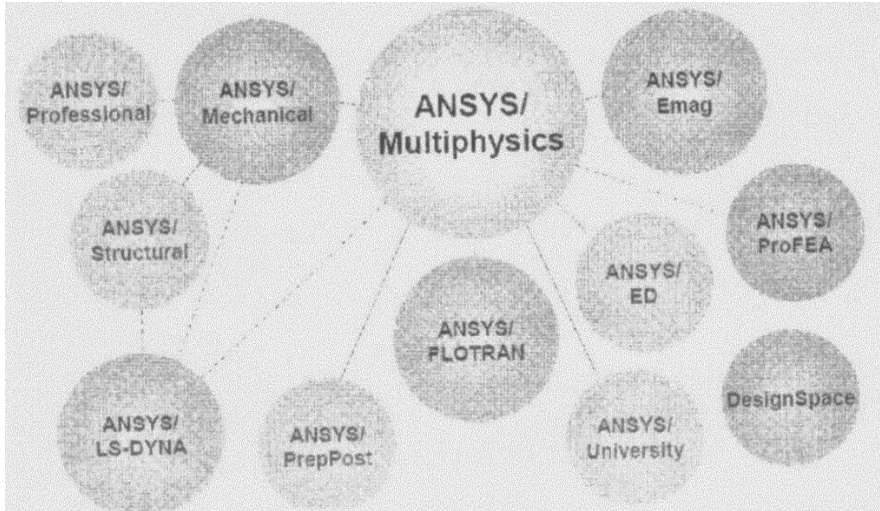


Рисунок 1.2 – Структура ANSYS

Модулі ANSYS/Multiphysics

• Структурний аналіз (міцностний)

Міцностний аналіз використовується для визначення переміщень, деформацій, напружень та реакцій.

Розрізняють:

- а) статичний аналіз. Використовується для умов статичного навантаження. Також можуть бути змодельовані: нелінійна поведінка, така як великі переміщення, великі деформації, контакт, пластичність,

гіперпружність, повзучість.

б) динамічний аналіз. Включає інерційні та демпферні ефекти:

1) модальний аналіз (Modal analysis) – розрахунок власних частот і форм коливань.

2) гармонічний аналіз (Harmonic analysis) – визначення відклику конструкції на синусоїдальний вплив визначеної амплітуди і частоти.

3) перехідний динамічний аналіз (Transient Dynamic analysis) – визначення відклику конструкції на змінні в часі навантаження, включаючи і нелінійну поведінку.

Інші можливості міцностного модулю:

- спектральний аналіз (Spectrum analysis);
- випадкові вібрації (Random vibrations);
- втрата стійкості (Eigenvalue buckling);
- підконструкції (Substructuring) – підмоделі.

Моделювання явної динаміки за допомогою ANSYS/LS-DYNA:

- призначена для дуже великих деформацій, коли інерційні навантаження домінують;
- використовується для моделювання зіткнень, руйнувань.

• Тепловий аналіз

Тепловий аналіз використовується для визначення розподілу температур в об'єктах; також теплові градієнти, теплові потоки, кількість втраченого і виділеного тепла.

Можна моделювати всі три основні режими теплопередачі: кондукція, конвекція, випромінювання.

Розрізняють:

а) стаціонарний (Steady-State) – аналог статички в міцностному пакеті. Залежні від часу ефекти ігноруються;

б) нестационарний (Transient) – аналог динаміки в міцностному пакеті.

Визначення температур та інших параметрів в залежності від часу, також можна моделювати зміну фази (плавлення або застигання).

• Електромагнетизм

Електромагнітний аналіз використовується для розрахунку магнітних полів в електромагнітних пристроях.

Розрізняють:

а) статичний та низькочастотний електромагнетизм:

1) для моделювання пристроїв, які працюють з постійним струмом, низькочастотним змінним струмом, або низькочастотними перехідними сигналами. Приклади: соленоїдальні пристрої, трансформатори;

2) для розрахунку величин, які варті уваги: густина магнітного потоку, напруженість поля, магнітні сили і моменти, імпеданс (повний опір), індуктивність, вихрові струми, втрата потужності розсіювання магнітного потоку;

б) високочастотний електромагнетизм

Моделювання пристроїв для поширення електромагнітних хвиль.

Приклади: мікрохвильові радіочастотні пасивні компоненти, хвилеводи, коаксіальні з'єднання.

Величини, що визначають: S-параметри, Q-фактор, втрати на відбиття, діелектричні та кондуктивні втрати, електричні і магнітні поля;

в) електростатика

Розрахунок електричних полів від збудження напругою або струмом.

Приклад: високовольтні прилади, мікро-електромеханічні системи (MEMS), лінії електропередачі. Typical quantities of interest are electric field strength and capacitance;

г) струмопровідність. Розрахунок струму в провіднику від прикладеної напруги;

е) підключення електроланцюгів

Підключення електричних ланцюгів до електромагнітних приладів.

Типи електромагнітного аналізу:

- статичний аналіз (Static analysis) – розрахунок магнітних полів, викликаних постійним струмом (DC) чи постійними магнітами;
- гармонічний аналіз (Harmonic analysis) – розрахунок магнітних полів, викликаних перемінним струмом (AC);
- перехідний аналіз (Transient analysis) – використовують для моделювання змінних в часі магнітних полів.

• Гідрогазодинамічний аналіз

Розрізняють:

а) розрахункова динаміка рідин (CFD)

Визначення розподілу потоків та температур в рідинах.

ANSYS/FLOTRAN – може моделювати ламінарні та турбулентні потоки, стискаємі та нестискаємі рідини, багатокомпонентні суміші.

Області використання: аерокосмос, електронні прилади, автомобілебудування.

Величини, які варті уваги: швидкість, тиск, температура та коефіцієнт конвекції;

б) акустика:

1) моделювання взаємодії текучих середовищ та оточуючих твердотільних оболонок;

2) приклад: акустичні системи, інтер'єр автомобіля, гідролокатори;

3) величини, які варті уваги: розподіл тисків, переміщення, власні частоти;

в) аналіз наливних систем:

1) моделювання рідкостей в посудинах, розрахунок гідростатичного тиску від сплесків рідини;

2) приклад: нафтові танкери, цистерни;

г) тепло- та масоперенос (масопереміщення)

Одномірний елемент використовується для розрахунків тепловиділення при транспортуванні маси між двома точками,

наприклад в трубах.

• **Міждисциплінарний аналіз**

Зв'язаний міждисциплінарний (комплексний або змішаний) аналіз (Coupled-Field Analysis) має на увазі взаємодію двох або більше дисциплін. Той факт, що одна дисципліна залежить від іншої, робить неможливим їх окреме моделювання та вимагає програм, які дозволяють виконати їх спільний комбінований аналіз.

Приклади:

- термоміцностний аналіз;
- п'єзоелектрика (електрика та міцність);
- акустика (рідина та міцність);
- термоелектричний аналіз;
- індукційний нагрів (магнетизм та тепло);
- електростатичний – міцностний аналіз.

Побудова моделі та прийняття допущень

Модель – сукупність представлень, залежностей, умов, обмежень, що описують процес їх дії.

Модель – відображення об'єктивної реальності.

Може мати різну структуру, природу, мову та форму представлення. Частіш за все використовують математичні моделі, що відображають реальний процес чи явище.



Рисунок 1.3 – Схема процесу інженерного аналізу

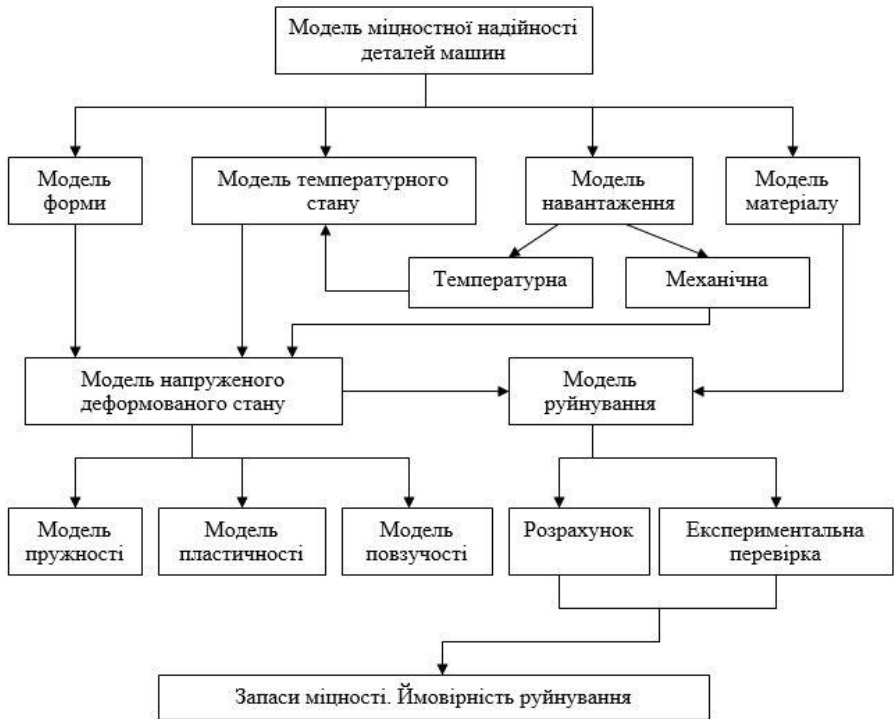


Рисунок 1.4 – Структура моделі міцності надійності виробів

Основні етапи міцностного розрахунку в ANSYS (статика)

1. Створити або імпортувати твердотільну модель.
2. Задати модель матеріалу (властивості матеріалу: модуль пружності $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ (2e11), щільність $\rho = [\text{кг/м}^3]$, коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,3$).
3. Задати тип кінцевого елемента:

- для плоских моделей, тип кінцевих елементів – PLANE42, PLANE82;

- для об'ємних моделей – SOLID 45, SOLID95.

Розбити модель на кінцеві елементи оптимальною сіткою (вільна, регулярна).

4. Прикласти граничні умови (закріплення та навантаження моделі).
5. Зберегти файл.
6. Запустити файл на розрахунок.
7. Аналіз результатів.

Основні параметри, що визначають при статичному міцностному розрахунку:

- 1) Розташування небезпечного перерізу.

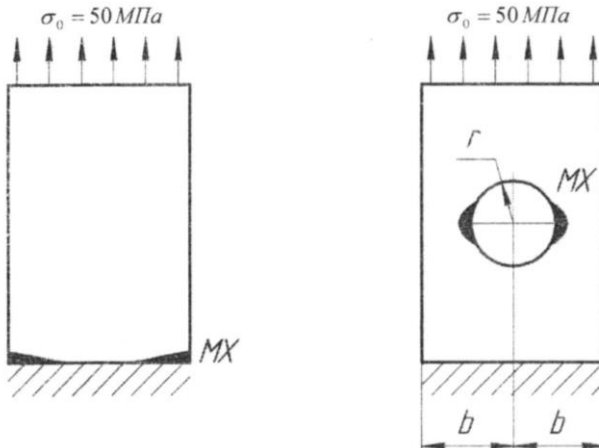


Рисунок 1.5 – Розташування небезпечного перерізу

- 2) Максимальне навантаження в небезпечному перерізі:

$$.809e8=0,809 \cdot 10^8 \text{ Па}=80,9 \text{ МПа}$$

3) Розподілення напружень в моделі.

4) Деформація конструктивних елементів моделі.

5) Похибка розрахунку. Для цього необхідно знайти напруження у певному перерізі за допомогою тензодатчиків або аналітичного розрахунку (за допомогою формул сопромату). Наприклад, для плоскої пластини та круглого отвору в її центрі, формула для визначення максимального напруження в небезпечному перерізі:

$$\sigma_{\text{розр}} = K_T\{\alpha_0\} \cdot \sigma_0 \cdot \frac{b}{b-r} [\text{МПа}],$$

де $K_T\{\alpha_0\}$ – коефіцієнт, який залежить від відношення r/b (від довжини перемички, що залишилась), визначається за графіком.

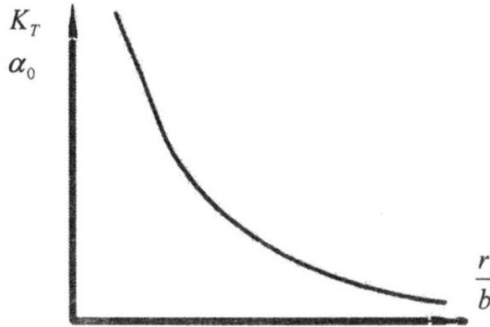


Рисунок 1.6 – Графік для визначення $K_T\{\alpha_0\}$

α_0 – прикладене навантаження;

b – половина ширини пластини;

r – радіус отвору.

Похибка розрахунку δ [%]:

$$\delta = \frac{|\sigma_{\text{розр}} - \sigma_{\text{max}}|}{\sigma_{\text{розр}}} \cdot 100\%$$

Якщо $\delta < 5\%$ – розрахунок вважається вірним;

$\delta = (5 \dots 10)\%$ – технічна похибка;

$\delta > 10\%$ – розрахунок вважається не вірним (не приймається).

б) Залежність точності розрахунку від кількості та виду

кінцевих елементів. Класично, чим більше кінцевих елементів (чим вони дрібніші), тим розрахунок точніший.

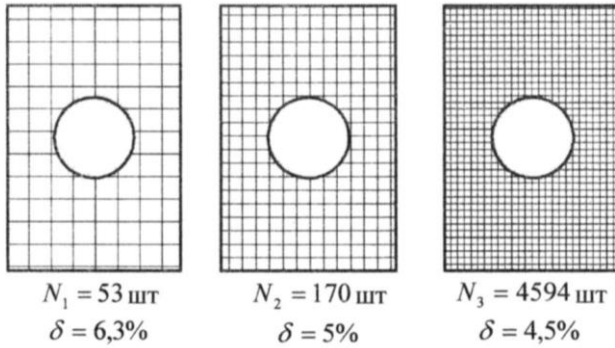


Рисунок 1.7 – Сітка кінцевих елементів типу PLANE42

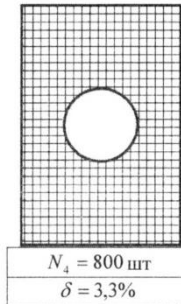
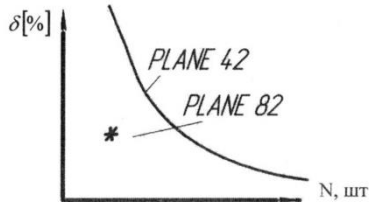


Рисунок 1.8 – Сітка кінцевих елементів типу PLANE82

7) Коефіцієнт концентрації напружень – відношення напружень в моделі з концентратором до напружень в тому ж перерізі моделі без концентратора:

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{сер}\{\sigma_0\}}$$

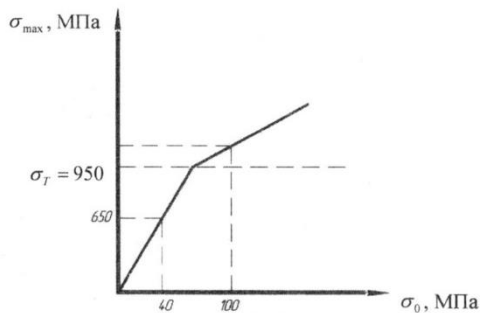
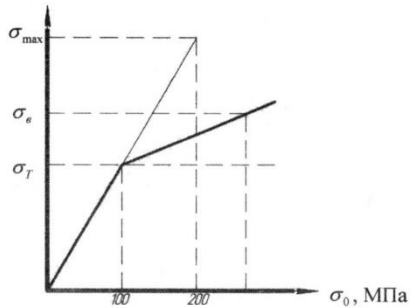
Фізичний сенс α_{σ} у скільки разів напруження в небезпечному перерізі біля концентратора більше, ніж напруження в моделі без концентратора.

8) Коефіцієнт запасу міцності (за напруженням n_{σ} , за деформаціями $n_{\Delta}(n_{\epsilon})$ або за іншим параметром n_q) порівняно з допустимим значенням $[n]$:

$$n_{\sigma} = \frac{[\sigma]}{\sigma_{max}}; n_q = \frac{[q]}{q_{max}}$$

$[n]=1,2\dots 1,6$ – для автомобільної промисловості;

$[n]=2\dots 5$ – для авіаційної та космічної промисловості.



Критерії міцностної надійності

Надійність – властивість виробу виконувати задані функції,

зберігаючи свої експлуатаційні показники в означених межах протягом необхідного відрізка часу чи напрацювання (час роботи виробу під навантаженням або число циклів навантаження). Визначають при напрацюванні від початку експлуатації чи її відновлення після ремонту до критичного стану (рис. 1.4).

Ресурс виробу – допустимий термін служби виробу при відсутності відмови.

Розрізняють ресурс:

- гарантований;
- міжремонтний;
- призначений.

Вимірюється в годинах (мс, с, хв, день або рік) та в циклах.

Відмова – порушення працездатності виробу (двигуна, вузла, деталі).

Міцностна відмова – порушення працездатності деталі, викликане її руйнуванням чи недопустимою деформацією.

Міцностна надійність – ймовірність роботи виробу за час ресурсу без міцностних відмов.

Критерії надійності

1. Основною кількісною характеристикою надійності є ймовірність безвідмовності виробу – F.

Ймовірність події: $P = \frac{m}{n}$, де m – кількість випробувань, при якому подія спостерігалась, n – загальна кількість випробувань, P – ймовірність відмови.

При одному із ста випробувань – відказ $P = 0,01$, тобто за час експлуатації може відмовити в середньому один виріб із ста.

Ймовірність безвідмовної роботи $F = 1 - P = 1 - 0,01 = 0,99$ (або 99%).

2. Коефіцієнти запасу міцності за розрахунковими параметрами:

$$n = \frac{q_{кр}}{q_{max}}$$

де $q_{кр}$ - критичне значення параметра навантаження, яке порушує працездатність виробу;

q_{max} - найбільше значення параметра навантаження в робочих умовах.

Наприклад, розрізняють:

а) коефіцієнт запасу міцності за навантаженням:

$$n = \frac{[\sigma]}{\sigma_{max}},$$

де $[\sigma]$ - допустиме напруження ($\sigma_{\epsilon}, \sigma_T, \sigma_{0,02}, \tau$), як властивість матеріалу;

б) коефіцієнт запасу міцності за деформаціями:

$$n_{\Delta x} = \frac{[\Delta x \{ \Delta y, \Delta z, \epsilon, \Delta \alpha, \Delta \beta, \Delta \gamma, \}]}{\Delta x_{max}}$$

в) за температурою T (К, C^0 , F), тощо.

Умови міцностної надійності записуються в вигляді $n \geq [n]$, де $[n]$ - допустиме значення запасу міцності. Як правило $[n]=1,3\dots 2$ – при постійних в часі навантаженнях; $[n]=3\dots 5$ – при змінних навантаженнях.

Моделі форми деталей

Існують:

- прості моделі (спрощенні, схематизовані) – стержень, пластина, оболонка;

- моделі з декомпозицією – отримані розбиттям вихідних моделей складної форми на прості моделі (рис. 1.9);

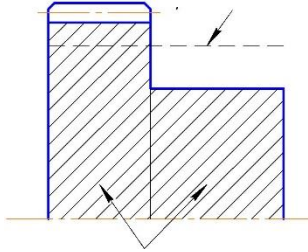


Рисунок 1.9 – Приклад простої моделі та моделі з декомпозицією

- натуральні моделі. Моделі, які повторюють особливості конструкції або моделі натуральної деталі. Застосовують в випадку, якщо для їх опису немає можливості застосування інших моделей чи є можливість використання метода сучасного математичного апарату – метод кінцевих елементів, метод кінцевих різниць, метод граничних елементів. Слід відрізнити від натурних деталей або зразків;

- концентратори напружень – проста модель форми плюс математичні залежності, які визначають величину концентрації напружень.

Коефіцієнт концентрації напружень:

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max} (\text{с концентратором})}{\sigma_{\text{исх}} (\text{без концентратора})}$$

Він показує, в скільки разів напруження в моделі з концентратором більше, ніж в моделі без концентратора в тому ж перерізі.

Моделі навантаження

Вплив зусиль на елемент конструкції класифікують таким чином.

1. *За характером розташування сил та навантажень:*

а) зосереджені сили – сили, які діють на невеликих поверхнях деталі (рис. 1.10);

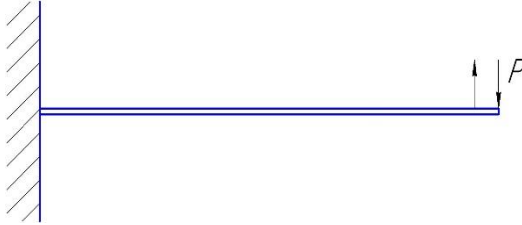


Рисунок 1.10 – Зосереджена сила

б) розподілена сила – сила, яку прикладено до значних ділянок поверхні (рис. 1.11);

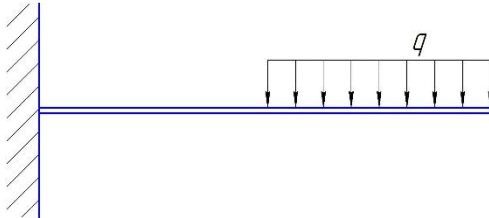


Рисунок 1.11 – Розподілена сила

в) об'ємні чи масові сили – сили, які прикладені до кожної частки матеріалу (наприклад, під дією сили ваги, відцентрових сил тощо);

г) поля – температурне поле, електромагнітне поле, корозійний вплив.

2. За видом деформацій:

- а) розтягуючі, стискаючі (розтягання, стискання);
- б) згинальні (згини);
- в) скручувальні (кручення);
- г) зсувальні (зсув).

3. За причиною отримання:

- а) від дії газів;
- б) від інерційних сил;
- в) від теплового впливу.

Моделі матеріалів

Таблиця 1. Класифікація матеріалів та опції програми ANSYS

Поведінка матеріалу	Тип деформації	Швидкість деформації	Класифікація матеріалу	Закон поведінки матеріалу	Мітка команди TB	Залежність від температури				
Лінійна	Пружна	Не впливає	Лінійно-пружний	Гука (ізотропний)	Команда MP	Є				
				Гука (анізотропний)	ANEL	Є				
				Гука (ортотропний)	Команда MP	Є				
Нелінійна	Пружна	Не впливає	Гіперпружний	Муни-Рівліна	MOONEY	Є				
				Арруда-Бойса	BOYCE	Є				
				Блатц-Ко	(встановлення опцій)	Є				
				Мультилінійно-пружний	Мультилінійний пружний	MELAS	Є			
				Впливає	В'язкопружний	В'язкопружний	EVIS	Є(1)		
				Непружна	Не впливає	Ізотропно-зміцнюючийся	Білінійний ізотропний	BISO	Є	
								Мультилінійний ізотропний	MISO	Є
								Нелінійний ізотропний	NLISO	Є
								Анізотропний	ANISO	Немає
								Кінематично зміцнюючийся	Білінійний кінематичний	BKIN
								Мультилінійний	MKIN/KINH	Є

				кінематичний			
				кабоше	CHABOCHE	Є	
			Комбінація кінематичного і ізотропного зміцнення	Кабоше і білінійний ізотропний	CHABOCHE n BISO	Є	
				Кабоше і мультилінійний ізотропний	CHABOCHE n MISO	Є	
			Кабоше і нелінійний ізотропний		CHABOCHE n NLISO	Є	
			Пластичний	Друкера-Прагера	DP	Немає	
			Впливає	В'язкопластичний	Повзучість	CREEP	Є(2)
					Ананд	ANAND	Є
(1) Вплив температури враховується в моделі матеріалу (2) Температура враховується двома способами: (а) рівнянням повзучості; (б) рівнянням повзучості та завданням таблиці	Комбінація повзучості та ізотропного зміцнення	Повзучість і білінійний ізотропний	CREEP n BISO	Є			
		Повзучість і мультилінійний ізотропний	CREEP n MISO	Є			
		Повзучість і нелінійний ізотропний	CREEP n NLISO	Є			

За класифікацією (табл. 1) розглянемо різновиди моделей поведінки різних видів матеріалів.

1. **Лінійна пружність.** Підпорядковується співвідношенню закону Гука і не зберігає деформацію після зняття навантаження (рис. 1.12):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad [МПа = МПа \cdot \text{доля}(\%)],$$

де σ – напруження, МПа;

E – модуль пружності (Юнга), МПа;

ε – деформація, %.

Розрізняють три види поведінки лінійно-пружного матеріалу:

- ізотропне;
- анізотропне;
- ортотропне.

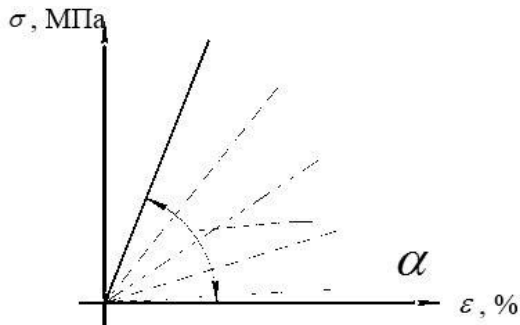


Рисунок 1.12 – Лінійна пружність

Ізотропний матеріал виявляє одні і ті ж механічні властивості у всіх напрямках, наприклад, модуль пружності E для напрямів X , Y , Z однаковий.

При *анізотропній* поведінці механічні властивості відрізняються для різних напрямків (деревина, композит зі скловолокном тощо).

Ортотропна поведінка – властивість матеріалу володіти симетрією відносно 3-х ортогональних площин (армований волокном

епоксипласт).

2. **Гіперпружність.** Гіперпружні матеріали (еластомери) можуть зазнавати великі деформації до 100...200% і більше і повертатися в початковий стан або дуже близький до нього (гума).

3. **Мультилінійна пружність.** Являє собою розширення закону Гука і передбачає дискретно-лінійне абсолютно пружну поведінку матеріалу (рис. 1.13). В силу дискретності модель нелінійна.

Широким різновидом, який зустрічається в техніці, досить часто є білінійна поведінка матеріалу (рис. 1.14).

Префікс «бі» означає – «два». Бізонія, наприклад, це – дві зони.

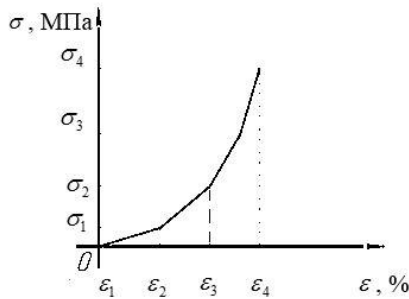


Рисунок 1.13 – Мультилінійна пружність

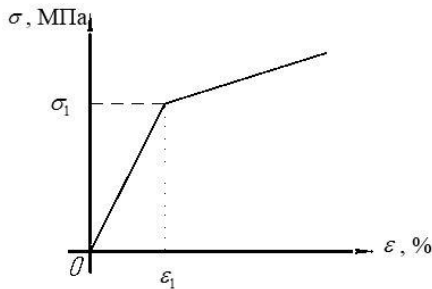


Рисунок 1.14 – Білінійна поведінка матеріалу

4. **В'язкопружність.** В'язкопружний матеріал є чутливим до швидкості деформації і має відгук, який хоч в малій мірі, залежить від часу (рис. 1.15).

5. **Нелінійні непружні нечутливі** до швидкості деформації матеріали.

Основна частина таких матеріалів проявляє властивості пластичності, які не залежать від всебічного гідростатичного тиску. Пластичні деформації, які не зникають після зняття навантаження і є залишковими. Характерно, що після появи пластичних деформацій, досить невеликого збільшення напружень для істотного зростання деформацій. Це явище називається плинністю, а відповідні напруження – межею плинності або текучості (σ_T , МПа).

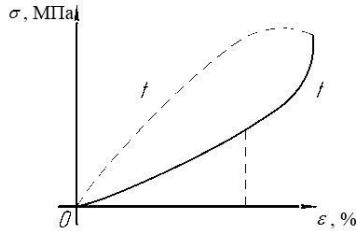


Рисунок 1.15 – Петля Гістерезису

6. В'язкопластичність. Є одним з видів нелінійного непружного чутливого до швидкості деформації поведінки матеріалів.

Для розгляду різновидів поведінки вищеназваних видів матеріалів, проведемо порівняння зі стандартними механічними елементами, такими, як пружини, повзуни і демпфери (рис. 2.15).

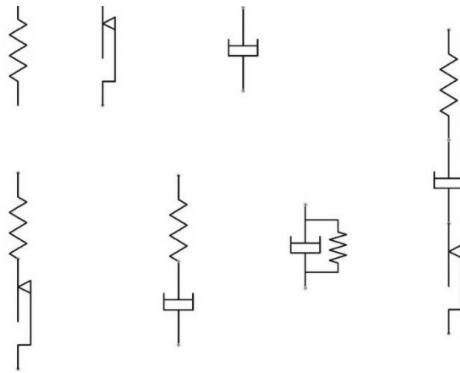


Рисунок 1.15 – Різновид поведінки матеріалів в порівнянні зі стандартними механічними елементами

Література

1. Mary Kathryn Thompson, John M. Thompson. ANSYS Mechanical APDL for Finite Element Analysis / Butterworth-Heinemann is an imprint of Elsevier, 2017. – 447 p.
2. Xiaolin Chen, Yijun Liu. Finite element modeling and simulation with ansys workbench. Second edition / CRS Press. Teylor & Francis Group, 2019. – 458 p.
3. Erdogan Madenci, Ibrahim Guven. The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS. Second edition / Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2015. – 657 p.
4. Y. Nakasone, S. Yoshimoto, T. A. Stolarski. Engineering Analysis with ANSYS Software / Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. – 456 p.
5. ANSYS Mechanical APDL Theory Reference. Електронний ресурс. Режим доступу: https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans_help_v182/ans_thry/ans_thry.html.
6. ANSYS Mechanical APDL Structural Analysis Guide ANSYS. Електронний ресурс. Режим доступу: <https://www.pdfdrive.com/ansys-mechanical-apdl-structural-analysis-guidepdf-e12262220.html>.
7. ANSYS Mechanical APDL Advanced Analysis Guide ANSYS. Електронний ресурс. Режим доступу: <https://www.pdfdrive.com/ansys-mechanical-apdl-advanced-analysis-guidepdf-e16678560.html>.